Natürliche Zahlen

2

Inhaltsverzeichnis

In diesem Kapitel stehen die natürlichen Zahlen im Mittelpunkt. Sie werden vor allem im Hinblick auf das Rechnen betrachtet. Dabei geht es nicht zuletzt darum, sich über eigentlich selbstverständlich scheinende Dinge Gedanken zu machen und sie nicht nur als gegeben hinzunehmen. Es werden dann aber auch Aussagen über natürliche Zahlen bewiesen. Beim ersten Lesen sollte man bis einschließlich Abschn. 2.3, also bis zum Abschnitt über das

K. Reiss und G. Schmieder, *Basiswissen Zahlentheorie*, Mathematik für das Lehramt,
DOI: 10.1007/978-3-642-39773-8_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014

Beweisverfahren der vollständigen Induktion kommen. Der folgende Abschnitt zum binomischen Lehrsatz ist davon eine Anwendung. Der Satz selbst wird allerdings erst in Kapitel 8 benutzt, sodass man mit dem Lesen noch etwas Zeit hat. Der Rest des Kapitels, in dem es darum geht, wie sich die natürlichen Zahlen auf ein tragfähiges Fundament gründen lassen, kann eventuell später gelesen werden.

2.1 Rechnen mit natürlichen Zahlen

> *…an dero Aeltern von uns 3en, 2 Buben und ein Madl, 12345678987654321 Empfehlungen, und an alle gute freunde von mir allein 624, von meinem Vatter 100(0) und von Schwester 150 zusammen 1774 und summa summarum 12345678987656095 Complimente*
>
> Wolfgang Amadé Mozart: „Bäsle“-Brief vom 24. April 1780.

In diesem Abschnitt werden die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, . . . zunächst einmal als gegeben angenommen. Später, nämlich im letzten Abschnitt dieses Kapitels, wird dann behandelt, wie sie sich aus bestimmten Grundannahmen (allerdings nicht aus dem Nichts) herleiten lassen. Auch wenn einige vertraute Regeln in diesem Abschnitt hinterfragt werden, wird bei den Leserinnen und Lesern vorausgesetzt, dass ihnen das Rechnen mit natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen und die Kleinerbeziehung „$\leq$“ oder „$<$“ sowie die Größer-Beziehung „$\geq$“ oder „$>$“ nicht unbekannt sind. Es arbeitet sich manchmal leichter, wenn man bereits weiß, was man will und wohin man möchte. Die üblichen Schreibweisen etwa bei Bruchzahlen und Potenzen sowie Vereinbarungen wie „Punktrechnung geht vor Strichrechnung“ zur Einsparung von Klammern werden wie gewohnt benutzt (und auch in späteren Kapiteln nicht mehr diskutiert).

Anmerkung

Manchmal stellt sich die Frage, ob auch die Null eine natürliche Zahl ist. Die Antwort ist pragmatischer Natur. Man kann die Null problemlos zur Menge $\mathbb{N}$ hinzu nehmen, wenn man es so möchte. Man muss die Null sogar als natürliche Zahl ansehen, wenn man sich nach der Norm DIN 5473 richtet. Allerdings sprechen für die Identifikation der natürlichen Zahlen mit den Zählzahlen 1, 2, 3, . . . sowohl historische als auch praktische Gründe. Das gilt ganz besonders im Rahmen der Zahlentheorie. Es ist hier schlicht einfacher, mit der Zahl 1 zu beginnen als die 0 immer wieder als einen Ausnahmefall (etwa beim Rechnen) auszuschließen.

2.1.1 Addition und Subtraktion

Das Rechnen mit natürlichen Zahlen geht auf das Zählen zurück. Die *Addition* der Zahlen n und m dient der Vorhersage, wie viele Objekte (egal, ob es Menschen, Tiere, Bäume, Häuser oder was auch immer sind) man bekommt, wenn n Objekte mit m anderen Objekten zusammengebracht werden. Aus dieser Vorstellung heraus ist dann auch gleich klar, dass etwa $n + m = m + n$ gilt. Die *Subtraktion* natürlicher Zahlen n, m lässt sich so erklären, dass die Aussage $k = n - m$ gleichbedeutend (und das heißt äquivalent) sein soll mit $n = k + m$. Wenn man den Bereich der natürlichen Zahlen nicht verlassen will, so ist $n - m$ offenbar nicht für jedes Paar n, m definiert, denn zum Beispiel $3 - 5 = -2$ ist keine natürliche Zahl. Hierin liegt gleichzeitig die Motivation zur Erweiterung der natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen (und diese Erweiterung wird in Kapitel 6 behandelt).

Anordnung

Sind n, m natürliche Zahlen, so heißt m *kleiner* als n, falls eine natürliche Zahl k mit $n = k + m$ existiert. Man schreibt kurz $m < n$ oder auch $n > m$. Vom Aspekt des Zählens aus betrachtet heißt $m < n$ einfach, dass n in der Abzählreihenfolge nach m kommt. Die Aussage „es ist $m < n$ oder $m = n$“ wird kurz geschrieben als $m \leq n$ oder auch als $n \geq m$.

2.1.2 Das Prinzip des kleinsten Elements

Auf einem Zettel stehen einige (endlich viele) natürliche Zahlen, zum Beispiel 1012, 74, 237, 158, 23 und 67355. Es ist nicht schwer zu sehen, dass eine davon die kleinste Zahl ist, nämlich im Beispiel die Zahl 23. Ist diese Aussage aber wirklich so selbstverständlich, oder müsste sie eigentlich bewiesen werden (und wenn ja, wie)? Nun, in einem so konkreten Beispiel wie diesem lässt sich die Aussage natürlich leicht nachprüfen. Aber gilt sie wirklich immer und für alle denkbaren Beispiele? Gilt sie (was wiederum plausibel erscheint) auch für eine nicht endliche Auswahl natürlicher Zahlen?

Die zweite Frage wäre für rationale Zahlen zu verneinen. So gibt es unter allen positiven rationalen Zahlen keine kleinste Zahl, denn mit jeder rationalen Zahl $r > 0$ ist auch $\frac{r}{2}$ (oder auch $\frac{r}{3}$ oder $\frac{r}{99}$ oder $\frac{4r}{5}$) eine positive rationale Zahl, die aber kleiner als r ist. Die Null wäre zwar eine geeignete kleinste Zahl, aber sie ist eben nicht positiv. Auch die Gesamtheit der positiven rationalen Zahlen, deren Quadrat größer als 2 ist, hat kein kleinstes Element. Es ist etwa 2 eine Zahl mit dieser Eigenschaft, denn $2^2 = 4 > 2$. Genauso rechnet man $1,6^2 = 2,56 > 2$ und $1,5^2 = 2,25 > 2$ und $1,42^2 = 2,0164 > 2$ und $1,415^2 = 2,002225 > 2$. Weil die Quadratwurzel aus 2 aber nicht rational ist, kann man keine kleinste rationale Zahl mit der Eigenschaft finden (sollte diese Tatsache aus der Schule nicht mehr in Erinnerung sein, so kann der klassische Beweis auf Seite 276 nachgelesen werden; er ist übrigens einfacher als die hohe Seitenzahl suggerieren mag).

Was kann nun aber als Begründung dafür angeführt werden, dass bei Auswahl natürlicher Zahlen die Suche nach einem kleinsten Element in jedem Fall erfolgreich sein wird, sich bei rationalen jedoch nicht immer eine solche Zahl findet? Gerade bei Aussagen solcher Art erschwert einem manchmal das Gefühl der Vertrautheit mit diesen Dingen ein wirklich stichhaltiges Argument zu finden, ja sogar, das Problem wahrzunehmen. Manchem geht es da nicht anders als Lukas, dessen Meinung zu solchen Beweisen man auf Seite 10 nachlesen kann.

Im oben gegebenen Beispiel kann man natürlich die Zahlen nacheinander durchgehen und so die kleinste finden. Das funktioniert aber nur, wenn dieses Vergleichsverfahren zu einem Ende kommt (wie hier nach sechs Schritten), was nicht immer der Fall sein muss. Im Folgenden soll daher die Grundidee präzisiert und verallgemeinert werden.

▶ **Definition 2.1.1** Eine Teilmenge M von $\mathbb{N}$ heißt *endlich*, falls eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $m \leq n$ für alle Elemente $m \in M$.

Man mag sich fragen, ob es nicht eine weniger komplizierte Formulierung auch tun würde. Kann man nicht einfach sagen, dass eine Teilmenge M natürlicher Zahlen endlich ist, wenn $|M| = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt? Wie so oft, steckt auch hier der Teufel im Detail, und dieses Detail ist die leere Menge mit der Mächtigkeit 0. Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge, sie soll als endlich gewertet werden, aber ihre Mächtigkeit ist eben keine natürliche Zahl.

In jeder nicht leeren Teilmenge der natürlichen Zahlen gilt das *Prinzip des kleinsten Elements*, das im folgenden Text immer wieder eine grundlegende Rolle spielt. Auch der Begriff des kleinsten Elements soll der Vollständigkeit halber präzise definiert werden.

▶ **Definition 2.1.2** Sei M eine Menge natürlicher Zahlen. Dann heißt $m_0 \in M$ ein *kleinstes* Element von M, falls $m_0 \leq m$ für alle $m \in M$ ist.

In der ersten Formulierung soll das Prinzip nun für endliche Teilmengen von $\mathbb{N}$ behandelt werden. Die Erweiterung wird sich dann als ganz einfach herausstellen. Es gibt einmal wieder einen langen Beweis für eine eher selbstverständliche Aussage. Dieser Beweis zeigt dann allerdings auch auf, wie man das kleinste Element bestimmen kann. Diese Methode ist für die Arbeit mit dem Computer (und damit zum Beispiel für den Computereinsatz im Unterricht) geeignet.

▶ **Satz 2.1.1** Jede nicht leere, endliche Teilmenge M von $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.

▶ **Beweisidee 2.1.1** Um die grundlegende Idee zu verstehen, sollte man sich die Zahlen aufgeschrieben auf einzelnen Zetteln denken. Alle diese Zettel liegen übereinander, daneben steht ein leerer Schuhkarton. Die Zettel haben die Namen $m_1, m_2, \ldots, m_k$, der Schuhkarton bekommt den Namen m_0. Nun nimmt man den ersten Zettel vom Stapel und legt ihn in den Schuhkarton. Dann nimmt man den zweiten Zettel und vergleicht ihn mit dem Zettel im Schuhkarton. Steht auf dem neuen Zettel eine kleinere Zahl, so kommt der neue Zettel in den Karton. Ist die neue Zahl entweder größer oder gleich der alten Zahl, so bleibt der alte Zettel im Karton. Wenn man das Verfahren nacheinander auf alle Zettel des Stapels anwendet, dann hat man zum Schluss den Zettel (oder zumindest einen der Zettel) mit der kleinsten Zahl im Schuhkarton.

▶ **Beweis 2.1.1** Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Dann gibt es nur endlich viele natürliche Zahlen, die kleiner oder gleich n sind. (Diese Aussage wird hier als evident behandelt wie auch der in ihr enthaltene Begriff „endlich viele". Im Abschn. 2.6.2 über die Peano-Axiome wird das Problem noch einmal aufgegriffen.) Sei M eine nicht leere, endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$. Dann lässt sich M in der Form

$$M = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$$

schreiben. Nun geht man folgendermaßen vor (und dieses Verfahren ließe sich genau so auf dem Computer programmieren, wenn die Anzahl k der Elemente nicht die Möglichkeiten des Computers übersteigt):

Es sei zunächst $m_0 := m_1$ gesetzt. Dabei ist m_0 einfach ein neuer Name für eine Variable, und dieser Variablen wird der Wert von m_1 zugeordnet. Für $j = 2, \ldots, k$ wird nun der Reihe nach abgefragt, ob $m_j < m_0$ ist oder nicht. Ist die Antwort „ja", so wird $m_0 := m_j$ mit diesem j neu gesetzt (das Zeichen $:=$ bedeutet „definitionsgemäß gleich"; was links steht, wird definiert durch die rechte Seite). Man wiederholt die Prozedur bis $j = k$ einschließlich. Das dann erhaltene m_0 ist nach Konstruktion das kleinste Element (das so genannte Minimum) in M. □

Das Zeichen „□" steht übrigens hier und im ganzen folgenden Text immer für das Ende eines Beweises. Es ist als eine kleine Orientierungshilfe gedacht, die wohl gerade zu Beginn nützlich sein kann.

Wie der nächste Satz zeigen wird, kann die in Satz 2.1.1 verwendete Voraussetzung der Endlichkeit von M auch fallen gelassen werden. Es wird bewiesen, dass *jede* nicht leere Teilmenge der natürlichen Zahlen ein kleinstes Element besitzt (und intuitiv ist das ja durchaus klar). Dieses *Prinzip des kleinsten Elements* wird im ganzen Buch immer wieder verwendet.

