

Ziel dieses Kapitels ist es, den Lesern Bezug nehmend auf die aktuelle fachdidaktische Diskussion, die Bildungsstandards und die darauf basierenden Lehrpläne (Kerncurricula, Bildungspläne etc.) ein Bild davon zu vermitteln, wie Mathematikunterricht in der heutigen Zeit auf der Grundlage allgemeiner Unterrichtsprinzipien gestaltet werden sollte. Denn das Wissen hierüber ist – neben der Kenntnis der neueren einschlägigen Fachliteratur zu den einzelnen Unterrichtsinhalten – Basiswissen für die Planung und Gestaltung von Mathematikunterricht, um so Planungsentscheidungen treffen und – im Fall eines Unterrichtsbesuchs – (schriftlich) begründen zu können. Wir skizzieren in Abschn. 2.1 kurz die Genese der Bildungsstandards und der damit veränderten Unterrichtskultur, bevor wir in Abschn. 2.2 ausführlicher auf allgemeine Unterrichtsprinzipien eingehen.

2.1 Eine kompetenzorientierte Unterrichtskultur

Im Jahr 2003 hat die internationale Vergleichsstudie PISA dem deutschen Bildungssystem ein schlechtes Zeugnis ausgestellt. Im Detail wurden bei den deutschen Schülern im mathematischen Bereich Schwächen bei Aufgaben festgestellt, die über die Anwendung von Routinen hinausgingen. Das empirisch nachgewiesene kognitive Potenzial schien in Deutschland weniger erfolgreich in mathematische Kompetenzen umgesetzt zu werden, was nach der TIMS-Studie wesentlich auf die Aufgabenkultur im deutschen Mathematikunterricht zurückgeführt wurde, weil hier im Vergleich zu den USA und Japan die am wenigsten komplexen Aufgaben gestellt wurden (vgl. [42], S. 22). In der Grundschule zeigen die Ergebnisse der IGLU-Studie (vgl. [229] sowie [70], S. 11 ff.) folgendes Bild: Zwar schneiden Viertklässler im internationalen Vergleich im Durchschnitt besser ab als Sekundarstufenschüler (ihre Leistungen liegen in allen drei Erhebungen der Jahre 2001, 2007 und 2011 relativ stabil im oberen Drittel), andererseits verfügt aber auch fast jeder fünfte Viertklässler nur über elementarste mathematische Grundfertigkeiten und muss daher im Hinblick auf das weitere Lernen als gefährdet eingestuft werden. Es ist nachvollziehbar,

dass die angestrebte Reform das gesamte Schulsystem durchziehen sollte, zumal in der Grundschule die Grundlagen für das spätere Lernen gelegt werden. Im Wandel der Aufgabenkultur im Unterricht – von einer stark algorithmisch geprägten Fertigkeitenorientierung hin zu mehr Problem- und Anwendungsorientierung – wurde den Erkenntnissen der Studien folgend ein wichtiger Schritt in die richtige Richtung gesehen. So wurden als Reaktion national verbindliche „Bildungsstandards“ für die verschiedenen Schulformen entwickelt (für den Primarbereich und den mittleren Schulabschluss im Jahr 2004, für die Hauptschule ein Jahr später, für die Allgemeine Hochschulreife im Jahr 2012). Die von der Kultusministerkonferenz (KMK) beschlossenen Bildungsstandards bildeten bzw. bilden wiederum die Grundlage für die sich anschließende Neuentwicklung der Lehrpläne in den verschiedenen Bundesländern. Sie enthalten wesentliche Neuerungen mit dem Kompetenzbegriff als wesentlichem Charakteristikum. Anstelle einer inhaltsorientierten Sichtweise („Was soll gelehrt werden?“) wird mit ihm eine ergebnisorientierte Sichtweise eingenommen („Was sollen Schülerinnen und Schüler können?“) (vgl. [21], S. IV). Mit der Formulierung solcher Kompetenzen wird ein Soll-Zustand beschrieben, der als Mindestniveau für das Ende eines festgelegten Zeitraums zu verstehen ist. Dieser Zeitraum umfasst im Fall der Bildungsstandards für die Grundschule die gesamte Grundschulzeit (d. h. bis zum Ende der vierten Klasse), womit bewusst viel Freiraum und Flexibilität für die Umsetzung und Ausgestaltung gelassen werden.

