
Vorwort

Dieses Lehrbuch ist aus einer einsemestrigen Vorlesung über Eichfeldtheorie entstanden, die ich seit Anfang der 90er Jahre mehrfach an der Humboldt-Universität als Teil meines viersemestrigen Differentialgeometrie-Kurses im Hauptstudium gehalten habe. Es richtet sich an Studierende der Mathematik und der Physik, die die grundlegenden Begriffe und Methoden der Differentialgeometrie auf Faserbündeln kennenlernen möchten. Diese Methoden gehören zum ‚Handwerkszeug‘ für alle, die geometrische Probleme auf gekrümmten Räumen verstehen und bearbeiten wollen oder sich z. B. für die Beziehung zwischen Geometrie, Topologie und der Analysis geometrisch definierter Operatoren interessieren. In der theoretischen Physik nutzt man Faserbündelmethode zur mathematischen Modellierung der vier grundlegenden Wechselwirkungen, Gravitation, Elektromagnetismus, schwache Wechselwirkung und starke Wechselwirkung. Die solide Kenntnis der den Modellen zugrunde liegenden differentialgeometrischen Methoden kann deshalb auch das Verständnis der physikalischen Literatur zur Eichfeldtheorie erleichtern.

Ich setze in dem Buch voraus, dass der Leser mit der Differential- und Integralrechnung auf Mannigfaltigkeiten und mit den Grundbegriffen der Riemannschen Geometrie vertraut ist.

In Kap. 1 werden Lie-Gruppen und ihre Lie-Algebren eingeführt. Wir behandeln grundlegende Eigenschaften dieser Gruppen und Algebren, die im vorliegenden Buch benötigt werden. Dies sind insbesondere die Exponential-Abbildung einer Lie-Gruppe, die adjungierte Darstellung und die Killing-Form sowie Liesche Transformationsgruppen und homogene Räume. Tiefer liegende Resultate zur Strukturtheorie von Lie-Gruppen und -Algebren bzw. zur Klassifikation von Darstellungen sind Gegenstand eigenständiger Vorlesungen und werden hier nicht behandelt.

In Kap. 2 führen wir die lokal-trivialen Faserungen ein, die das Grundobjekt der Untersuchungen dieses Buches sind. Insbesondere besprechen wir Hauptfaserbündel, das sind lokal-triviale Faserungen, deren Fasern Lie-Gruppen sind, sowie die zu ihnen assoziierten Faser- und Vektorbündel. Wir lernen Methoden kennen, mit denen man neue Bündel konstruieren und solche, mit denen man Bündel reduzieren und erweitern kann, und besprechen eine Reihe von wichtigen Beispielen. Die Homotopieklassifizierungssätze für Hauptfaserbündel, die einem sagen, wie viele G -Hauptfaserbündel es über

einer gegebenen Mannigfaltigkeit gibt, haben wir nicht in dieses Buch aufgenommen. Man findet sie in den Lehrbüchern von D. Husemoller [H94] und T. tom Dieck [tD91].

Kapitel 3 enthält die Grundlagen der Differentialrechnung auf Hauptfaserbündeln und den zu ihnen assoziierten Vektorbündeln. Grundlegend ist dabei der Begriff des Zusammenhangs bzw. – dazu äquivalent – der einer Zusammenhangsform auf einem Hauptfaserbündel. Ein Zusammenhang ermöglicht es, Parallelverschiebungen zwischen den Fasern der betrachteten Bündel zu definieren und die Fasern dadurch zu vergleichen. Mit seiner Hilfe kann man einen geeigneten Ableitungsbegriff für Differentialformen mit Werten in assoziierten Vektorbündeln erklären, der das gewöhnliche Differential verallgemeinert. Insbesondere ist jedem Zusammenhang auf einem Hauptfaserbündel eine kovariante Ableitung zugeordnet, mit der Schnitte in den assoziierten Vektorbündeln abgeleitet werden. Wir diskutieren des Weiteren die Krümmungsform eines Zusammenhangs, die in gewissem Sinne die Abweichung von der Trivialität des Bündels misst, und beschreiben das Verhalten aller betrachteten Größen unter Eichtransformationen. Abschließend erläutern wir die eingeführten Begriffe am Beispiel von Hauptfaserbündeln mit der Strukturgruppe S^1 .