▶ **Satz 2.1.2** Prinzip des kleinsten Elements
Jede nicht leere Teilmenge N von $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.

▶ **Beweisidee 2.1.2** Man wählt sich eine beliebige natürliche Zahl in der nicht endlichen Menge N. Dann kann man N so in zwei Mengen N_1 und N_2 zerlegen, dass alle Elemente in N_1 kleiner oder gleich n sind und alle Elemente in N_2 größer als n sind. Nun kann man ausnutzen, dass N_1 als endliche Menge natürlicher Zahlen ein kleinstes Element hat und die Elemente in N_2 nach Wahl dieser Menge ohnehin alle viel zu groß sind.

▶ **Beweis 2.1.2** Sei eine nicht endliche Teilmenge N von $\mathbb{N}$ gegeben. Dann wählt man ein $n \in N$ und betrachtet die Menge $N_1 := \{m \in N | m \leq n\}$, die eine nicht leere, endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist. Nach dem obigen Ergebnis besitzt N_1 ein kleinstes Element m_0. Setzt man $N_2 := \{m \in N | m > n\}$, so gilt offensichtlich $N = N_1 \cup N_2$ sowie $m_0 \leq n$. Damit folgt $m_0 < m$ für alle $m \in N_2$, und somit ist m_0 kleinstes Element auch von N. □

Man beachte, dass kein Computer in der Lage ist, mit unendlich vielen Zahlen umzugehen. Selbst bei endlichen Mengen kann das Auffinden einer kleinsten Zahl mühsam sein, wenn sehr viele Zahlen gegeben sind und nicht zufällig nach ein paar Schritten die 1 darunter gefunden wird (die dann ja nicht mehr zu unterbieten ist). Wenn man es genau nimmt, dann ist auch die Kapazität der leistungsstärksten Rechner erstaunlich begrenzt. Es sind eher pfiffige Ideen in Programmen, die den Umgang mit sehr großen Zahlen möglich machen.

2.1.3 Multiplikation und Teilbarkeit

Die Multiplikation natürlicher Zahlen lässt sich als mehrfach hintereinander ausgeführte Addition denken, und so wird diese Rechenoperation vor langer Zeit wohl einmal als praktische Abkürzung entstanden sein:

$$m \cdot n = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{m\text{-mal}}.$$

So selbstverständlich diese Definition erscheint, sie wirft sofort eine gar nicht so leichte Frage auf: Warum ist $13 \cdot 7$ dasselbe wie $7 \cdot 13$? Oder allgemein, warum ist

$$m \cdot n = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{m\text{-mal}} = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n\text{-mal}} = n \cdot m?$$

Um die Frage zu beantworten, hilft ein kleiner Trick weiter. Es ist nämlich von Vorteil, sich die natürlichen Zahlen m und n als Rasterpunkte eines zweidimensionalen Gitters vorzustellen.

$$m \text{ Zeilen} \left\{ \underbrace{\begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \end{array}}_{n \text{ Spalten}} \right.$$

Die Gesamtzahl der Punkte ist nun offenbar unabhängig davon, ob zuerst die Anzahl n der Punkte in den einzelnen Zeilen bestimmt und dann das Ergebnis so oft wiederholt addiert wird, wie es die m Zeilen vorgeben, oder ob umgekehrt zuerst die Anzahl m der Punkte in den einzelnen Spalten bestimmt und dann das Ergebnis so oft wiederholt addiert wird, wie es Spalten gibt, also n-mal. Damit gilt das *Kommutativgesetz*

$$m \cdot n = n \cdot m$$

für alle natürlichen Zahlen m und n. Selbstverständlich kann diese anschauliche Betrachtung nicht den formalen Beweis ersetzen, aber sie kann sicherlich zum Verständnis beitragen. Ein formaler Beweis wird auf Seite 35 geführt.

Die anschauliche Methode soll auch noch verwendet werden, um das *Distributivgesetz*

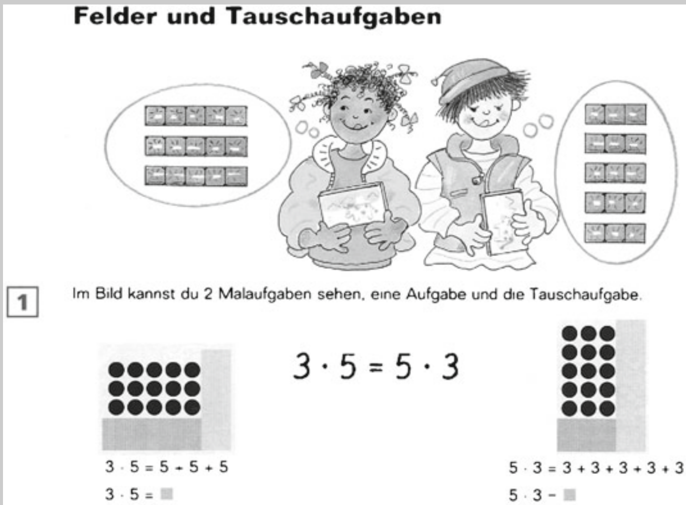
$$k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$$

einzusehen. Es gilt für alle natürlichen Zahlen k, m und n.

$$k \text{ Zeilen} \left\{ \underbrace{\begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{array}}_{m \text{ Spalten}} \begin{array}{c} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \\ \cdots \\ \cdots \end{array} \underbrace{\begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{array}}_{n \text{ Spalten}} \right.$$

Kommutativität im Mathematikunterricht der Grundschule

Die Abbildung zeigt, wie das Kommutativgesetz der Multiplikation natürlicher Zahlen in einem Schulbuch für die Grundschule veranschaulicht wird (Mathebaum 2, [10]). Man sieht, dass die oben beschriebene Methode zur Erklärung der Kommutativität durchaus geeignet ist, auch jüngeren Kindern eine Vorstellung davon zu vermitteln (und natürlich ist bei so kleinen konkreten Zahlen alles ganz einfach und das Bild schon der Beweis).



Wie die Subtraktion, so ist auch die Division im Bereich der natürlichen Zahlen nicht in jedem Fall ausführbar, denn $2 : 3 = \frac{2}{3}$ ist zum Beispiel keine natürliche Zahl. Der „Quotient" $n : m$ ist in der Menge der natürlichen Zahlen also nicht immer sinnvoll definiert, weshalb diese Schreibweise hier vorsichtshalber gleich vermieden wird. Ein gewisser Ersatz ist der nun folgende Begriff der Teilbarkeit.

▶ **Definition 2.1.3** Es seien k und n natürliche Zahlen. Dann heißt k ein *Teiler* von n, wenn eine natürliche Zahl m existiert mit $n = k \cdot m$. Gilt $k \neq 1$ und $k \neq n$, so heißt k ein *echter Teiler* von n.

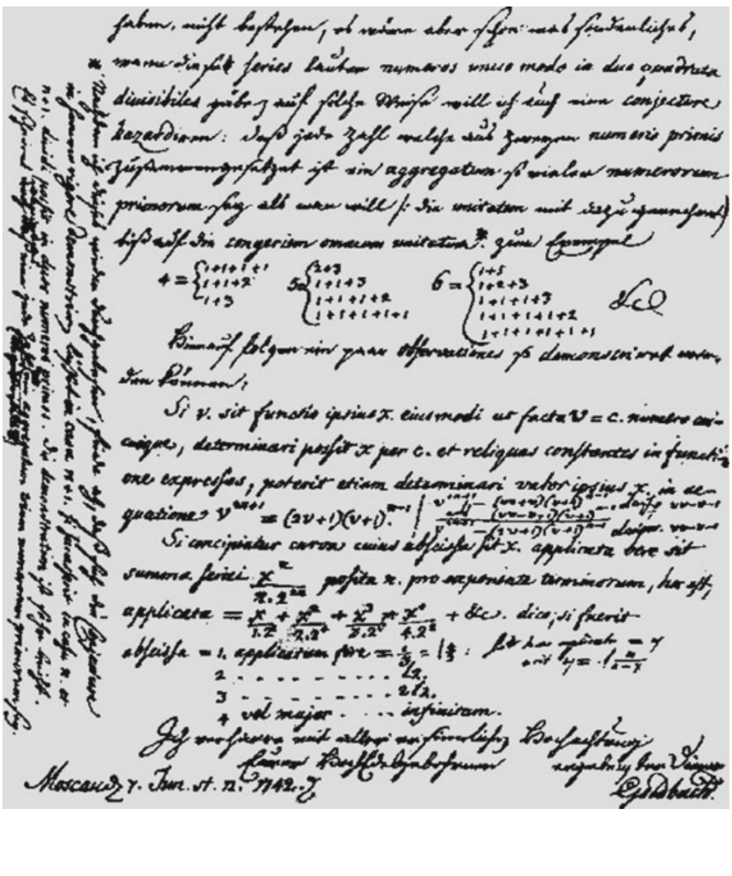
Man interessiert sich im Rahmen der Zahlentheorie oft für diejenigen Zahlen, die ganz wenige Teiler haben, nämlich die so genannten Primzahlen. Die folgende Definition klärt, welche Zahlen das sein sollen.

▶ **Definition 2.1.4** Die natürliche Zahl n heißt *Primzahl*, wenn sie von 1 verschieden ist und keine echten Teiler besitzt.

Primzahlen haben viele spannende Eigenschaften. Sie werden daher in Kapitel 4 und 5 ausführlich betrachtet. Insbesondere wird man sehen, dass Primzahlen als eine Art „Grundbausteine“ der natürlichen Zahlen angesehen werden können, denn jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist, lässt sich als ein Produkt von eindeutig bestimmten Primzahlen schreiben.

2.1.4 Die Goldbach’sche Vermutung

Schon mit den wenigen hier aufgezeigten Begriffen kann man in recht tiefgründige Probleme der Zahlentheorie einsteigen. Es gibt viele alte und trotzdem immer noch offene Fragen, die eines gemeinsam haben: Sie sind ganz leicht zu formulieren, aber schwer zu entscheiden. Ein berühmtes Beispiel ist die *Goldbach’sche Vermutung*, die im 18. Jahrhundert formuliert wurde. Erstmals findet sie sich 1742 in einem Brief, den Christian Goldbach (1690–1764), ein in St. Petersburg lehrender Mathematiker, an Leonhard Euler (1707–1783) geschrieben hat. Euler war Schweizer und lehrte ebenfalls als Mathematiker an der Akademie in St. Petersburg. Die Abbildung auf Seite 27 zeigt diesen Brief.



Die Goldbach'sche Vermutung besagt, dass jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, auf mindestens eine Weise als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden kann. Für die ersten geraden Zahlen, die größer als 2 sind, lässt sich das auch leicht nachprüfen. Es ist $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $10 = 5 + 5 = 7 + 3$, $12 = 7 + 5$, $14 = 7 + 7 = 11 + 3$ usw. Diese Vermutung hat man inzwischen in dem Umfang geprüft, den derzeitige Computer meistern können. Man ist dabei bisher auf kein Gegenbeispiel gestoßen. Doch die Mathematik ist keine empirische Wissenschaft. Noch so viele Beispiele können einen Beweis nicht ersetzen, und dieser Beweis der Goldbach'schen Vermutung steht aus. Es ist bis heute *nicht* bekannt, ob die Behauptung wirklich für alle geraden Zahlen größer als 2 stimmt.

Vielleicht findet man eines Tages eine gerade Zahl, die sich nicht als Summe zweier Primzahlen schreiben lässt. Es könnte aber auch eines Tages bewiesen werden, dass die Frage nicht entscheidbar ist (also weder diese Aussage noch ihr Gegenteil aus den zur Verfügung stehenden Grundlagen folgt), auch wenn dies unwahrscheinlich sein mag. In diesem Fall gibt es naturgemäß weder die Antwort „ja" noch „nein", und das Informationsbedürfnis wäre, wenn vielleicht auch in etwas überraschender Weise, befriedigt.

2.2 Die Idee der unendlichen Mengen

Die ich rief, die Geister, werd ich nun nicht los.

Johann Wolfgang von Goethe:
Der Zauberlehrling

2.2.1 Gibt es unendliche Mengen?

Die Erfahrung zeigt, dass auch in einen eigentlich voll gepackten Koffer immer noch ein Taschentuch hineingeht. Wer diese Aussage allerdings vorbehaltlos akzeptiert, wird schnell Probleme bekommen. Erhebt man nämlich die Alltagserfahrung zum Prinzip, so kann man nicht nur zwei, drei oder vier, sondern auch tausend, zehntausend oder gar eine Million Taschentücher (immer schön nacheinander) in einem vollen Koffer unterbringen. So geht es bestimmt nicht, und das Prinzip ist folglich höchstens dann anwendbar, wenn man es auf eine überschaubare Anzahl von Taschentüchern bezieht. In den praktischen Strategien des täglichen Lebens geht man implizit von einer solchen Annahme aus, und weiß natürlich, dass große Mengen eher mit dem LKW als dem Koffer transportiert werden. Außerdem wird im Alltag weder real noch gedanklich mit unendlichen Mengen hantiert. Das ist in der Mathematik bekanntermaßen anders. Hier arbeitet man mit unendlichen Mengen, doch ist dabei besondere Vorsicht und Sorgfalt nötig. Das gilt auch für den Umgang mit natürlichen Zahlen.