Den nationalen Bildungsstandards liegt der Kompetenzbegriff von Weinert zugrunde, bei dem Kompetenzen als Disposition verstanden werden, die Personen dazu befähigt, bestimmte Arten von Problemen erfolgreich zu lösen (vgl. [106], S. 3). Es geht also nicht um das Anhäufen von Wissen, sondern darum, mit erworbenem Wissen umgehen und es zur Lösung bestimmter Probleme nutzen zu können. In diesem Sinne geht es auch um den Erwerb von Strategien, mithilfe derer die Kinder sich Wissen aneignen bzw. Anforderungssituationen bearbeiten können. Im und durch Unterricht müssen die Schüler also vor allem auch „das Lernen lernen“ ([161], S. 15). Neben der kognitiven Komponente spielen dabei auch Interessen, Motivationen, Werthaltungen und soziale Bereitschaft eine Rolle, sodass kompetenzorientierter Unterricht folglich nicht allein auf die kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten der Schüler ausgerichtet sein darf, sondern auch die Förderung motivationaler, volitionaler und sozialer Bereitschaften und Fähigkeiten im Blick haben muss. In der aktuellen Didaktik unterscheidet man im Allgemeinen zwischen fachlichen und überfachlichen Kompetenzen, wobei erstgenannte auf die sachgerechte und selbstständige Bewältigung von Aufgaben und Problemen mithilfe fachlicher Fähigkeiten und Fertigkeiten gerichtet sind, während Selbst- bzw. Personalkompetenz, Methodenkompetenz, soziale und kommunikative Kompetenz wichtige Schlüsselqualifikationen auf überfachlicher Ebene darstellen (vgl. hierzu auch Tab. 2.1). Auch wenn der Schwerpunkt dieses Bandes natürlich auf den fachlichen Kompetenzen im Mathematikunterricht liegt, werden bewusst auch diese Kompetenzen an hierfür geeigneten Stellen miteinbezogen.

Auf fachlicher Ebene ist ein Übergang von sehr konkret formulierten zu allgemeineren Kompetenzen als Bildungszielen intendiert, die flexibel auch in nicht vertrauten Situationen angewendet werden können („Flexibilität“) und überdauernd sein sollen

Tab. 2.1 Lernbereiche im Schulunterricht

Lernbereiche			
inhaltlich-fachlich	methodisch-strategisch	sozial-kommunikativ	personal-affektiv
Wissen von Fakten,	<i>markieren</i>	<i>zuhören</i>	Entwicklung bzw.
Regeln, Definitionen,	<i>nachschlagen</i>	<i>fragen</i>	Aufbau von ...
Begriffen, ...	<i>strukturieren</i>	<i>antworten</i>	Selbstvertrauen
Verstehen von	<i>protokollieren</i>	<i>begründen</i>	Selbstreflexion
Sachverhalten,	<i>organisieren</i>	<i>argumentieren</i>	Lernfreude und
Argumenten, ...	<i>recherchieren</i>	<i>diskutieren</i>	–bereitschaft
Erkennen von	<i>entscheiden</i>	<i>moderieren</i>	Selbstdisziplin
Beziehungen,	<i>gestalten</i>	<i>präsentieren</i>	Belastbarkeit
Zusammenhängen, ...	<i>ordnen</i>	<i>kooperieren</i>	Werthaltungen
(Be-)Urteilen von	<i>kontrollieren</i>	<i>helfen</i>	Kritikfähigkeit
Aussagen,	...	<i>integrieren ...</i>	...
Lösungswegen, ...			

(„Nachhaltigkeit“). Kompetenzen sollen sich auf die Kernbereiche des jeweiligen Faches beschränken („Beschränkung“) und müssen folglich unter der Fragestellung ausgewählt werden, welches Können grundlegend für den Aufbau weiteren Wissens bzw. weiterer Fähigkeiten des Faches ist („Nützlichkeit“) (vgl. [106], S. 67 f.). Mit der Konzentration auf die Kernbereiche und die stärkere Allgemeinheit wird eine größere Freiheit bei der konkreten Umsetzung eingeräumt, die über die Lehrpläne der einzelnen Bundesländer an die Schulen weitergegeben wird. Neben der Auswahl der konkreten Lerninhalte betrifft diese Freiheit auch deren Abfolge im Unterricht, da die Kompetenzen jeweils für relativ große Zeitabschnitte formuliert sind – in den nationalen Bildungsstandards für das Ende der Jahrgangsstufe 4, in den Lehrplänen der einzelnen Bundesländer in der Regel für das Ende der Doppeljahrgangsstufen 1/2 (in NRW als „Schuleingangsphase“ bezeichnet) und 3/4. Dass diese größere Freiheit und Flexibilität aber keineswegs mit Beliebigkeit verwechselt werden darf, ist an der zeitgleichen Einführung zentraler Leistungsüberprüfungen und Vergleichsarbeiten erkennbar. So schreiben Grundschüler seitdem im dritten Schuljahr zentral gestellte Vergleichsarbeiten in den Fächern Deutsch und Mathematik, bekannt als VERA.