Im Kap. 4 beschäftigen wir uns dann mit der sogenannten Holonomiegruppe eines Zusammenhangs. Das ist diejenige Gruppe, die entsteht, wenn man ein fixiertes Element einer Faser des Bündels entlang von Wegen, die im Fußpunkt der Faser geschlossen sind, parallel verschiebt. Diese Gruppe ist die kleinste Untergruppe der Strukturgruppe des Hauptfaserbündels, auf die sich das Bündel und sein Zusammenhang reduzieren lassen, ohne die Differentialrechnung auf den assoziierten Vektorbündeln zu verändern. Wir behandeln Eigenschaften der Holonomiegruppe und beweisen den Satz von Ambrose und Singer, der angibt, wie man die Holonomiegruppe mit Hilfe der Krümmung des Zusammenhangs berechnen kann. Am Ende des Kapitels erklären wir, was Krümmung und Holonomie eines Zusammenhangs mit der Existenz paralleler Schnitte in assoziierten Vektorbündeln zu tun haben. Besonders nützlich ist das sogenannte Holonomieprinzip, das es ermöglicht, durch Bestimmung der Fixelemente der Wirkung der Holonomiegruppe auf rein algebraische Weise zu entscheiden, wie viele parallele Schnitte ein assoziiertes Vektorbündel besitzt.

In Kap. 5 wenden wir die allgemeine Holonomietheorie auf den speziellen Fall des Levi-Civita-Zusammenhangs semi-Riemannscher Mannigfaltigkeiten an. Jeder Riemannschen oder pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit wird dadurch ihre Holonomiegruppe zugeordnet. Wir diskutieren die Frage, welche Gruppen als Holonomiegruppen einfach-zusammenhängender semi-Riemannscher Mannigfaltigkeiten auftreten können und welche speziellen geometrischen Eigenschaften in der Holonomiegruppe kodiert sind. Der erste Schritt ist dabei der Zerlegungssatz von de Rham und Wu, der besagt, dass man jede einfach-zusammenhängende geodätisch vollständige semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit in ein Produkt unzerlegbarer Faktoren zerlegen kann. Danach braucht man sich zur Bestimmung der Holonomiegruppen nur noch mit den unzerlegbaren Faktoren zu beschäftigen. Als ersten Fall betrachten wir dann die Holonomiegruppen symmetrischer Räume und zeigen, wie man die Holonomiegruppe

in diesem Fall aus den algebraischen Daten des symmetrischen Raumes erhält. Insbesondere beweisen wir, dass die Holonomiegruppe durch die Isotropiedarstellung des symmetrischen Raumes gegeben ist. Man kann die Holonomiegruppen symmetrischer Räume deshalb an den Daten ablesen, die bei der Klassifikation symmetrischer Räume entstehen. Die irreduziblen symmetrischen Räume sind vollständig klassifiziert. Man kennt somit auch alle in dieser Situation auftretenden Holonomiegruppen. Als nächstes wenden wir uns dem nicht-symmetrischen Fall zu. Die Holonomiegruppen irreduzibler Mannigfaltigkeiten wurden in den 50er Jahren von Marcel Berger klassifiziert. Im nicht-symmetrischen Fall tritt nur eine kurze Liste von möglichen Gruppen auf, die in der sogenannten Berger-Liste zusammengefasst sind. Wir geben diese Liste für Riemannsche Mannigfaltigkeiten an, beschreiben die speziellen Geometrien, die zu den Holonomiegruppen in der Riemannschen Berger-Liste gehören und geben einen kurzen Überblick über die Beweisideen, die zu dieser Liste führen. Am Ende des Kapitels wenden wir uns noch einmal den pseudo-Riemannschen Metriken zu. In diesem Fall ist die Klassifikation der Holonomiegruppen und auch die der symmetrischen Räume noch unvollständig. Neben den irreduziblen Holonomiedarstellungen, die man kennt (pseudo-Riemannsche Berger-Liste und Holonomiegruppen halbeinfacher symmetrischer Räume), treten auch Holonomiedarstellungen auf, die zwar unzerlegbar sind, aber einen ausgearteten invarianten Unterraum besitzen. Wir beenden das Kap. 5 mit einem Überblick über die vor kurzem erzielten Klassifikationsresultate für die Holonomiegruppen von Lorentz-Mannigfaltigkeiten.