Auch wenn sie oberflächlich gesehen einen harmlosen Eindruck macht, hat die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen wie jede unendliche Menge ihre unheimlichen Seiten. Es fängt schon mit dem Glauben an ihre Existenz an. Was heißt es, dass die natürlichen Zahlen (als unendliche Menge) existieren? Für die Zahlen von 1 bis 15 lässt sich leicht ein Modell finden, etwa mit Hilfe der Finger dreier Hände. Auch für die natürlichen Zahlen bis 3 Milliarden könnte man das prinzipiell tun, wenn zum Beispiel entsprechend viele Menschen diese Zahlen repräsentieren würden. Aber schon wegen der Tatsache, dass es (nach heutigem physikalischen Weltbild) nur endlich viele Elementarteilchen im Weltall gibt, stößt diese Modellbildung an Grenzen. „Gibt“ es tatsächlich Zahlen, die so groß sind, dass sie nicht als konkretes Modell vorgestellt werden können? Sind solche Zahlen nicht eher unsinnig und ein Hirngespinst? Vielleicht, aber die Grundidee der Unendlichkeit hat etwas sehr Faszinierendes an sich und das soll nun gezeigt werden.

2.2.2 Hilberts Hotel

Unendliche Mengen verhalten sich in mancher Hinsicht ganz anders als endliche Mengen. Dies soll das folgende Beispiel illustrieren, das als „Hilberts Hotel“ Eingang in die Literatur gefunden hat. Der Name erinnert an David Hilbert (1862–1943), einen der bedeutendsten Mathematiker im ausgehenden 19. Jahrhundert und beginnenden 20. Jahrhundert.

Man denke sich ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern, die mit den natürlichen Zahlen durchnummeriert sind. Es gibt also das Zimmer mit der Nummer 1, das Zimmer mit der Nummer 2, das Zimmer mit der Nummer 3, natürlich Zimmer mit den Nummern 20, 21 und 22, aber auch noch das Zimmer mit der Nummer 18 112 706 197 332 209 803 199 115 (und das ist nicht das letzte auf dem Gang). Das Hotel hat nur Einzelzimmer. Man stellt sich nun vor, dass in jedem Zimmer ein Gast wohnt, sodass das Hotel voll belegt ist.

Mitten in der Nacht erscheinen an der Rezeption zehn weitere Personen, die auch noch jeweils ein Einzelzimmer benötigen. Was jeden normalen Portier zur Verzweiflung bringen würde, ist in Hilberts Hotel kein Problem. Der Portier bittet den Gast aus Zimmer 1 nach Zimmer 11 umzuziehen, den Gast aus Zimmer 2 ins Zimmer 12 zu ziehen, also allgemein, den Gast aus Zimmer n in das Zimmer $n + 10$ zu wechseln. Selbstverständlich sind alle Hotelgäste absolut kooperativ und kommen der Bitte unverzüglich nach. Nun sind die Zimmer 1 bis 10 frei und können von den neuen Gästen belegt werden. In einem gewöhnlichen Hotel hätten nun zwar die zehn neuen Gäste ein Zimmer, dafür würden zehn andere auf der Straße übernachten müssen. Nicht so in diesem Hotel. Da es zu jeder natürlichen Zahl n eine Zahl $n + 10$ gibt, können alle Gäste unterkommen. Ganz offensichtlich ist es genauso problemlos möglich, 100 oder 1000 oder 1000 000 neue Gäste zu empfangen, denn zu jedem $n \in \mathbb{N}$ kann man $n + 100$, $n + 1000$ und $n + 1000\,000$ bestimmen.

Doch das Schicksal will es komplizierter, denn kurz darauf fährt am Hotel ein Bus mit unendlich vielen Touristen $T_1, T_2, \ldots$ vor, die auch alle ein Zimmer für diese eine Nacht suchen. Man sollte meinen, der Portier würde sie mit dem Hinweis weiter schicken, es sei noch nicht einmal ein einziges Zimmer frei. Doch weit gefehlt, denn in diesem Hotel kann er (nur auf der Grundlage seiner Mathematikkenntnisse) alle Personen unterbringen.

Das geht zum Beispiel so: Die schon dort wohnenden Gäste sind, wie bereits gesagt, jederzeit kooperativ und bereit, vom Zimmer mit der Nummer n, das sie jetzt bewohnen, in Zimmer $2n$ umzuziehen. Nachdem das geschehen ist, ist jeder dieser Gäste wieder mit einem Einzelzimmer versorgt, und alle Zimmer mit ungerader Nummer sind frei für die unendlich vielen neuen Gäste aus dem Bus. Wenn der Portier seine Gäste auch einmal schlafen lassen will, so würde sich ein Umzug von Zimmer n nach $3n$ oder $5n$ anbieten, sodass sozusagen „auf Vorrat" gleich ein paar Zimmer mehr frei werden.

Der alltäglichen Erfahrung entspricht Hilberts Hotel sicher nicht. Lässt man sich auf die natürlichen Zahlen als unendliche Menge ein, so nimmt man solche paradox anmutenden Gegebenheiten aber zwangsläufig in Kauf. Die folgenden Aussagen machen intuitiv vielleicht keinen Sinn, scheinen aber als Ergebnis der Überlegungen zumindest aus mathematischer Sicht plausibel zu sein:

- Die Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ ändert sich nicht, wenn man 10, 100, 1000 Zahlen wegnimmt. Sei beispielsweise $M = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, dann ist $|M| = |\mathbb{N}|$.
- Es gibt genauso viele natürliche Zahlen wie es gerade natürliche Zahlen gibt.
- Es gibt genauso viele natürliche Zahlen wie es durch 5 teilbare natürliche Zahlen gibt.

Ganz offensichtlich könnte man eine Liste ähnlicher Aussagen recht beliebig aufstellen und in verschiedene Richtungen verallgemeinern. Für solche allgemeinen Formulierungen und vor allem ordentliche Beweise fehlen an dieser Stelle allerdings noch einige Voraussetzungen, sodass es bei den konkreten Beispielen bleiben soll (obwohl die Grundidee für einen möglichen Beweis bereits in den Überlegungen zum Hilbert'schen Hotel steckt). In Kapitel 11 werden diese Fragen noch einmal aufgegriffen und präziser behandelt. Man sagt übrigens, dass die natürlichen Zahlen, die geraden Zahlen, die durch 5 teilbaren Zahlen und die Menge $M = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ *gleichmächtig* sind (eine ordentliche Begriffsklärung gibt es allerdings erst unter Definition 11.3.1).

2.3 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Dem kommenden Tage sagt es der Tag:
die Nacht, die verschwand der folgenden Nacht.

Franz Joseph Haydn:
Die Schöpfung

2.3.1 Beweisen durch vollständige Induktion

Betrachtet man die Summe der ersten zwei, drei oder vier ungeraden Zahlen, so fällt ein erstaunliches Muster auf. Es ist $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$ und $1 + 3 + 5 + 7 = 16$, man bekommt also die Quadratzahlen 2^2, 3^2 und 4^2. Auch die Summe (wenn man das so nennen mag) aus nur einer Zahl passt in das Muster, denn $1 = 1^2$. Neugierig geworden probiert man noch ein paar Zahlen und merkt, dass $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$ und $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$ ist. Es sieht nach einer klaren Gesetzmässigkeit aus. Allerdings hilft es wenig, noch mehr Beispiele zu rechnen. Besser ist es, sich den Sachverhalt zu veranschaulichen. Dazu genügt ein Stück kariertes Papier. Man markiert zunächst ein kleines Quadrat mit („1"). Rechts und oberhalb grenzen an dieses Quadrat drei Quadrate, die auch markiert werden, sodass nun $1 + 3$ Quadrate gekennzeichnet sind. Sie bilden ein neues, größeres Quadrat aus 2×2 kleinen Quadraten. Wiederum rechts und oben kann man nun fünf kleine Quadrate ergänzen und erhält ein Muster aus 3×3 kleinen Quadraten. Wird dies in den folgenden Schritten in gleicher Weise fortgesetzt, so bekommt man eine zeichnerische Darstellung für die Gleichungen $1+3+5+7 = 4^2 = 16$, $1+3+5+7+9 = 5^2 = 25$ und $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2 = 36$. Aber die Zeichnung liefert mehr, nämlich die Grundidee für eine Verallgemeinerung. Offensichtlich kann man an ein Quadrat mit der Seitenlänge n (und das besteht aus n^2 kleinen Quadraten) oberhalb und rechts je n Quadrate anfügen und noch eines in die Ecke rechts oben setzen, um ein Quadrat mit der Seitenlänge $n + 1$ (bestehend aus $(n + 1)^2$ kleinen Quadraten) zu bekommen. Die beiden größeren Quadrate unterscheiden sich also gerade um $2n + 1$. Es kommt die Vermutung auf, dass die Beziehung $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2$ bzw. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ für alle natürlichen Zahlen n gilt, die Summe der ersten n ungeraden Zahlen also genau n^2 ist.

Wie lässt sich eine Behauptung, die für alle natürlichen Zahlen gültig sein soll, nun aber beweisen? Auch eine noch so schöne Zeichnung einzelner Quadrate zeigt die Wahrheit der Aussage nur für bestimmte natürliche Zahlen. Wenn der Nachweis zuerst für 1, dann für 2, danach für 3, 4, 5 und die restlichen Zahlen geführt wird, so wird man niemals fertig. Das ist also keine adäquate Methode für einen generellen Beweis. Doch man darf trotzdem Hoffnung schöpfen, denn es gibt tatsächlich einen *endlichen* Test für diesen Zweck. Man prüft Folgendes:

1. Stimmt die Behauptung für $n = 1$?
2. Falls die Behauptung für ein n richtig ist, kann man folgern, dass sie auch für $n + 1$ stimmt?

Sind beide Prüfungen erfolgreich verlaufen, so muss die Behauptung für alle natürlichen Zahlen richtig sein. Für die Begründung dieser Aussage benutzt man die (intuitiv wenig erstaunliche) Tatsache, dass zwischen einer beliebigen natürlichen Zahl n und $n + 1$ keine weitere natürliche Zahl liegt. Ganz ausführlich kann man sich den Vorgang des Testens dann so vorstellen: Ist nach (1) die Behauptung für $n = 1$ richtig ist, so muss sie nach (2) auch für $n = 2$ richtig sein. Ist sie aber für $n = 2$ richtig, so zeigt eine erneute Anwendung von (2) die Richtigkeit für $n = 3$. Setzt man die Anwendung von (2) fort, dann gilt die Aussage für $n = 4$ und $n = 5$ und $n = 6$ und so weiter.

Folgt daraus die Korrektheit für ein beliebiges n? Ja, denn wenn man überhaupt eine natürliche Zahl angeben könnte, für die die Behauptung nicht zutreffen sollte, so müsste es auch eine kleinste Zahl m mit dieser Eigenschaft geben. Dann ist wegen (1) jedenfalls $m > 1$ und somit ist $m - 1$ eine natürliche Zahl. Wegen der Minimalität von m gilt die Behauptung noch für $m-1$, und aus (2) folgt nun, dass sie dann auch für m gelten muss, im Widerspruch zur Annahme. Also existiert ein solches kleinstes m nicht, und damit existiert überhaupt keine natürliche Zahl, für die die Behauptung falsch sein kann.

Beispiel 2.3.1

Das erste Beispiel soll die Methode an einer relativ einfachen Aussage konkret zeigen. Dabei geht um die Summe der ersten n geraden Zahlen (nicht gleich weiterlesen, denn mit Hilfe der „Kästchenmethode“ kommt man auch selbst auf eine Vermutung). Es soll also bewiesen werden, dass die Summe der ersten n geraden Zahlen gleich dem Produkt aus n und $n+1$ ist:

Es gilt $\sum_{i=1}^{n} 2i = n \cdot (n+1)$ *für alle natürlichen Zahlen* n.

Der Beweis geht nun über die folgenden Schritte, die regelmäßig so durchgeführt werden, wenn man die Gültigkeit einer Aussage für alle natürlichen Zahlen zeigt.

(1) Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig, denn $\sum_{i=1}^{1} 2i = 2 \cdot 1 = 2 = 1 \cdot 2$.

(2a) Nun soll von n auf $n+1$ geschlossen werden (im Sinne des zweiten Prüfungsschrittes) Also nimmt man an, dass die Behauptung für ein n richtig ist (zumindest für $n = 1$ weiß man das ja auch schon sicher, sodass dies jedenfalls kein kompletter Unfug ist). Die Annahme ist also $\sum_{i=1}^{n} 2i = n \cdot (n+1)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Gezeigt werden muss, dass aus dieser Annahme die Gültigkeit für die nächste Zahl folgt, und diese Zahl ist der *Nachfolger* $n+1$.