Von besonderer Bedeutung für den Unterricht bei der „kompetenzorientierten“ Unterrichtskultur ist die Unterscheidung zwischen inhaltsbezogenen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen. Dabei entsprechen die inhaltsbezogenen Kompetenzen weitgehend den Inhalten alter Lehrpläne, die sich nach wie vor auf bestimmte mathematische Inhalte beziehen: z. B. auf Kopfrechnen, halbschriftliche und schriftliche Rechenverfahren, auf räumliche Beziehungen, auf ebene und räumliche Figuren, auf verschiedene Größenbereiche, auf Daten aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen, auf Muster usw. Im Unterschied zu den älteren Lehrplänen sind diese jetzt allerdings nur noch auf das Wesentliche – also einen Kern – reduziert, wobei jedoch durchaus Unterschiede zwischen den einzelnen Bundesländern festzustellen sind (vgl. hierzu Abschn. 3.1). Ein weiterer Unterschied betrifft die Gliederung dieser Kompetenzen, die in den Bildungsstandards nicht

mehr nach den typischen Themengebieten (Arithmetik, Geometrie, Sachrechnen), sondern nach sogenannten Leitideen erfolgt. Folgende fünf Leitideen werden dabei als zentral angesehen und bilden in den Bildungsstandards somit die Oberkategorien:

- Zahlen und Operationen
- Raum und Form
- Muster und Strukturen
- Größen und Messen
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Diese veränderte Kategorisierung ist sicher auch vor dem Hintergrund erfolgt, einen Wandel bei der Unterrichtskultur signalisieren zu wollen. Sie spiegelt sich auch in den neueren Lehrplänen der einzelnen Bundesländer wider, wobei es jedoch meist keine völlige Übereinstimmung gibt. Besonders im Bereich „Muster und Strukturen“ sind Abweichungen feststellbar, weil dieser Bereich übergreifend zu sehen ist und es somit Überschneidungen mit allen anderen Bereichen gibt, insbesondere mit dem Bereich „Zahlen und Operationen“ (z. B. bei Zahlenfolgen) und dem Bereich „Raum und Form“ (z. B. in geometrischen Mustern). Für die Praxis spielt die unterschiedliche Kategorisierung dieser Kompetenzen freilich kaum eine Rolle, während Veränderungen bei den *Lerninhalten* selbstverständlich Auswirkungen haben. So werden durch die stärkere Allgemeinheit bestehende Lerninhalte zwar einerseits reduziert, andererseits stellt man hier jedoch eine Akzentverschiebung bei den Kompetenzen fest: Begriffe wie „verstehen“, „erkennen“, „untersuchen“, „selbst entwickeln“, „beschreiben“, „fortsetzen“ „prüfen“ treten nunmehr verstärkt auf, während Begriffe wie „lösen“ und „kennen“ zurückgehen. Der intendierte Übergang von einer stark algorithmisch geprägten Fertigkeitenorientierung hin zu mehr Problem- und Anwendungsorientierung wird hier sehr deutlich. Abgesehen davon treten aber auch neue Lerninhalte hinzu, die zuvor nicht verbindlich waren, nämlich insbesondere kombinatorische Aufgabenstellungen und der Bereich Wahrscheinlichkeit. Dies ist insofern nicht ganz unproblematisch, als diese Inhalte bis dato auch in der Lehrerbildung (sowie teilweise auch in der eigenen Schulzeit) gefehlt und somit häufiger zu Unsicherheiten auf Lehrerseite geführt haben.

Noch weiter reichende Veränderungen für die Unterrichtspraxis haben jedoch die sogenannten *allgemeinen* oder *prozessbezogenen* mathematischen Kompetenzen mit sich gebracht, die – wie der Name schon sagt – allgemeinerer Natur sind: Sehr allgemein gehaltene Formulierungen wie „Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf andere Sachverhalte übertragen“ (Problemlösen), „Aufgaben gemeinsam bearbeiten und dabei Verabredungen treffen und einhalten“ (Kommunizieren) oder „mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen“ (Argumentieren) ([218], S. 7 f.) machen deutlich, dass sich diese Kompetenzen auf viele – teilweise sogar alle – konkreten Inhalte aus allen fünf Bereichen beziehen lassen. Diese Kompetenzen lassen sich in der mathematikdidaktischen Literatur auch unter dem Begriff „allgemeine Lernziele“ wiederfinden, wobei je nach Autor jedoch zum Teil ganz verschiedene Qualifikationen unter diesen Oberbegriff gefasst werden (vgl.