In Kap. 6 beschäftigen wir uns mit charakteristischen Klassen. Charakteristische Klassen sind Kohomologieklassen, die man Hauptfaser- oder Vektorbündeln zuordnet. Betrachtet man die charakteristischen Klassen in der de Rham-Kohomologie, so kann man sie durch die Krümmungsform von Zusammenhängen des Bündels beschreiben. Nach der Darstellung des allgemeinen Formalismus, des Weil-Homomorphismus, der zu solchen Kohomologieklassen führt, besprechen wir die Chern-Klassen komplexer Vektorbündel, die Pontrjagin-Klassen reeller Vektorbündel und die Euler-Klasse orientierter Vektorbündel. Dabei interessiert uns insbesondere die Beziehung dieser Klassen zu den Krümmungen der Bündel bzw. der Mannigfaltigkeiten. Abschließend zeigen wir, wie man mittels formaler Potenzreihen weitere Kohomologieklassen erzeugen kann, die z. B. in den Indexsätzen elliptischer Operatoren auftreten.

Kapitel 7 ist dem Yang-Mills-Funktional gewidmet. Das Yang-Mills-Funktional ist ein eichinvariantes Funktional auf dem Raum aller Zusammenhänge eines Hauptfaserbündels, das jeder Zusammenhangsform des Bündels das Integral der Länge seiner Krümmungsform zuordnet. Zuerst leiten wir die Euler-Lagrange-Gleichung für die kritischen Punkte des Yang-Mills-Funktional her. Im Falle eines $U(1)$ -Bündels sind dies gerade die Maxwell'schen Gleichungen für ein elektromagnetisches Feld. Anschließend betrachten wir den Fall von Bündeln über 4-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. In diesem Fall kann man das Yang-Mills-Funktional durch die 1. Pontrjagin-Klasse des adjungierten Bündels von unten abschätzen. Die Minima des Yang-Mills-Funktional sind die selbstdualen bzw. anti-selbstdualen Zusammenhänge. Als Beispiel besprechen

wir abschließend selbstduale $SU(2)$ -Zusammenhänge über \mathbb{R}^4 bzw. S^4 , die sogenannten BPST-Instantonen.

Im Anhang sind einige Begriffe und Sätze aus der Differentialgeometrie zusammengestellt, die in diesem Lehrbuch vorausgesetzt und häufig verwendet werden. Insbesondere in Kap. 5 benutzen wir Resultate aus der Riemannschen Geometrie, die der Leser im Anhang nachlesen kann, falls er damit nicht vertraut ist.

Jedes Kapitel des Buches schließt mit Aufgaben ab, die zum eigenen Üben und Vertiefen des dargestellten Stoffes gedacht sind. Am Ende des Buches findet man Lösungen zu diesen Aufgaben, die man sich erst ansehen sollte, nachdem man die Aufgaben selbst gelöst oder das zumindest versucht hat.