(2b) Man betrachtet nun $\sum_{i=1}^{n+1} 2i$ und rechnet

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2i = \sum_{i=1}^{n} 2i + 2 \cdot (n+1).$$

Nun weiß man nach Annahme (2a), dass $\sum_{i=1}^{n} 2i = n \cdot (n+1)$ ist. Das darf man einsetzen und bekommt so

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2i = \sum_{i=1}^{n} 2i + 2 \cdot (n+1) = n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1).$$

Jetzt genügt einfaches Rechnen und zielgerichtetes Umformen, um zu der gewünschten Gleichung zu kommen. Es ist

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2i = n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1) = (n+2) \cdot (n+1) = (n+1) \cdot (n+2),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Beispiel 2.3.2

Die Methode ist auch für (mathematische) Situationen geeignet, die mehr als einfaches Rechnen verlangen. Das soll ein weiteres Beispiel zeigen. Die zu beweisende Behauptung ist dabei:

Eine Menge mit genau n Elementen hat genau 2^n Teilmengen.

Wieder überlegt man sich, dass die folgenden Schritte typisch für den Ablauf des Beweises sind:

(1) Für eine einelementige Menge $\{a\}$ stimmt die Behauptung. Die zwei Teilmengen sind die Menge selbst und die leere Menge, also $\{a\}$ und $\emptyset$.

(2a) Um den Schluss von n auf $n+1$ gemäß (2) durchführen zu können, wird angenommen, dass die Behauptung für ein n richtig ist (zumindest für $n = 1$ weiß man das sicher, sodass diese Vorgabe wiederum kein kompletter Unfug ist). Nun ist das Ziel, zu zeigen, dass eine $(n+1)$-elementige Menge genau 2^{n+1} Teilmengen besitzt.

(2b) Dazu sei eine Menge $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a\}$ mit genau $n+1$ Elementen gegeben. Ein Element von M, das mit a bezeichnet sein soll, sei fest gewählt. Mit $M\setminus\{a\}$ sei (wie bereits vereinbart) die Menge bezeichnet, die nach Herausnahme von a aus M übrig bleibt. Dann ist $M\setminus\{a\}$ eine Menge mit n Elementen und besitzt nach der Annahme (2a) genau 2^n Teilmengen. Von allen Teilmengen von M fehlen dann noch diejenigen, die a enthalten, denn alle anderen sind auch Teilmengen von $M\setminus\{a\}$. Nun entsteht aber jede Teilmenge von M, die a enthält, durch Hinzunahme von a zu einer Teilmenge von $M\setminus\{a\}$ (man nehme nämlich aus einer solchen einfach a heraus – was übrig bleibt ist eine Teilmenge von $M\setminus\{a\}$). Das ist übrigens genau die Methode, die bei der Lösung der Übungsaufgabe 1 aus Kapitel 1 verwendet wurde (man vergleiche Seite 365).

Also gibt es noch einmal 2^n Teilmengen von M, die a enthalten. Insgesamt existieren damit $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen der $(n+1)$-elementigen Menge M, was zu zeigen war.

Die auf Seite 30 vorgestellte Beweismethode wird als *vollständige Induktion* bezeichnet. Der explizite Nachweis im ersten Schritt heißt *Induktionsanfang* (1), die Vorgabe einer Zahl n, für welche die Richtigkeit der Behauptung angenommen wird, heißt *Induktionsannahme* (2a), und der Schritt von n auf $n+1$ wird als *Induktionsschluss* (2b) bezeichnet.

Es ist wohl unmittelbar einsichtig, dass der Induktionsanfang nicht immer bei 1 liegen muss. Im Fall des gerade behandelten Beispiels hätte es auch 0 sein können. Der Induktionsanfang fällt dann noch einfacher aus: Die einzige Menge mit 0 Elementen ist die leere Menge, und die hat genau eine Teilmenge (sich selbst), und das sind $2^0 = 1$ viele Teilmengen.

Beispiel 2.3.3

Mit Hilfe der vollständigen Induktion kann man eine Vielzahl von mehr oder minder sinnvollen Formeln zeigen, die für alle (oder manchmal auch nur für fast alle) natürlichen Zahlen gelten. Noch einmal soll ein Beispiel verdeutlichen, dass dazu immer wieder die gleichen Schritte (Induktionsanfang, Induktionsannahme, Induktionsschluss) notwendig sind.

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Induktionsanfang: $n = 1$.
Für $n = 1$ steht auf der linken Seite $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ und auf der rechten Seite $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Damit ist die Aussage für $n = 1$ richtig.
Induktionsannahme: Für eine natürliche Zahl n gelte

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Induktionsschluss: Mit der Zahl n aus der Induktionsannahme ist nun zu zeigen, dass $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$ gilt.
Es ist

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} \\ &\quad = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} \end{aligned}$$

wegen der Induktionsannahme. Nun rechnet man

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} &= \frac{n \cdot (n+2)}{(n+1) \cdot (n+2)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

Damit ist auch diese Behauptung bewiesen.

Beispiel 2.3.4

Auch die auf Seite 25 bereits begründete *Kommutativität* der Multiplikation lässt sich mit Hilfe der vollständigen Induktion beweisen. Dazu gibt man eine natürliche Zahl m vor (die beliebig gewählt werden darf, aber im Folgenden immer dieselbe sein soll) und zeigt, dass $m \cdot n = n \cdot m$ für alle natürlichen Zahlen n ist.

Erfahrungsgemäß ist diese Arbeitsweise für mathematische Anfängerinnen und Anfänger nicht einfach zu verstehen. Deswegen also noch einmal ganz langsam: Die Zahl natürliche Zahl m wird fest gewählt, sie darf sich also im Verlauf der Argumentation nicht mehr ändern. Allerdings wird sie als Variable geschrieben, das heißt, im Beweis soll allenfalls genutzt werden, dass $m \in \mathbb{N}$ ist, aber nicht irgendeine spezifische Eigenschaft von m (wie etwa „$m = 5$" oder „m ist gerade"). Die Induktion wird nach n geführt, das heißt, n durchläuft alle natürlichen Zahlen.

Behauptung: Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $m \cdot n = n \cdot m$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang: $n = 1$.
Betrachtet man die Multiplikation wiederum als fortgesetzte Addition, so gilt

$$m \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{m\text{-mal}} = m,$$

und es ist $1 \cdot m = m$, also $m \cdot 1 = 1 \cdot m$.
Induktionsannahme: Für eine natürliche Zahl n gelte $m \cdot n = n \cdot m$.
Induktionsschluss: Mit der Zahl n aus der Induktionsannahme ist nun zu zeigen, dass $m \cdot (n+1) = (n+1) \cdot m$ gilt.
Die linke Seite kann so umgeformt werden (dabei wird die Kommutativität der Addition benutzt):

$$\begin{aligned} m \cdot (n+1) &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{m\text{-mal}} \\ &= \underbrace{n + n + \cdots + n}_{m\text{-mal}} + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{m\text{-mal}} = m \cdot n + m \cdot 1. \end{aligned}$$

Nun wird die Induktionsannahme verwendet, und es ergibt sich

$$\begin{aligned} m \cdot n + m \cdot 1 = n \cdot m + 1 \cdot m = n \cdot m + m &= \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n\text{-mal}} + m \\ &= \underbrace{m + m + \cdots + m}_{(n+1)\text{-mal}} = (n+1) \cdot m. \end{aligned}$$

Häufige Fehler

Beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion laufen nach einem bestimmten Schema ab, sodass in diesem Zusammenhang auch immer wieder ganz bestimmte typische Fehler auftreten. Diese Fehler sind allerdings nicht in der Methode selbst begründet, sondern gehen einzig und allein darauf zurück, dass die Methode nicht korrekt angewendet wird.

- Der Induktionsanfang wird weggelassen. Zwar ist er oft der einfachste Teil des ganzen Beweises, aber deshalb keineswegs überflüssig. Die Behauptung „alle natürlichen Zahlen sind größer als 99“ ist offensichtlich Unsinn, aber der Induktionsschluss funktioniert: Ist $n > 99$, so ist auch $n + 1 > 99$ (eigentlich > 100). Hier rettet einzig und allein der Induktionsanfang. Die Behauptung stimmt erst für $n > 99$, also kann der Induktionsanfang minimal bei 100 liegen. Entsprechend stimmt alles für natürliche Zahlen $n \geq 100$, und für diese Zahlen ist die Behauptung keine Überraschung.
- Es kommt vor, dass zum Induktionsschluss von n auf $n + 1$ nicht nur die Gültigkeit der Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ benötigt wird, um die Richtigkeit für $n + 1$ zu erkennen, sondern auch für $n - 1$. Dazu ist es aber erforderlich, dass $n \geq 2$ gilt, damit $n - 1$ eine natürliche Zahl ist, und außerdem muss für den Induktionsanfang die Behauptung für $n = 1$ *und* $n = 2$ geprüft werden, damit der Induktionsschluss auf sicherem Fundament steht.
- Die Induktionsannahme wird statt in der Form „die Behauptung gelte für eine feste natürliche Zahl n“ aufgestellt als „die Behauptung gelte für beliebiges n“. Das hieße dann, die Behauptung selbst schon anzunehmen, was für einen Beweis der Behauptung natürlich nicht in Ordnung ist. Kurz und gut, bei jedem Beweis durch vollständige Induktion ist es wichtig, sich den Geltungsbereich ganz präzise zu überlegen.

2.3.2 Definition durch Induktion: Das Produkt natürlicher Zahlen

Man kann es durchaus als Stilbruch empfinden, dass im eben durchgeführten Induktionsbeweis noch Punkte „...“ auftauchen, für die der Leser oder die Leserin in Gedanken etwas einzusetzen hat. Der Grund für die Punkte im Induktionsbeweis besteht einfach darin, dass die obige Definition des Produkts den gleichen Schönheitsfehler hatte. Sollen diese Punkte vermieden werden, so muss diese Definition durch etwas „Punktfreies“ ersetzt werden. Hier hilft ebenfalls das Induktionsprinzip weiter. Das Produkt zweier natürlicher Zahlen m und n lässt sich nämlich auch schrittweise erklären. Dazu setzt man:

$$\begin{aligned} &\text{(I)} && 1 \cdot 1 = 1 \\ &\text{(IIa)} && (m + 1) \cdot n = m \cdot n + n \\ &\text{(IIb)} && m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m. \end{aligned}$$

Man mache sich klar, dass sich jedes Produkt nach diesen Regeln berechnen lässt, zum Beispiel $2 \cdot 3$ in folgenden Schritten:

$$\begin{aligned} &1 \cdot 1 = 1 \text{ nach (I)}, \quad 1 \cdot 2 = 1 \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 1 + 1 = 2 && \text{nach (IIb)}, \\ &1 \cdot 3 = 1 \cdot (2 + 1) = 1 \cdot 2 + 1 = 2 + 1 = 3 && \text{nach (IIb)}, \\ &2 \cdot 3 = (1 + 1) \cdot 3 = 1 \cdot 3 + 3 = 6 && \text{nach (IIa)}. \end{aligned}$$

Allerdings taucht die entscheidende Frage auf, ob verschiedene Wege zum selben, eindeutig bestimmten Ziel führen. Um etwa $2 \cdot 3$ zu berechnen, könnte man auch in anderer Reihenfolge vorgehen, zum Beispiel so (die erste Zeile ist unverändert):

$$\begin{array}{ll} 1 \cdot 1 = 1 \text{ nach (I)}, \quad 1 \cdot 2 = 1 \cdot (1+1) = 1 \cdot 1 + 1 = 2 & \text{nach (IIb)}, \\ 2 \cdot 2 = (1+1) \cdot 2 = 1 \cdot 2 + 2 = 4 & \text{nach (IIa)}, \\ 2 \cdot 3 = 2 \cdot (2+1) = 2 \cdot 2 + 2 = 4 + 2 = 6 & \text{nach (IIb)}. \end{array}$$

Damit die schrittweise Definition des Produkts einen Sinn ergibt, muss stets gewährleistet sein, dass das Ergebnis unabhängig davon ist, wie die Faktoren schrittweise erhöht werden. Tatsächlich führt die Berechnung von $(m+1) \cdot (n+1)$ aus $m \cdot n$ zum selben Ergebnis, wenn die Station über $(m+1) \cdot n$ oder über $m \cdot (n+1)$ gewählt wird. Einerseits ist

$$\begin{aligned} (m+1) \cdot (n+1) &= m \cdot (n+1) + n + 1 && \text{nach (IIa)} \\ &= m \cdot n + m + n + 1 && \text{nach (IIb)}\ , \end{aligned}$$

und andererseits ist

$$\begin{aligned} (m+1) \cdot (n+1) &= (m+1) \cdot n + m + 1 && \text{nach (IIb)} \\ &= m \cdot n + n + m + 1 && \text{nach (IIa)}. \end{aligned}$$

Wegen der Kommutativität der Addition (über die man sich eigentlich auch noch Gedanken machen sollte) ist $m + n = n + m$, und die beiden Ergebnisse stimmen überein.