[105], S. 87). Die Bildungsstandards unterscheiden zwischen fünf Kompetenzbereichen, die sie für den Mathematikunterricht der Grundschule als zentral erachten:

- Problemlösen
- Argumentieren
- Kommunizieren
- Modellieren
- Darstellen

Die Lehrpläne der verschiedenen Bundesländer folgen mit einzelnen kleinen Abweichungen im Wesentlichen dieser Kategorisierung. So wird z. B. im niedersächsischen Kerncurriculum ([220], S. 13) der Bereich Kommunizieren als gemeinsame Einheit mit dem Argumentieren gesehen, während er im Lehrplan NRW ([222], S. 57) dem Darstellen – als einer verbalen Darstellungsform – zugerechnet wird. Darüber hinaus wird in diesem Lehrplan „kreativ sein“ als zusätzliche Kompetenz formuliert, die hier den Bereich „Problemlösen“ erweitert. Das hessische Kerncurriculum ([219], S. 12) übernimmt schließlich schon für die Grundschule zusätzlich einen Kompetenzbereich, der in den Bildungsstandards erst ab der Sekundarstufe formuliert wird, nämlich das „Umgehen mit symbolischen, formalen und technischen Elementen“.

Zwar haben diese allgemeinen oder prozessbezogenen Kompetenzen implizit schon immer eine mehr oder weniger große Rolle im Unterricht gespielt, der entscheidende Unterschied liegt jedoch darin, dass diese seitdem nicht nur explizit ausgewiesen werden, sondern darüber hinaus in den Vordergrund gerückt worden sind. Besonders deutlich wird dies im hessischen Kerncurriculum ([219]), in welchem die allgemeinen Kompetenzen – dort als „Bildungsstandards“(!) bezeichnet – wesentlich mehr Raum einnehmen und (wenngleich immer noch knapp) ausführlicher formuliert werden als die inhaltsbezogenen Kompetenzen. Dies hängt vermutlich auch damit zusammen, dass selbst einige Jahre nach Einführung der Bildungsstandards Einschätzungen zufolge den Inhalten (insbesondere dem „Rechnen“) noch immer mehr Bedeutung beigemessen wird als der Entwicklung allgemeiner mathematischer Kompetenzen (vgl. [126], S. 24). Betont sei allerdings, dass es hierbei nicht um ein „Entweder-oder“, sondern um ein integratives Verständnis von inhaltsbezogenen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen geht. Sie stehen in einem dialektischen Verhältnis zueinander, weil einerseits allgemeine mathematische Kompetenzen nur an konkreten Inhalten und andererseits Inhalte nur mithilfe allgemeiner Kompetenzen erworben und weiterentwickelt werden können. In diesem Sinne wird auch in den KMK-Bildungsstandards ([218], S. 6) betont, dass diese untrennbar aufeinander bezogen sind, wobei die allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch ihre größere Allgemeinheit quasi als Rahmen für die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen betrachtet und entsprechend dargestellt werden (vgl. Abb. 2.1).

Eine stärkere Betonung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen hat zur Folge, dass diese bei der Unterrichtsplanung nunmehr stärker berücksichtigt werden (sollen). Langfristig wird aber eine noch stärkere Umorientierung angestrebt, bei der die all-

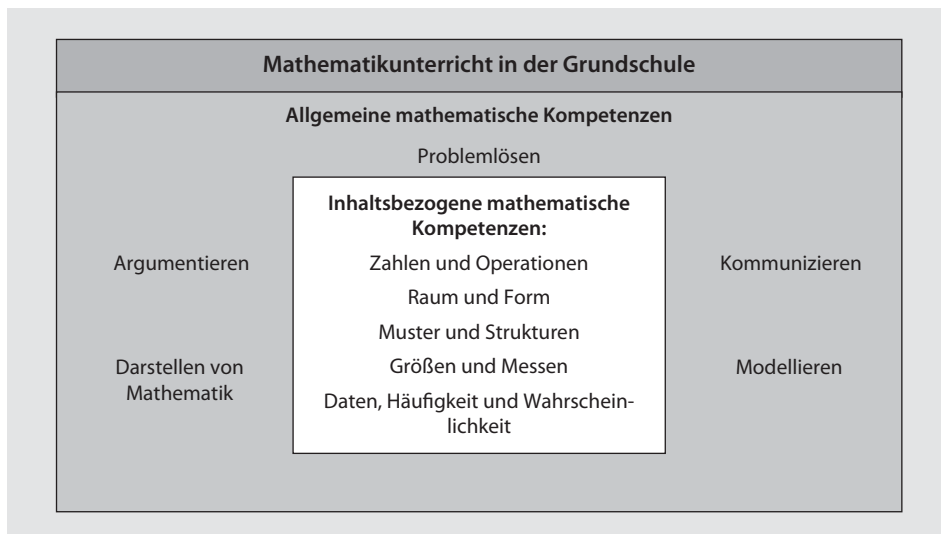


Abb. 2.1 Allgemeine und inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen

gemeinen mathematischen Kompetenzen – und nicht wie gewohnt die inhaltsbezogenen Kompetenzen – zum Ausgangspunkt der Unterrichtsplanung und -gestaltung werden sollen. Bei der Unterrichtsplanung lautet die Frage dann nicht mehr: „Welche allgemeinen Kompetenzen kann ich mit einem bestimmten Inhalt fördern?“, sondern umgekehrt: „An welchen Inhalten können bestimmte allgemeine Kompetenzen erworben werden?“ Lehrer haben demzufolge die Aufgabe, geeignete Inhalte zu den angestrebten Kompetenzen zu finden. Das Ausgehen von den allgemeinen Kompetenzen erfordert allerdings ein starkes Umdenken. Es ist auch insofern anspruchsvoller zu realisieren, als man stets darauf achten muss, dass die inhaltlichen Voraussetzungen für die geplante Erarbeitung gegeben sind, also Inhalte weiterhin spiralförmig aufeinander aufbauen. Damit die gewünschte Umorientierung im Unterricht spürbar wird, sind aus unserer Sicht daher neue Konzepte für das ganze Curriculum erforderlich; ein einzelner Lehrer kann dies hingegen kaum leisten.

Wie bereits erwähnt, zielt ein zeitgemäßer (Mathematik-)Unterricht schließlich nicht nur auf das Inhaltlich-Fachliche ab. Besonders vor dem Hintergrund veränderter gesellschaftlicher Anforderungen, in denen es weniger auf die Beherrschung von Routinen als vielmehr auf allgemeine Problemlösefähigkeit ankommt, besteht eine wichtige Aufgabe der Schule in der Förderung übergreifender Qualifikationen, die sich auf das selbstständige Arbeiten und Lernen beziehen. Die Übersicht (Tab. 2.1) folgt der Kategorisierung von Klippert ([96], S. 57) und unterscheidet vor diesem Hintergrund zwischen vier verschiedenen Lernbereichen, nämlich neben dem inhaltlich-fachlichen zwischen dem methodisch-strategischen, dem sozial-kommunikativen und dem personal-affektiven Lernbereich. Es werden exemplarisch zentrale Kompetenzen der einzelnen Bereiche aufgelistet, ohne dass

diese Liste erschöpfend gemeint ist. Bezüglich dieser Lernbereiche steht der Mathematikunterricht genauso in der Pflicht wie jeder andere Fachunterricht, weshalb es sehr begrüßenswert wäre, wenn sie in Unterrichtsbesuchen mit zum Tragen kämen. So gilt auch der Aufbau einer positiven Einstellung zwar grundsätzlich für jedes Unterrichtsfach, besitzt angesichts der ablehnenden Einstellung vieler Erwachsener zur Mathematik, die nach Selzer ([237]) zu einem beträchtlichen Teil Versäumnissen des selbst erlebten, herkömmlichen Mathematikunterrichts anzulasten ist, speziell für diesen aber eine besondere Relevanz. Eine positive Einstellung zur Mathematik äußert sich laut den Bildungsstandards in der Freude an der Mathematik sowie der Entdeckerhaltung der Schüler (vgl. [218], S. 6), sodass das Bestreben nach möglichst viel Selbstständigkeit und Eigenaktivität auch als förderlich für diese allgemeine Zielsetzung des Mathematikunterrichts angesehen wird. Der nordrhein-westfälische Lehrplan ([222], S. 55 f.) spricht in diesem Zusammenhang von Selbstvertrauen, Interesse und Neugier, Motivation und Ausdauer, einem konstruktiven Umgang mit Fehlern und Schwierigkeiten (s. o.) sowie von Einsicht in den Nutzen des Gelernten.