Für diejenigen, die sich wundern werden, dass der Name Eichfeld außer im Titel im ganzen Buch nicht vorkommt, sei hier bemerkt, dass ‚Eichfeld‘ der von Physikern benutzte Name für die Zusammenhangsform auf einem Hauptfaserbündel ist. Die Krümmungsform des Zusammenhangs beschreibt die Feldstärke des dabei modellierten Feldes. Dieses Lehrbuch verfolgt nicht das Ziel, physikalisch realistische Eichfeldtheorien und ihre physikalische Bedeutung zu beschreiben. Dazu gibt es umfangreiche physikalische Literatur. Das Yang-Mills-Funktional findet man dort als Summanden in den Lagrange-Funktionalen physikalisch realistischer Eichfeldtheorien wieder. Es ist bemerkenswert, wie sehr mathematische Methoden, die ihren Ursprung in dem Versuch der mathematischen Modellierung physikalischer Erscheinungen haben, die Entwicklung der Mathematik selbst befruchtet haben. Wir haben an einigen Stellen des Buches Hinweise auf wichtige mathematische Entwicklungen und Ausblicke auf offene mathematische Probleme angefügt, die mit den hier behandelten Themen zusammenhängen.

Ich habe vor vielen Jahren selbst an der Humboldt-Universität studiert und viele Vorlesungen über Differentialgeometrie, insbesondere auch über Lie-Gruppen und homogene Räume und über Differentialgeometrie auf Faserbündeln bei Prof. Dr. Rolf Sulanke gehört, von denen ich wie viele andere sehr profitiert habe. Mein Interesse an Differentialgeometrie und Vieles in meinen eigenen Vorlesungen basiert auf dem bei ihm Gelernten. Deshalb sind Ähnlichkeiten mit einigen Teilen des Lehrbuches „Differentialgeometrie und Faserbündel“ von R. Sulanke und P. Wintgen (siehe [SW72]) auch kein Zufall. Ich möchte mich auch an dieser Stelle nach langer Zeit bei Rolf Sulanke nochmals ganz herzlich für diese Vorlesungen bedanken.

Mein weiterer Dank geht an alle Diplomanden und Doktoranden, die in vielen Stadien der Arbeit an diesem Manuskript Teile davon gelesen und mich auf Fehler oder Unklarheiten hingewiesen haben, insbesondere an Alexander Binder, Luise Fehlinger, Ramona Ziese, Sergej Schidlowski, Thomas Ueckerdt, Annegret Schalke, Carsten Falk und Peter Schemel. Besonders danke ich Kay Dimler, der das gesamte Manuskript technisch durchgesehen und mir mit vielen Verbesserungen und Hinweisen sehr geholfen hat. Ich danke Carsten Falk für die Ausarbeitung von Lösungen zu einem Teil der Aufgaben, Ramona Ziese für die Hilfe bei der Anfertigung des Index, Thomas Neukirchner für das Titelbild und Mischa Baum für die Skizzen im Buch. Nicht zuletzt danke

ich dem Springer-Verlag für die Bereitschaft, dieses Lehrbuch in das Verlagsprogramm aufzunehmen.

Ich habe mich beim Schreiben des Manuskriptes um große Sorgfalt bemüht. Trotzdem werden sich Fehler eingeschlichen haben. Über jeden Hinweis dazu würde ich mich freuen.

Berlin, November 2008

Helga Baum

Seit Erscheinen der ersten Auflage des Buches habe ich viele Hinweise und Meinungen von Kolleginnen und Kollegen und von Studierenden zu dem Text bekommen, die Fragen gestellt, mich auf Fehler hingewiesen und Wünsche für Ergänzungen und Präzisierungen geäußert haben. In der zweiten Auflage habe ich viele dieser Hinweise eingearbeitet. Ich möchte mich besonders bei Nicolas Ginoux, Dorothee Schüth, Uwe Semmelmann und Norbert Straumann und bei meinen Mitarbeitern und Studenten, vor allem bei Sergej Schidlowski, Felix Günther, Katharina Baum, Christoph Stadtmüller, Daniel Schliebner und Andre Lischewski bedanken. Über Kommentare und Hinweise würde ich mich auch weiterhin sehr freuen.

Berlin, September 2013

Helga Baum

<http://www.springer.com/978-3-642-38538-4>

Eichfeldtheorie

Eine Einführung in die Differentialgeometrie auf
Faserbündeln

Baum, H.

2014, XIV, 380 S. 38 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-38538-4