Schon verhältnismäßig einfache Sachverhalte, die bereits aus der Grundschule bekannt sind und gar nicht mehr als Problem wahrgenommen werden, haben bei näherem Hinsehen manchmal ungeahnte mathematische Tücken. Das sollte das Beispiel in erster Linie aufzeigen.

2.3.3 Definition durch Induktion: *n* Fakultät

Die Definition mit Hilfe der vollständigen Induktion, die am Beispiel des Produkts natürlicher Zahlen bereits angewendet wurde, ist oftmals das einzig probate Verfahren, um einen Begriff einzuführen, der für alle natürlichen Zahlen erklärt werden soll. Das gilt auch für das Produkt $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ der natürlichen Zahlen von 1 bis n. Es wird häufig gebraucht, als $n!$ notiert und n Fakultät gesprochen. Schreibt man nun

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n,$$

so ist diese Darstellung unbefriedigend, weil die Punkte beim Leser oder der Leserin genau das auslösen sollen, was der Schreiber damit gemeint hat. Das kann man aber so nicht ohne weiteres annehmen. Wie setzt sich beispielsweise die Folge 1, 3, 5, 7, ... fort? Mit 9, weil es sich um die ungeraden Zahlen handeln soll, oder mit 11, weil genau diejenigen Zahlen in dieser Folge stehen, die keinen Teiler außer 1 und sich selbst haben?

Es ist unmittelbar einsichtig, dass Punkte keine gute mathematische Lösung sind. Bei der Definition von $n!$ ist die Unschärfe allerdings vermeidbar, wenn das Produkt der Zahlen von 1 bis n *induktiv* definiert wird. Dabei wird $1! = 1$ und $n! = n \cdot (n-1)!$ für alle $n > 1$ gesetzt.

▶ **Definition 2.3.1** Für eine natürliche Zahl n wird durch $1! = 1$ und $n! = n \cdot (n-1)!$ für $n > 1$ die Zahl $n!$ (gesprochen n Fakultät) definiert. Darüber hinaus soll $0! = 1$ sein.

Man hat damit einen Anfang (nämlich $1! = 1$) und kann alle Werte von $n!$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ableiten. Es ist $2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$, also $3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6$ und somit $4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$ sowie $5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120$. Es reicht sicherlich an dieser Stelle mit dem Rechnen, denn das Prinzip ist offensichtlich. Man baut auf, Schritt für Schritt, Zahl um Zahl.

2.3.4 Definition durch Induktion: Die Fibonacci-Zahlen

Auf den italienischen Mathematiker *Fibonacci* (Leonardo von Pisa, vermutlich 1180–1250, doch ganz sicher ist weder das Geburtsjahr noch das Todesjahr überliefert) geht die so genannte „Kaninchenaufgabe" zurück. Sie findet sich im *Liber abaci*, einem Buch, in dem er mathematisches Wissen seiner Zeit insbesondere aus dem indischen und arabischen Raum zusammenstellte und das über Jahrhunderte hinaus für die Entwicklung der Mathematik in Europa von Bedeutung war.

> Ein Kaninchenpaar wirft vom zweiten Monat an monatlich ein weiteres Paar, das wiederum vom zweiten Monat an jeden Monat ein Paar zur Welt bringt. Wie viele Kaninchenpaare leben nach n Monaten, wenn es zu Beginn genau ein Paar gibt und keines der Kaninchen stirbt?

Bezeichnet man mit F_n die Anzahl der Kaninchenpaare nach n Monaten, so gilt $F_1 = 1$ und $F_2 = 1$, denn in den ersten beiden Monaten hat das erste Paar noch keine Jungen. Im dritten Monat kommt ein Paar hinzu, sodass $F_3 = 2$ ist. Auch im vierten Monat kommt ein Paar hinzu, und es ist $F_4 = 3$. Nach fünf Monaten bekommen schließlich die beiden älteren Paare Junge, und es ist $F_5 = 3 + 2 = 5$. Man kann nun leicht einsehen, dass $F_6 = F_5 + F_4 = 8$, $F_7 = F_6 + F_5 = 13$ und $F_8 = F_7 + F_6 = 21$ ist. Allgemein gibt es nach n Monaten zunächst einmal so viele Kaninchenpaare, wie es sie nach $n-1$ Monaten gab, und es kommen so viele weitere Kaninchenpaare hinzu, wie es sie nach $n-2$ Monaten gab (denn all diese Paare vermehren sich).

Man kann somit die aufeinander folgenden Zahlen durch eine Definition beschreiben, bei der für $n \geq 3$ die n-te Zahl mit Hilfe der $(n-1)$-ten und der $(n-2)$-ten dieser Zahlen beschrieben wird.

▶ **Definition 2.3.2** Die durch $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 3$ definierte Folge heißt Folge der Fibonacci-Zahlen.

Diese Folge der Fibonacci-Zahlen ist gut für allerlei Entdeckungen geeignet, denn es gibt vielfältige Beziehungen zwischen den Zahlen. So ist

$$1^2 + 1^2 = 1 \cdot 2,\ \ 1^2 + 1^2 + 2^2 = 2 \cdot 3,$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3 \cdot 5,\ \ 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 5 \cdot 8.$$

Man vermutet daher (völlig korrekt), dass allgemein

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Außerdem rechnet man

$$1^2 + 1^2 = 2,\ \ 1^2 + 2^2 = 5,\ \ 2^2 + 3^2 = 13,\ \ 3^2 + 5^2 = 34$$

leicht nach. Das ist kein Zufall, vielmehr ist die Beziehung

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$$

für alle $n \geq 1$ erfüllt. Beide Behauptungen werden im Rahmen der Übungsaufgaben bewiesen (Aufgabe 8).

Die Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt
Eine Strecke wird im *Goldenen Schnitt* geteilt, wenn für die beiden Teilstücke a und b gilt, dass $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ ist. Durch Umformen bekommt man die quadratische Gleichung $a^2 - ba - b^2 = 0$ mit der positiven Lösung $a = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{5}$. Somit ist $\frac{a}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1,618$ (man vergleiche auch Seite 284).

Die Folge der Quotienten von zwei aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen ist konvergent. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (F_{n+1} : F_n) = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

und man sieht, dass die Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt eine (erstaunliche) Verbindung aufweisen.

Die Fibonacci-Zahlen im Mathematikunterricht

Beziehungen zwischen den Fibonacci-Zahlen (man vergleiche Seite 38) kann man auch Schülerinnen und Schüler entdecken lassen. Es muss ja nicht unbedingt gleich die Verallgemeinerung auf beliebiges $n \in \mathbb{N}$ behandelt werden. Das zeigt etwa die folgende Darstellung im Lehrbuch „delta 5“ für das fünfte Schuljahr ([18], S. 29).

Der italienische Mathematiker Fibonacci (um 1170 bis ca. 1250) trug das mathematische Wissen seiner Zeit aus dem europäischen, dem arabischen und dem indischen Kulturkreis zusammen. Er war es, der als Erster die arabischen Ziffern in Europa einführte, die wir heute noch verwenden. Weltberühmt ist seine „Kaninchenaufgabe“:

Ein Kaninchenpaar wirft vom zweiten Monat an monatlich ein weiteres Paar, das seinerseits vom zweiten Monat an monatlich ein Paar zur Welt bringt. Wie viele Kaninchenpaare leben nach n Monaten, wenn zu Beginn ein junges Paar lebte (und kein Kaninchen stirbt)?

a) Gib die Anzahl der Kaninchenpaare in den Monaten des ersten Jahres an. Fertige dazu eine Tabelle an.

b) Beschreibe, wie die Anzahl der Kaninchenpaare zunimmt. Die Zahlen, die sich auf diese Weise ergeben, nennt man „Fibonacci-Zahlen“. Schreibe die ersten zwölf Fibonacci-Zahlen auf.

c) In der Realität entwickelt sich die Zunahme der Kaninchen nicht so gleichmäßig. Warum?

d) Welche Zahlzeichen benutzte man in Europa vor den arabischen Ziffern?

Die Zahlen der Folge 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377; 610; 987; ... nennt man Fibonacci-Zahlen (vgl. Aufgabe 7.). Diese Zahlenfolge hat erstaunliche Eigenschaften, z.B.:

Die Summe der Quadrate der 6. und der 7. Fibonacci-Zahl ergibt die (6 + 7 =)13. Fibonacci-Zahl: $8^2 + 13^2 = 233$.

Überprüfe, ob dieser Zusammenhang auch für die 3. und die 4. Fibonacci-Zahl sowie für die 4. und die 5. Fibonacci-Zahl gilt.

Dort wird mit ganz spezifischen Werten gerechnet und experimentiert. Das Ergebnis sind dann nicht Sätze und Beweise, aber es sind Vermutungen und Belege für die Gültigkeit der Vermutungen. Viel anders geht man in der „richtigen“ Mathematik auch nicht vor. Die schönen Sätze und ihre geschliffenen Beweise sind in der Regel das Ende eines langen und mühsamen Prozesses.

Bei der Beschreibung der Fibonacci-Zahlen wurde übrigens das *Summenzeichen* benutzt, das auf manche Menschen erschreckend (oder gar abschreckend?) wirkt. Dabei ist es wirklich ein äußerst nützliches Symbol und im Grunde einfach zu verstehen.

Man geht von m Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ aus (wobei es keine Rolle spielt, ob dies natürliche, ganze, rationale oder reelle Zahlen sind). Bildet man nun die Summe $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$, so schreibt man abkürzend dafür

$$\sum_{j=1}^{m} a_j := a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Das Symbol $\sum_{j=1}^{m} a_j$ steht also (ganz formal) für die Summe der Zahlen a_j, beginnend mit $j = 1$ (also mit a_1) und endend mit $j = m$ (also mit a_m).

Die vielen Variablen verwirren leicht, deshalb sollte man sich das Summenzeichen an einem ganz konkreten Beispiel überlegen. So würde man etwa

$$\sum_{j=1}^{10} 2j = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$$

oder auch

$$\sum_{j=1}^{8} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 8^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$$

schreiben. Allerdings bedeutet die Verwendung des Summenzeichens nicht immer, dass man eine so schöne Formel für die zu summendierenden Zahlen hat, wie es bei den geraden Zahlen oder den Quadratzahlen der Fall ist.

Ganz analog dazu kann man auch das *Produktzeichen* verwenden, das als abkürzende Schreibweise für ein Produkt von natürlichen (ganzen, rationalen, reellen) Zahlen benutzt wird. Es ist

$$\prod_{j=1}^{n} a_j := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

und konkret beispielsweise

$$\prod_{j=1}^{n} j = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Mit Hilfe des Produktzeichens kann man nun für Definition 2.3.1 eine alternative Formulierung geben (die aber selbstverständlich keinen anderen Inhalt hat).

► **Definition 2.3.3** Das Produkt $n! = \prod_{j=1}^{n} j$ der natürlichen Zahlen von 1 bis n wird als $n!$ notiert (und genauso als n Fakultät gesprochen).

2.3.5 Geometrische Summenformel

Den Abschluss dieses Abschnitts soll ein Satz bilden, dessen Ergebnis recht häufig gebraucht wird. Es handelt sich um die so genannte *Geometrische Summenformel.* Es werden zwei Beweise für ein und denselben Sachverhalt gegeben, einmal durch vollständige Induktion und einmal mit direkter Umformung.

▶ **Satz 2.3.1** Geometrische Summenformel
Es sei x eine reelle Zahl und n eine natürliche Zahl. Dann gilt

$$x^{n+1} - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = (x-1)\sum_{j=0}^{n} x^j.$$

Wie bereits angekündigt, sollen hier zwei Beweise aufgeführt werden. Natürlich reicht ein einziger (fehlerfreier) Beweis aus, um sich der behaupteten Sache sicher zu sein. Doch in der Mathematik wird nicht nur bewiesen, um eine Vermutung zu überprüfen. Ganz häufig setzen verschiedene Beweismethoden verschiedene Akzente, zeigen Wege auf, die in der einen oder der anderen Richtung verallgemeinert werden können, oder aber basieren auf mehr oder minder komplexer Mathematik. Darüber hinaus kann es wohl für die eigene Einsicht in einen mathematischen Sachverhalt dienlich sein, verschiedene Zugänge zu kennen. Es ist manchmal individuell verschieden, welchen man leichter versteht oder auch nur schöner und angenehmer findet. Hier ist nun der erste Beweis von Satz 2.3.1, der mit Hilfe der vollständigen Induktion geführt wird.