2.2 Grundprinzipien eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts

„Auftrag der Grundschule ist die Entfaltung grundlegender Bildung.“ Mit diesem Satz beginnen die Bildungsstandards ([218], S. 6) und heben damit den Bildungsauftrag als übergeordnetes Ziel jedes Unterrichts hervor. Im Grunde stellen alle Unterrichtsprinzipien (empirisch gesicherte) Konkretisierungen dar, durch welche sich dieses Ziel bestmöglich erreichen lässt. Nachfolgend werden die Prinzipien dargestellt, die in den Bildungsstandards sowie den Lehrplänen aufgegriffen werden und als zentral für den kompetenzorientierten Mathematikunterricht (im Allgemeinen aber auch für jedes andere Unterrichtsfach) angesehen werden können. Unterricht ist jedoch zu vielfältig und zu komplex, um alle Prinzipien zur gleichen Zeit erfüllen zu können, zumal sie einander teilweise entgegenstehen oder gar ausschließen und man daher verschiedene Vorgehensweisen unterschiedlich begründen kann. So mag beispielsweise eine Stufung der Unterrichtsinhalte vom Leichten zum Schweren im Allgemeinen ein sinnvolles Vorgehen sein, aber nicht unbedingt für sehr leistungsstarke Schüler oder wenn im Unterricht das Problemlösen (vgl. Abschn. 3.2.1) vordergründig gefördert werden soll. Insofern ist die folgende Darstellung lediglich als Orientierungs- bzw. Entscheidungshilfe für eine situationsangemessene Auswahl von Inhalten und die spezifische Gestaltung des Unterrichts zu verstehen. Wir beschränken uns außerdem auf die Darstellung von Prinzipien, die für die Planung von Einzelstunden und -sequenzen bedeutsam sind, und verzichten auf solche, die weiter reichende Entscheidungen auf höheren Ebenen betreffen (vgl. Abschn. 4.1.3).

2.2.1 Einsicht statt Routine

Ein zentrales Anliegen des Mathematikunterrichts besteht zunächst im Aufbau eines gesicherten Verständnisses, da ein Lernen ohne das Gewinnen von Einsicht auf Dauer nicht erfolgreich sein kann. Winter (vgl. [205], S. 1) spricht in diesem Fall von „Scheinleistungen“, die jeweils nur zeitlich und inhaltlich lokal funktionieren können, weil ohne Verständnis die benötigten Lösungsverfahren im Fall des Vergessens nicht erneut hergeleitet werden können, keine Transferleistungen auf ähnliche oder gar ungewohnte Sachverhalte möglich sind und ungewohnte Fälle häufiger zu fehlerhaften Vorgehensweisen führen. Letzteres ist bei der schriftlichen Addition und Subtraktion beispielsweise an fehlenden Überträgen in die „leere“ Stelle oder bei der Addition auch an einer fehlenden Ergebnisziffer im Fall von Stellenunterschieden zu beobachten (vgl. [12], S. 229 ff. sowie 256 ff.). Umgekehrt gilt, dass das Vergessen keine Katastrophe darstellt, wenn Wissen auf Verständnis aufbaut, da es rekonstruiert und damit wieder ins Gedächtnis zurückgerufen werden kann. Auch ungewohnte Fälle wie im genannten Beispiel stellen diese Schüler vor keine Probleme, da hier der Sinn der stellengerechten Anordnung bzw. des Übertrages in die leere Stelle erfasst wird. Von besonderer Bedeutung ist ein echtes Verstehen darüber hinaus für die Bearbeitung von Aufgaben aus höheren Anforderungsbereichen wie z. B. Lückenaufgaben oder die Übertragung auf mehrere Summanden bzw. Subtrahenden.

Dementsprechend herrscht heute Konsens darüber, dass es im Mathematikunterricht der Grundschule um weit mehr geht als um das Rechnenlernen. Um jedoch keine Missverständnisse aufkommen zu lassen: Dem schnellen und sicheren Rechnen kommt insbesondere im Grundschulbereich nach wie vor eine hohe Priorität zu; aber nicht das unverstandene Auswendiglernen sollte die Basis für Rechenfertigkeiten sein, sondern inhaltliche Vorstellungen und ein tief greifendes Verständnis von Zahlbeziehungen und Rechenergebnissen (vgl. [61], S. 19). Es geht im Unterricht folglich nicht um das Auswendiglernen von (Routine-)Verfahren, um diese möglichst schnell anwenden zu können, sondern es muss die notwendige Zeit aufgebracht werden, die für ein fundiertes konzeptuelles Verständnis erforderlich ist. Dieses Verständnis geht weit über das Kennen und Wiedererkennen hinaus. Es reicht also nicht aus, einfach die Verfahrensschritte eines Rechenverfahrens wie z. B. der schriftlichen Addition zu „kennen“, selbst wenn man sie sicher ausführen kann. Echtes Verständnis liegt erst dann vor, wenn man die Schreibweise und die einzelnen Schritte darüber hinaus auch erklären und begründen kann. Dazu gehört es, die einzelnen Stellenwerte in den Zahlen zu identifizieren, die stellengerechte Notation zu begründen und die Übertragsziffern erklären zu können. Wer dies nicht kann, wird Probleme bei der Bearbeitung von Aufgaben aus höheren Anforderungsbereichen haben, für die ein solches Verständnis für den Lösungsprozess wichtig ist.