▶ **Beweis 2.3.1** Sei x eine reelle Zahl. Es soll die geometrische Summenformel $x^{n+1} - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = (x-1)\sum_{j=0}^{n} x^j$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt werden.

Induktionsanfang: $n = 1$.

Es ist bekanntlich $x^2 - 1 = (x-1)(1+x) = (x-1)\sum_{j=0}^{1} x^j$.

Induktionsannahme: Für eine natürliche Zahl m gelte

$$x^{m+1} - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^m) = (x-1)\sum_{j=0}^{m} x^j.$$

Induktionsschluss: Mit der Zahl m aus der Induktionsannahme ist zu zeigen

$$x^{m+2} - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m+1}) = (x-1)\sum_{j=0}^{m+1} x^j.$$

Meistens ist es zum Nachweis einer Gleichung einfacher, mit der komplizierter aussehenden Seite zu beginnen. Das ist hier die rechte Seite

$$(x-1)\sum_{j=0}^{m+1} x^j = (x-1)\left(x^{m+1} + \sum_{j=0}^{m} x^j\right) = (x-1)x^{m+1} + (x-1)\left(\sum_{j=0}^{m} x^j\right),$$

wobei der letzte Summand der Summe (also der für $j = m + 1$) vor das Summenzeichen geschrieben wurde. Nach der Induktionsannahme kann man den hinteren Term als $x^{m+1} - 1$ schreiben und damit umformen

$$(x-1)\sum_{j=0}^{m+1} x^j = (x-1)x^{m+1} + x^{m+1} - 1 = x^{m+2} - 1,$$

was zu zeigen war. □

Im Folgenden wird der zweite Beweis von Satz 2.3.1 geführt, bei dem dieses Mal einfach gerechnet wird. Das geht durch Ausmultiplizieren und passendes Umformen der Summe. Man bekommt so einen direkten Beweis der Behauptung.

▶ **Beweis 2.3.2** Es ist

$$\begin{aligned}
&(x-1)(1+x+\cdots+x^{n-1}+x^n) \\
&\qquad = x + x^2 + \cdots + x^n + x^{n+1} - (1 + x + \cdots + x^{n-1} + x^n) \\
&\qquad = x^{n+1} - 1\,,
\end{aligned}$$

womit gezeigt ist, was gezeigt werden sollte. Wegen der verwendeten Punkte (und der damit verbundenen Schwierigkeiten) ist die Umformung allerdings nicht ganz befriedigend. Natürlich soll die Verwendung von Punkten in Formeln nicht generell verboten und ein unbedingter Formalismus gefordert werden. Doch darf bei ihrer Verwendung kein Zweifel bestehen, was an der Stelle eigentlich zu stehen hat. Außerdem sollte man stets in der Lage sein, die entsprechende Aussage auch ohne Punkte schreiben zu können. In diesem Sinn soll also die gleiche Überlegung noch einmal und unter Verwendung des Summenzeichens formuliert werden. Man schreibt

$$(x-1)\sum_{j=0}^{n} x^j = x\left(\sum_{j=0}^{n} x^j\right) - \left(\sum_{j=0}^{n} x^j\right) = \left(\sum_{j=0}^{n} x^{j+1}\right) - \left(\sum_{j=0}^{n} x^j\right).$$

In der vorletzten Summe beginnt der Exponent bei 1 und endet bei $n+1$. Gemeinsam treten in beiden Summen der rechten Seite die Potenzen $x^1, \ldots, x^n$ auf, während x^{n+1} nur in der ersten und x^0 nur in der zweiten Summe vorkommt. Außerdem kann die vorletzte Summe so umgeschrieben werden:

$$\sum_{j=0}^{n} x^{j+1} = \sum_{j=1}^{n+1} x^j.$$

Man schreibt nun die *nicht* gemeinsam enthaltenen Potenzen einzeln vor bzw. nach die betreffende Summe. Damit ist insgesamt

$$(x-1)\sum_{j=0}^{n} x^j = \left(\sum_{j=1}^{n} x^j\right) + x^{n+1} - \left(x^0 + \sum_{j=1}^{n} x^j\right) = x^{n+1} - 1,$$

und man hat das gewünscht Ergebnis. □

Anmerkung

Die Aussage von Satz 2.3.1 kann auch in der Form

$$1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = (1-x)\sum_{j=0}^{n} x^j$$

geschrieben werden. Diese Version entsteht durch einfache Multiplikation mit (-1). Wenn man diese Form einmal gesehen hat, wird man sich hoffentlich bei passender Gelegenheit daran erinnern, denn sie wird nicht selten gebraucht.

2.4 Der binomische Lehrsatz

Es gibt Inhalte des Mathematikunterrichts, nach denen man Menschen auch Jahre nach ihrem Schulabschluss noch fragen darf. Ein solcher (offenbar unvergesslicher) Inhalt ist die Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ,$$

an die sich fast jeder erinnert (womit allerdings nicht gesagt ist, dass sich auch jeder daran erinnert, was man mit dieser Formel anfangen kann). Dabei sollen a und b hier natürliche oder ganze Zahlen sein, die mit Schulwissen verwendet werden (übrigens dürften a und b genauso rationale, reelle oder komplexe Zahlen sein, und es würde sich an den folgenden Überlegungen im Prinzip nichts ändern).

In der Mathematik ist die Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ oft nützlich, und das gilt auch für ihre Verallgemeinerung auf $(a+b)^n$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Sie soll nun erarbeitet werden. Dabei wird die eben vorgestellte Methode des Beweisens durch vollständige Induktion benutzt. Eine Voraussetzung für die weitere Arbeit ist die Definition der so genannten *Binomialkoeffizienten*. Um zu verstehen, worum es dabei geht, ist es hilfreich, zunächst einmal die einfachen Beispiele $(a+b)^3$ und $(a+b)^4$ konkret zu berechnen. Es ist

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

und

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Möchte man nun $(a+b)^5 = (a+b)^4 \cdot (a+b)$ bestimmen, so wird durch die Multiplikation von $(a+b)^4$ mit $(a+b)$ jeder einzelne Summand von $(a+b)^4$ zunächst mit a und dann mit b multipliziert (was auch sonst?), das heißt, man bekommt

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= (a+b)^4 \cdot (a+b)\\ &= (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) \cdot a\\ &\quad +(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) \cdot b\\ &= (a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4)\\ &\quad +(a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5)\\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.\end{aligned}$$

Wenn man diesen Grundgedanken verallgemeinert, so wird leicht klar, dass der Ausdruck $(a+b)^n$, wenn er denn ausgerechnet und in einzelne Summanden zerlegt ist, die Terme a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2, \ldots, a^2b^{n-2}$, ab^{n-1}, b^n enthalten muss. Die Koeffizienten vor diesen Termen bekommt man aus dem Vergleich von $(a+b)^{n-1}$ und $(a+b)^n$. Man kann sich überlegen, dass sie durch das folgende Dreieck bestimmt sind, das so genannte *Pascal'sche Dreieck*. Der Name erinnert an den französischen Mathematiker, Physiker und Philosophen Blaise Pascal (1623–1662).

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} &&&&&&&1&&&&&&& \\ &&&&&&1&&1&&&&&& \\ &&&&&1&&2&&1&&&&& \\ &&&&1&&3&&3&&1&&&& \\ &&&1&&4&&6&&4&&1&&& \\ &&1&&5&&10&&10&&5&&1&& \\ &1&&6&&15&&20&&15&&6&&1& \\ \cdots&&\cdots&&\cdots&&\cdots&&\cdots&&\cdots&&\cdots&&\cdots \end{array}$$

Beim Zählen der Zeilen in diesem Dreieck soll nun ausnahmsweise mit der 0 begonnen werden, denn in der nullten (also eigentlich der ersten) Zeile steht der Koeffizient von $(a+b)^0 = 1$ (nach Vereinbarung ist $m^0 := 1$ für alle natürlichen Zahlen m). In der folgenden ersten Zeile stehen die Koeffizienten von $(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$, in der zweiten Zeile die Koeffizienten von $(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$ und in der n-ten Zeile die Koeffizienten von $(a+b)^n$. Man kommt von einer Zeile zur nächsten, indem man jeweils die Summe zweier benachbarter Koeffizienten bildet und sie unter diese beiden Zahlen schreibt. Warum das so ist, kann man sich durch den Vergleich von $(a+b)^{n-1}$ und $(a+b)^n = (a+b)^{n-1} \cdot (a+b)$ klarmachen. Am linken und am rechten Rand steht jeweils die Zahl 1, denn a^n und b^n treten je einmal auf. Dieses Dreieck kann natürlich beliebig fortgesetzt werden.

Die damit gegebenen Koeffizienten bekommen einen Namen, man nennt sie die *Binomialkoeffizienten*. Sie werden in der Form $\binom{n}{i}$ geschrieben und „n über i" bzw. „i aus n" gesprochen. Dabei ist $\binom{n}{i}$ das i-te Element (beginnend mit $i = 0$) in der n-ten Zeile (ebenfalls beginnend mit $n = 0$). Verwendet man die Binomialkoeffizienten, so sieht das Pascal'sche Dreieck folgendermaßen aus:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & & &
\end{array}
$$

Nach der Vereinbarung für die Binomialkoeffizienten ist insbesondere $\binom{0}{0} = 1$ und $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man setzt außerdem $\binom{n}{i} := 0$ für $i < 0$ und $i > n$.
Betrachtet man nun $(a + b)^n$, so kann man zunächst für $n = 2$ bzw. $n = 3$ konkret

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

und

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

schreiben. Allgemein bekommt man mit Hilfe der Binomialkoeffizienten den *binomischen Lehrsatz* in der Form

$$
\begin{aligned}
(a + b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots \\
&\quad + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}b^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}
\end{aligned}
$$

mit $n \in \mathbb{N}$ (denn der Fall $n = 0$ spielt nun wirklich keine tragende Rolle). Mit dieser Formulierung ist allerdings nicht die Frage beantwortet, wie denn allgemein $\binom{n}{i}$ bestimmt werden kann. Das soll in Satz 2.4.2 aufgezeigt und bewiesen werden. Zentral ist dabei der Vergleich der Binomialkoeffizienten, die zu $(a + b)^n$ gehören, im Vergleich zu denen, die zu $(a + b)^{n+1}$ gehören. Der folgende Satz beschreibt, wie sie sich unterscheiden.

▶ **Satz 2.4.1** Für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \le i \le n$ gilt:

$$\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}.$$

▶ **Beweisidee 2.4.1** Da die Binomialkoeffizienten als Koeffizienten in $(a+b)^n$ definiert sind, kann auch nur diese Definition benutzt werden. Man betrachtet

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}$$

und versucht, diese Summe in geeignete Teilsummen zu zerlegen.

▶ **Beweis 2.4.1** Es ist einerseits

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}\right) \cdot (a+b)\\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i}.\end{aligned}$$

Um diese beiden Gleichungen wirklich zu vergleichen, wird nun (zugegebenermaßen ein wenig trickreich) gerechnet. Der zweite Summand sieht dem angestrebten Ergebnis schon ziemlich ähnlich, nicht so der erste Summand. Also formt man geeignet um, nämlich durch

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n+1-i}.$$

Auch wenn das merkwürdig erscheinen mag, so steckt nicht viel dahinter. Man beginnt mit der Summation bei $i = 1$, lässt sie dafür bis $i = n+1$ gehen und ersetzt in der Summe jeweils i durch $i-1$, um den dabei entstehenden Fehler zu korrigieren. Damit kann man nun

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i}\\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n+1-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i}\end{aligned}$$

schreiben. Nun wird so umgeformt und zusammengefasst, bis man das gewünschte Ergebnis hat. Man bekommt

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}a^i b^{n+1-i} + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n+1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n}{i-1}a^i b^{n+1-i} - \binom{n}{-1}b^{n+1} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n}{i}a^i b^{n+1-i} - \binom{n}{n+1}a^{n+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n+1}\left(\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}\right)a^i b^{n+1-i},\end{aligned}$$

da nach der Vereinbarung über die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$ ist (man vergleiche Seite 44). Durch Koeffizientenvergleich folgt die Behauptung. □

Es würde nun zu weit führen, die folgende Formel für den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{i}$ genauer zu begründen. Sie soll aber mit Hilfe der vollständigen Induktion bewiesen werden.

▶ **Satz 2.4.2** Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq i \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!}.$$

▶ **Beweis 2.4.2** Induktionsanfang: Es ist $\binom{1}{0} = \frac{1!}{0! \cdot 1!} = 1$ und $\binom{1}{1} = \frac{1!}{1! \cdot 0!} = 1$. Damit ist der Induktionsanfang gezeigt.
Induktionsannahme: Es sei $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq i \leq n$.
Induktionsschluss: Man betrachtet $\binom{n+1}{i}$ und zeigt, dass $\binom{n+1}{i} = \frac{(n+1)!}{i! \cdot (n+1-i)!}$ ist (mit $0 \leq i \leq n+1$). Nach Satz 2.4.1 ist die Beziehung

$$\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$$

gegeben. Überträgt man dieses Ergebnis auf die Behauptung des Satzes, so ist zu zeigen, dass die Gleichung

$$\frac{(n+1)!}{i! \cdot (n+1-i)!} = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} + \frac{n!}{(i-1)! \cdot (n-i+1)!}$$

gilt. Sei zunächst $0 \leq i \leq n$. Dann rechnet man

$$\begin{aligned}\frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}+\frac{n!}{(i-1)!\cdot(n-i+1)!}\\ &=\frac{n!\cdot(n+1-i)+n!\cdot i}{i!\cdot(n+1-i)!}\\ &=\frac{(n+1)!}{i!\cdot(n+1-i)!}\end{aligned}$$

und hat die Behauptung bewiesen. Im Fall $i = n + 1$ genügt direktes Einsetzen, denn dann ist

$$1=\binom{n+1}{i}=\binom{n+1}{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)!\cdot(n+1-n-1)!}.$$

Damit ist der Induktionsschluss gelungen. □

Mit diesem Satz folgt dann auch der so genannte *binomische Lehrsatz*. Wie bereits oben erwähnt, wird er hier für ganze Zahlen formuliert. Er gilt genauso für rationale, reelle und sogar komplexe Zahlen.

▶ **Satz 2.4.3** Binomischer Lehrsatz
Seien a und b ganze Zahlen und n eine natürliche Zahl. Dann ist

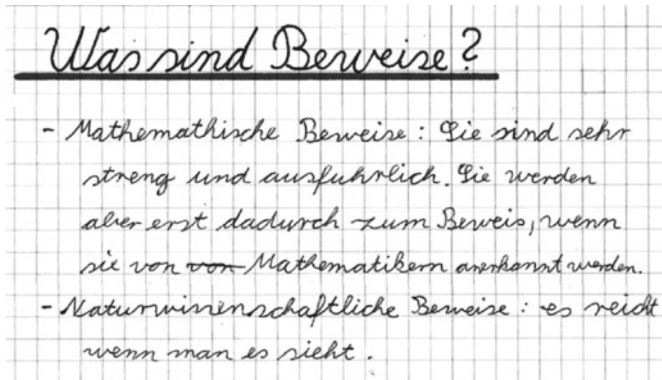
$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}$$

mit den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}.$$

▶ **Beweis 2.4.3** Es ist nichts mehr zu beweisen. Der Term $(a + b)^n$ enthält, wenn er in Summanden aufgespalten ist, Vielfache der Terme a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, $\ldots$, a^2b^{n-2}, ab^{n-1}, b^n. Die Koeffizienten zu diesen Summanden sind durch $\binom{n}{i}$ mit $i \in \mathbb{N}_0$ und $0 \le i \le n$ festgelegt. Satz 2.4.2 hat gezeigt, dass diese Binomialkoeffizienten die behauptete Form haben. □

Aus der Schule kennt man in der Regel drei binomische Formeln. Satz 2.4.3 zeigt nun, dass mit der ersten Formel (nämlich $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$) eigentlich schon die zweite Formel (und das ist $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$) gegeben ist. Durch die zweite Formel wird suggeriert, dass a und b beide positive Zahlen sein müssen, was natürlich nicht der Fall ist. So könnte man genauso $(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a \cdot (-b) + b^2$ schreiben und hätte aus der zweiten Formel ganz unkompliziert die erste Formel gemacht. Gar nichts mit diesen beiden Formeln hat schließlich die so genannte dritte binomische Formel $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ zu tun.


Was sind Beweise?

- Mathemathische Beweise: Sie sind sehr streng und ausfuhrlich. Sie werden aber erst dadurch zum Beweis, wenn sie von ~~von~~ Mathematikern anerkannt werden.
- Naturwissenschaftliche Beweise: es reicht wenn man es sieht.

Beweisen aus der Sicht von Matthias, 8. Klasse eines Gymnasiums

2.5 Ein Exkurs über Evidenz und Wahrheit

Zarte Gemüter seien gewarnt, denn der nun folgende Abschnitt wird ein wenig abstrakt. Wer Lust hat, sich auf ein Gedankenspiel einzulassen, sei zum Weiterlesen ermuntert. Allerdings ist der Abschnitt recht unabhängig von den anderen und sicherlich keine Voraussetzung für das Verständnis der übrigen Kapitel des Buchs.

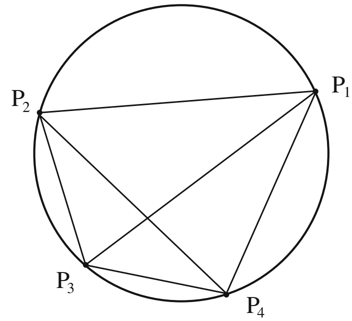
Das Zitat von Matthias sagt eigentlich schon aus, worum es in diesem Abschnitt geht: Empirische Argumente sind keine mathematischen Argumente, und wer sich darauf einlässt, wird leicht das Opfer von Irrtümern. Mathematische Behauptungen erfordern Beweise. Probiert man stattdessen nur einige Spezialfälle aus und schließt aus dem Ergebnis auf einen allgemein gültigen Sachverhalt, so kann man sehr leicht einen Fehler machen. Dies zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 2.5.1

Es sei K die Kreisscheibe (und das ist natürlich, wie aus der Schule gewohnt, der Kreis zusammen mit dem Kreisrand) vom Radius 1 um den Nullpunkt in der Ebene $\mathbb{R}^2$ (die auch aus der Schule bekannt ist). Auf dem Rand seien n verschiedene Punkte $P_1, \ldots, P_n$ ausgewählt, die alle untereinander geradlinig verbunden sind. Man nimmt an, dass durch keinen Punkt innerhalb K mehr als zwei Verbindungsgeraden gehen. Das lässt sich immer einrichten. Wenn es nämlich nicht ohnehin für die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ so gilt, dann verändert man gegebenfalls einzelne Punkte P_j (Abbildung 2.1).

Die Nummerierung der Punkte $P_1, \ldots, P_n$ sei so gewählt, dass sie auf dem Einheitskreisrand entgegen dem Uhrzeigersinn aufeinander folgen. Mit G_n sei die Anzahl der Teilbereiche bezeichnet, in die K durch diese Linien zerlegt wird. Durch Ausprobieren erhält man den

Abb. 2.1 Kreisteilung für $n = 4$



Zusammenhang zwischen n und G_n für kleine Werte von n, wie es die folgende Tabelle zeigt.

n	1	2	3	4	5
G_n	1	2	4	8	16

Der Fall $n = 1$ ist aus Gründen der Vollständigkeit einbezogen. Wenn es nur einen einzigen Punkt gibt, dann gibt es keine Gerade, und damit bleibt der Kreis ein einziges Gebiet.

Die Werte in der Tabelle legen die Vermutung nahe, dass $G_n = 2^{n-1}$ ist. Aber diese Annahme ist leider *falsch*. Ebenfalls durch Abzählen sieht man nämlich $G_6 = 31(!)$. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Anzahl der Gebiete G_n von der konkreten Lage der Punkte P_i unabhängig ist (und das stimmt auch, soll hier aber nicht weiter diskutiert werden).

Es soll nun G_n für beliebiges n ermittelt werden. Dazu wird zunächst überlegt, wie sich G_n für $n > 1$ aus G_{n-1} erhalten lässt. Sind die Punkte $P_1, \ldots, P_{n-1}$ alle untereinander geradlinig verbunden, so gehen von jedem dieser Punkte jeweils genau $n - 2$ Verbindungslinien aus.

Nun werde ein Punkt P_n geeignet gewählt, also so, dass auch bei Einbeziehung von P_n durch keinen Punkt im Kreisinnern mehr als zwei Verbindungsgeraden gehen und die Nummerierung „passt“. Wegen der Anordnung der Punkte auf dem Kreisrand gemäß ihrer Nummerierung gilt dann Folgendes (und das macht man sich am besten mit Hilfe einer konkreten Zeichnung klar).

Die Verbindungsstrecke $\overline{P_nP_k}$ mit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ trifft die Strecke $\overline{P_jP_i}$ genau dann, wenn $i < k < j$ oder $j < k < i$ gilt. Wegen $\overline{P_jP_i} = \overline{P_iP_j}$ reicht es, die Anzahl der Paare (i, j) mit $1 \leq i < k < j \leq n-1$ zu ermitteln. Man überlegt sich, dass es genau $(k-1)(n-1-k)$ viele sind. Bei jedem Schnitt von $\overline{P_nP_k}$ mit einer solchen Strecke $\overline{P_jP_i}$ erhöht sich die Anzahl der bereits gezählten Teilgebiete von K um 1. Dasselbe gilt beim Auftreffen der Verbindungsstrecke $\overline{P_nP_k}$ im Punkt P_k. Nach Einbeziehung der Verbindungsstrecke $\overline{P_nP_k}$ wächst damit die Anzahl der Teilgebiete von K um $1 + (k-1)(n-1-k) = 2 + n(k-1) - k^2$. Dies gilt für alle $k = 1, \ldots, n-1$, also ist

$$G_n = G_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} (2 + n(k-1) - k^2)$$

und somit

$$\begin{aligned} G_n &= G_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} 2 + n \sum_{k=1}^{n-1} (k-1) - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= G_{n-1} + 2(n-1) + n \sum_{k=1}^{n-1} (k-1) - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= G_{n-1} + 2(n-1) + n \sum_{k=1}^{n-2} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2. \end{aligned}$$

Das sieht alles noch sehr unhandlich aus, aber es gibt Aussicht auf Besserung, wenn man diesen Term vereinfacht. Für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, deren Quadrate bzw. deren dritte Potenzen (was ein wenig später gebraucht wird) gelten nämlich die folgenden Formeln:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Alle drei Gleichungen finden sich in jeder Formelsammlung, aber auch als Übungsaufgaben am Ende dieses Kapitels. Weil also (wie es oben schon einmal steht)

$$G_n = G_{n-1} + 2(n-1) + n \sum_{k=1}^{n-2} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

ist, ergibt sich damit

$$G_n = G_{n-1} + 2(n-1) + n \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{2} - \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6},$$

und man rechnet schließlich

$$G_n = G_{n-1} + \frac{n^3 - 6n^2 + 17n - 12}{6}$$

aus. Setzt man $q_n = \frac{n^3-6n^2+17n-12}{6}$, so erhält man

$$G_n = G_{n-1} + q_n = G_{n-2} + q_{n-1} + q_n = \ldots = G_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n.$$

Nun ist $G_1 = 1$, man hat also einen Anfangswert. Außerdem ist $q_1 = 0$ und somit

$$\sum_{j=2}^{n} q_j = \sum_{j=1}^{n} q_j.$$

Also bekommt man nach den Regeln des Rechnens mit Summen

$$G_n = G_1 + \sum_{j=2}^{n} q_j = 1 + \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 + \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n} j^3 - \sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{17}{6}\sum_{j=1}^{n} j - 2n.$$

Jetzt werden alle drei Formeln (zur Summe der ersten n Zahlen, ihrer Quadrate und ihrer dritten Potenzen) benutzt, und man bekommt nach einigen genauso einfachen wie langweiligen Rechnungen

$$G_n = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}$$

als Ergebnis. Die Folge der Zahlen G_n beginnt also eher zufällig genauso wie die Folge $(a_n) = 2^{n-1}$, und die bereits begonnene Wertetabelle kann durch

n	1	2	3	4	5	6	7	8
G_n	1	2	4	8	16	31	57	99

fortgesetzt werden.

2.6 Ein Axiomensystem für die natürlichen Zahlen

What's in a name? that which we call a rose by any other name would smell as sweet.

William Shakespeare: Romeo and Juliet

2.6.1 Was sind die natürlichen Zahlen?

Auf den vorangegangenen Seiten sind einige Untersuchungen zu und mit natürlichen Zahlen durchgeführt worden. Die Frage, woher diese Zahlen genommen werden können und wie es um ihre Existenz bestellt ist, wurde dabei nicht gestellt. Genauso ist es auch im Verlauf der mathematischen Wissenschaftsgeschichte gewesen, denn diese eigentlich grundlegenden Überlegungen sind erst sehr spät angestellt worden. Das trifft auf die natürlichen Zahlen genauso zu wie auf die reellen und die komplexen Zahlen, wenn man von einigen Pionieren absieht, die jeweils ihrer Zeit voraus waren.

Die natürlichen Zahlen, für deren Gesamtheit die Abkürzung $\mathbb{N}$ benutzt wird, kann man nicht sehen (bis auf Modelle für kurze Abschnitte), und es ist oben schon begründet worden, dass es prinzipiell keine Verwirklichung für diese unendliche Menge im Universum geben kann. Obendrein zeigt das Beispiel von Hilberts Hotel, dass sie doch recht absurd anmutende Eigenschaften aufweist. Die Frage, ob es die Menge $\mathbb{N}$ gibt, ist also keineswegs nur eine rhetorische Floskel ohne Tiefgang. Die natürlichen Zahlen anzuerkennen hat durchaus etwas von einem Glaubensbekenntnis, denn beweisbar ist ihre Existenz nicht.