Der Aufbau von tragfähigen Grundvorstellungen ist für das Erlangen von Verständnis von zentraler Bedeutung. Für ein Operationsverständnis der Subtraktion ist beispielsweise die Vorstellung des Wegnehmens wesentlich, aber auch die Differenzbildung ist wichtig, insbesondere wenn man die schriftliche Subtraktion über die Erweiterungstechnik einführt. Ganz entscheidend sowohl für das mündliche als auch das halbschriftliche und

schriftliche Rechnen ist darüber hinaus das Verständnis für unser Stellenwertsystem, also das Prinzip der Zehnerbündelung. Des Weiteren hängt der Aufbau von Verständnis stark davon ab, inwieweit es gelingt, sinnstiftende Verbindungen mit bereits erworbenem Wissen herzustellen, das Neue also mit Bekanntem zu vernetzen.

In diesem Zusammenhang spielt auch die mathematische Begriffsbildung eine wichtige Rolle, weil Begriffe die Bausteine der Mathematik bilden, d. h. *das* Fundament darstellen. Aus diesem Grund ist ihre sorgfältige Einführung besonders wichtig, um typischen Fehlvorstellungen entgegenzuwirken und tragfähige Grundvorstellungen aufzubauen. Wenngleich dies für die Sekundarstufenmathematik sicher eine größere Relevanz besitzt, werden erste Begriffe auch schon in der Grundschule eingeführt. Hier ist besonders auf eine klare Abgrenzung zwischen umgangssprachlicher und fachsprachlicher Bedeutung zu achten, da viele Begriffe auch in der Umgangssprache verwendet werden. Ansonsten besteht die Gefahr von Missverständnissen und Lernschwierigkeiten, wenn Begriffe von Schülern im Alltag anders (z. B. „Zehner“ für ein 10-Cent-Stück oder einen 10-Euro-Schein) oder nur eingeschränkt (z. B. „Viereck“ nur für Quadrate und Rechtecke) verwendet werden. Zu einem umfassenden *Begriffsverständnis* gehört es, dass man die charakterisierenden Merkmale kennt und begründen kann, weshalb es sich um ein Beispiel für den Begriff handelt, sowie auch umgekehrt, weshalb etwas nicht unter diesen Begriff fällt. Die sachrichtige Verwendung von Begriffen ist mit der Verstärkung der prozessbezogenen Kompetenzen im Unterricht noch wichtiger geworden, da sie beim Austausch mit anderen Schülern (Argumentieren und Kommunizieren) für die Verständigung entscheidend ist.

Die Forderung nach (mehr) Einsicht und Verständnis ist besonders auch durch den gesellschaftlichen Wandel bedingt. Schule soll auf das praktische Leben – und damit insbesondere auch auf das Berufsleben – vorbereiten und muss sich an die dort gestellten Anforderungen anpassen. In der heutigen, stark technisierten Gesellschaft gehören Taschenrechner und Computer mittlerweile zur Standardausstattung und beherrschen – mit entsprechender Software ausgestattet – weit mehr als nur die vier Grundrechenarten. Im heutigen Mathematikunterricht kann es daher nicht mehr um das Lösen von Routineaufgaben gehen, da gerade dies an den Taschenrechner oder Computer abgegeben werden kann (und wird!). Wichtig bleibt jedoch, dass die Schüler auch in Zukunft wissen, was sich hinter den Tasten verbirgt, d. h. verstehen, wie der Taschenrechner oder Computer arbeitet (vgl. [82], S. 5). Hierbei geht es auch um Überprüfbarkeit, damit die Schüler den Taschenrechner-Ergebnissen nicht blind vertrauen, was angesichts von Tippfehlern wichtig ist (hierbei ist besonders auch die Inversion bei Zehnern und Einern zu beachten: Bei *fünfundvierzig* spricht man zuerst *fünf* und dann *vierzig*, muss aber am Taschenrechner umgekehrt erst 4 und dann 5 eintippen). In erster Linie geht es aber um die Entwicklung allgemeiner Problemlösefähigkeit, damit mathematisches Wissen funktional, flexibel und in vielfältigen kontextbezogenen Situationen angewendet werden kann. Denn im Zuge der gesellschaftlichen Entwicklung haben sich die Anforderungen immer weiter in diese Richtung verschoben: Das Finden effizienter Lösungswege in (mathematischen) Problemsituationen spielt eine immer größere Rolle, während das reine Ausführen von Routinen durch den technischen Fortschritt immer weiter verdrängt wird; d. h., der Taschenrechner

nimmt uns zwar die Berechnungen weitgehend ab, nicht aber den Weg bis dorthin. Es liegt auf der Hand, dass die hierfür erforderlichen Kompetenzen kognitiv wesentlich anspruchsvoller sind als die anschließenden Berechnungen. Hierzu ein Beispiel:

Frau Schumann – Reiseverkehrskauffrau – muss die Urlaubskosten nicht selbst ausrechnen; dies übernimmt das Programm. Sie sollte aber verschiedene Optionen und Alternativen abhängig vom Budget anbieten können, also z. B. verschiedene Reisezeiträume oder Flugverbindungen berücksichtigen. Hierzu ist weit mehr erforderlich als das Aufaddieren der Teilkosten, nämlich u. a. die Entnahme wichtiger Informationen aus den Prospekten, das gedankliche Durchspielen verschiedener Alternativen, das Abschätzen und Überschlagen von Einsparungen usw.

Internationale Vergleichsuntersuchungen haben bei deutschen Schülern der Sekundarstufe Defizite gerade im Bereich der allgemeinen Problemlösefähigkeit gezeigt: So wurden bei komplexeren Aufgaben, die der realen Welt entstammen und deren Lösungen inhaltliche Vorstellungen erfordern, große Schwächen deutlich, während die Leistungen bei Routineaufgaben akzeptabel waren (vgl. [35], S. 52). Die KMK-Bildungsstandards reagieren hierauf mit der besagten stärkeren Betonung der allgemeinen Kompetenzen. Spätestens seitdem wurden zahlreiche Aufgaben entwickelt, die Schüler in diesem Bereich fördern und fordern, bzw. wichtiger: Derartige Aufgaben finden seitdem in Schule und Schulbüchern zunehmend Beachtung. Dazu gehören u. a. Aufgabenformate wie Zahlenmauern, Minuszüge, Zahlenfolgen etc., bei denen das Rechnen selbst im Hintergrund und Entdeckungen im Vordergrund stehen. Erwähnenswert sind in diesem Zusammenhang aber auch offene Aufgaben wie z. B.: „Wie viele Autos stehen in einem 3 km langen Stau?“ ([138]) oder: „Wie viele Luftballons passen in den Klassenraum?“, die nach ihrem vermeintlichen Erfinder – dem italienischen Physiker Enrico Fermi – auch als Fermi-Aufgaben bezeichnet werden. Es handelt sich um komplexe Schätzaufgaben, zu denen es kein eindeutiges Ergebnis gibt, sodass der Lösungsprozess eindeutig im Vordergrund steht. Sie sprechen in besonderem Maße den Kompetenzbereich des Modellierens an und werden dort (Abschn. 3.2.1) noch ausführlicher dargestellt.

2.2.2 Aktiv-konstruktiv statt passiv-rezeptiv

Von der Psychologie des Lernens und Denkens haben wir gelernt, dass man (nicht nur) mathematische Einsichten keineswegs wie Steine am Wege findet, die man nur noch nach Hause tragen muss, sondern aus konkreten Erfahrungen aktiv gewinnt, die im Denken nachvollzogen („verinnerlicht“), ausgebaut, verfeinert und mit anderen Einsichten in Verbindung gebracht werden. Lernen besteht nicht darin, dass dem Lernenden etwas Fertiges übergeben oder mitgeteilt wird. Es ist viel[e]mehr ein Prozess, bei dem der Lernende die entscheidende Rolle spielt: Er erfasst und begreift etwas, baut so Einsichten auf, verbindet sie mit anderen, erschließt mit ihrer Hilfe neue Erfahrungen, teilt sie mit, überträgt sie, ruft sie ab. ([56], S. 8)

Floer beschreibt hier sehr anschaulich, dass Wissen nicht ohne Weiteres von einem Menschen auf den anderen übertragen werden und schon gar nicht aufgezwungen werden

Unterrichtsentwürfe Mathematik Primarstufe, Band 2

Heckmann, K.; Padberg, F.

2014, XIII, 355 S. 72 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-39744-8