Die natürlichen Zahlen existieren also nur in der Vorstellung. Man kann, ähnlich wie Immanuel Kant (1724–1804) in Betrachtung seines „inneren moralischen Gesetzes und des bestirnten Himmels über ihm" Bewunderung und Ehrfurcht empfinden vor der Leistung der Evolution, die das Gehirn ja vermutlich zu profaneren Zwecken geschaffen hat als zum Nachdenken über unendliche Mengen. Dass es trotzdem funktioniert, und immerhin gar nicht so schlecht, ist vor diesem Hintergrund sicher nicht selbstverständlich. So gesehen hätte dann die Natur tatsächlich die natürlichen Zahlen geschaffen.

Historisches zu den natürlichen Zahlen

Die Methode des Zählens zur Bestimmung der Größe einer Gesamtheit (etwa einer Mammutherde) ist sicherlich so alt wie die Menschheit. Mit Entwicklung der Schrift wurden auch Zahlzeichen (Ziffern) eingeführt, die meistens auf dem Dezimalsystem beruhen und größere Zahlen durch Zusammensetzung darstellen (in Abschn. 3.1 werden Beispiele vorgestellt). Der Grund dafür ist offenbar in der Anzahl der Finger zu suchen. Das englische Wort *digit* für Ziffer stammt vom lateinischen *digitus* (Finger) ab, und man kann vermuten, dass die sprachliche Verwandtschaft des Zahlwortes „zehn" mit „Zehen" kein Zufall ist.

Die bis heute üblichen Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ sind um 400 v. Chr. in Indien entstanden, wobei das Symbol 0 zunächst nicht für eine Zahl stand, sondern nur als Hilfsmittel in Zusammensetzungen wie 201 Sinn machte. Der wesentliche Trick der Darstellung besteht jedoch in der Zusammenfassung zu Zehner-Sets. Die Eins vor der Null markiert ein komplettes Set. Die Ziffernfolge 117 steht für „ein komplettes Zehner-Set von Zehner-Sets und ein weiteres Zehner-Set und Sieben". In Kapitel 3 wird darauf noch explizit eingegangen. Diese systematische Zusammenfassung kommt einer übersichtlichen Rechentechnik sehr entgegen und ist dem römischen Zahlensystem weit überlegen.

Die Null als Zahl sowie die negativen ganzen Zahlen wurden erst einige hundert Jahre später einbezogen. Dieses Wissen geriet, jedenfalls in Europa, wieder in Vergessenheit. Adam Ries erklärt die natürlichen Zahlen in seinem dritten Rechenbuch

(*Rechenung nach der lenge/auff den Linihen und Feder*) 1550 unter der Überschrift *Numerirn/Zelen* wie folgt: „Zehen sind figurn/darmit ein jede zal geschrieben wirt/sind also gestalt. 1.2.3.4.5.6.7.8.9.0. Die ersten neun bedeuten/die zehent als 0 gibt in fursetzung mehr bedeutung/gilt aber allein nichts/wie hie 10.20.30. …"

Ein unumstößliches Prinzip auf dieser Welt besagt in einer verbreiteten Formulierung: Von nichts kommt (auch) nichts. Das gilt genauso innerhalb der Mathematik. Man kann die natürlichen Zahlen nicht einfach aus dem Nichts hervorzaubern. Jede Überlegung braucht ein Fundament, auf dem sie aufgebaut ist. Dieses Fundament muss nicht unbedingt fixiert sein, vielmehr kann man es, um bestimmte Ergebnisse zu erhalten, tiefer oder höher ansetzen. Wenn man zum Beispiel ein Fahrrad haben möchte, so kann man mit ausreichenden Geldmitteln ausgestattet in ein Fahrradgeschäft gehen und ein Fahrrad kaufen. Man kann aber auch Rohmaterial im Baumarkt kaufen und dann (Geschick vorausgesetzt) ein Fahrrad basteln. Das Fundament noch tiefer anzusetzen, würde vielleicht heißen, dass man sich Eisenerz besorgt, es verhüttet und so irgendwann auch einmal (ein besonders stolzer) Besitzer eines Fahrrads wird. Klar ist auf jeden Fall, dass es ohne Zutaten (oben Fundament genannt) nicht geht und dass diese Zutaten je nach Ausgangspunkt verschieden sein können.

Wenn man sich nun auf den Standpunkt stellt, die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in ihrer Gesamtheit würde es eben einfach geben, so ist das wegen der geschilderten eher unheimlichen Eigenschaften nicht ganz befriedigend. Man kann die Eigenschaften intuitiv eben nicht in den Griff bekommen. Ein besseres Gefühl hat man als Mathematikerin oder Mathematiker hingegen, wenn das Fundament tiefer angesetzt und weitmöglichst abgesichert wird. Und dann begibt man sich in dieser Wissenschaft gerne auf ein dem Eisenerz vergleichbares Niveau. Man legt Grundlagen fest und nennt sie dann in der Regel *Axiome*. Ein Axiom ist ein mathematischer Grundsatz, der nicht bewiesen werden kann. Mehrere Axiome bilden ein so genanntes *Axiomensystem*. Im Folgenden wird deutlich werden, was darunter zu verstehen ist.

2.6.2 Die Peano-Axiome

Ein Vorschlag für eine axiomatische Beschreibung der natürlichen Zahlen, der heute zum Allgemeingut einschlägiger mathematischer Lehrveranstaltungen gehört, sind die so genannten *Peano-Axiome*, die auf den italienischen Mathematiker Giuseppe Peano (1858–1932) zurückgehen. Er hatte den Gedanken, die dem Induktionsprinzip zugrunde liegenden Ideen in Form von Axiomen zur Einführung der natürlichen Zahlen zu verwenden. Diese Axiome sind dann sozusagen nichts weiter als Spielregeln im Umgang mit diesen Zahlen. Alles, was über $\mathbb{N}$ und die Elemente von $\mathbb{N}$ behauptet wird, muss sich aus diesen Axiomen unter Anwendung der logischen Schlussregeln herleiten lassen. Eine Aussage hat erst Relevanz, wenn diese Herleitung gelungen ist. Sie ist dann in der auf den Axiomen gegründeten Theorie wahr. Sie ist kein Erfahrungssatz mehr, hat mehr als empirische Bedeutung und ist in einen logisch konsistenten Rahmen eingebunden. Genau das ist es, was (diese) Wissenschaft ausmacht.

Viele Menschen halten die Mathematik für eine Wissenschaft, in der das Fundament zwingend gegeben ist. Das ist allerdings nicht der Fall. Ob man sich entschließt, das Gedankengebäude auf ein bestimmtes Axiomensystem zu gründen oder nicht, hängt von pragmatischen Überlegungen ab. So stellt sich die Frage, ob man (mit vertretbarem Aufwand) von den Axiomen in endlich vielen Schritten zu den angestrebten Zielen gelangt. Ist das der Fall, so wird man das gewählte Axiomensystem beibehalten, solange sich kein Widerspruch in den Konsequenzen ergibt. Andernfalls ist es zu verwerfen oder entsprechend zu revidieren. Hat man nun zwei Axiomensysteme A_1, A_2 und lassen sich die Axiome des ersten aus denen des zweiten herleiten, so liefert das zweite natürlich jedes Ergebnis, welches das erste ermöglicht. In der von A_2 erzeugten Theorie sind die Axiome aus A_1 beweisbare Aussagen, also ist A_2 „tiefer" als A_1. Ob man nun die Resultate der aus A_1 folgenden Theorie T auf A_1, oder lieber auf das tiefer angesetzte Fundament A_2 aufbauen möchte, ist für die Sätze innerhalb von T prinzipiell egal, man muss sich nur für eines entscheiden, denn auf nichts lässt sich nichts gründen. Auch am Beispiel der natürlichen Zahlen wird sich zeigen, dass es für ihre Herleitung verschieden „tief" liegende mögliche Axiomensysteme gibt.

Sei nun N irgendeine nicht leere Menge. Wenn man in N (irgendwie) fortgesetzt zählen kann, so ist es vernünftig, N als ein Modell für die natürlichen Zahlen zu schreiben, und man darf dann auch N gleich als *die* Menge der natürlichen Zahlen betrachten. So könnte man sich N als unendlich langes Maßband oder als unendliche Menge kleiner Würfelchen vorstellen (bei denen dann allerdings klar sein müsste, welcher der erste, welcher der zweite, welcher der siebte usw. ist).

Wodurch kann man nun eine solche „Zählstruktur" mathematisch sauber erfassen? Eine Möglichkeit bieten die folgenden Axiome, die *Peano-Axiome* genannt werden. Nochmals: Dabei ist N eine nicht leere Menge.

Axiom 2.1 Peano-Axiome

(P1) Jedem $n \in N$ ist genau ein $n' \in N$ zugeordnet, das der *Nachfolger* von n heißt.
(P2) Es gibt ein $a \in N$ (wie „Anfang"), das für kein $n \in N$ Nachfolger ist.
(P3) Sind $n, m \in N$ verschieden, so sind auch die Nachfolger n', m' verschieden (dasselbe wird ausgedrückt durch: Aus $n' = m'$ folgt $n = m$).
(P4) Ist M eine Teilmenge von N mit $a \in M$ und enthält M zu jedem Element auch dessen Nachfolger, so gilt $M = N$.

Erfüllt eine Menge N alle vier Axiome, so heißt N die Menge der natürlichen Zahlen, und man schreibt dann $\mathbb{N}$ statt N. Alle vertrauten Eigenschaften der natürlichen Zahlen müssen sich entsprechend aus den Axiomen herleiten lassen.

Ist nun aber wirklich $N = \mathbb{N}$, also genau das, was man als die Menge der natürlichen Zahlen kennt? Gibt es keinen Unterschied zwischen einem geeigneten (unendlich langen) Maßband und den natürlichen Zahlen? Das kann man sich Schritt für Schritt überlegen. Dazu nimmt man beispielsweise an, dass das Maßband (wie üblich) in kleine Stücke gleicher Länge unterteilt ist. Dann hat jedes dieser Stücke einen Nachfolger im Sinne von (P1). Außerdem gibt es ein Anfangsstück, sodass auch (P2) erfüllt ist. Verschiedene Stücke haben verschiedene Nachfolger, woraus die Gültigkeit von (P3) folgt. Schließlich kann man auch (P4) nachvollziehen, denn der Beginn mit dem ersten Stück sichert das gesamte Maßband. Also erfüllt auch das Maßband das Axiomensystem.

Mit einem Axiomensystem (wofür auch immer) verbindet man zwei nahe liegende Forderungen unterschiedlicher Qualität:

- Aus den Axiomen soll sich kein Widerspruch (also nicht gleichzeitig eine Aussage und ihre Verneinung) herleiten lassen können.
- Die Axiome sollen nichts Überflüssiges enthalten – das ist eine stilistische Forderung, keine inhaltliche.

Man kann sich überlegen, dass im Peano'schen Axiomensystem keine der vier Forderungen weggelassen werden kann. Immer würde man dann etwas anderes beschreiben können als das, was mit den natürlichen Zahlen gemeint ist. Wird zum Beispiel die letzte Forderung gestrichen, +o erfüllt die Menge aller reellen Zahlen größer oder gleich 1 die restlichen Axiome ohne weiteres, wenn wir $n' := n + 1$ (Addition in den reellen Zahlen) setzen.

Beispiel 2.6.1

Es soll nun gezeigt werden, wie aus den Peano-Axiomen vertraute Eigenschaften natürlicher Zahlen abgeleitet werden können. Dazu soll die zu Beginn dieses Kapitels (beim Nachweis eines kleinsten Elements in jeder nicht leeren Teilmenge von $\mathbb{N}$) schon verwendete Aussage „Zu jeder natürlichen Zahl n existieren nur endlich viele $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$" noch einmal aufgegriffen werden.

Bildet man, mit einer natürlichen Zahl a beginnend, fortgesetzt Nachfolger, so ist dies dasselbe wie das Zählen von a an. Alle Nachfolger a', $(a')'$, ... sind größer als a (man vergleiche die auf Seite 21 gegebene Definition der Kleinerbeziehung bzw. Größerbeziehung). Wegen (P4) muss sich jede natürliche Zahl n durch eine endliche fortgesetzte Nachfolgerbildung erhalten lassen, da die so erhaltene Menge $N = \{a, a', \ldots\}$ die in (P4) gestellten Anforderungen erfüllt. Da nach (P4) $N = \mathbb{N}$ gilt, muss also auch n in *endlich vielen Schritten* durch Nachfolgerbildung aus a erhalten werden. Alle Zahlen, die man dabei von a bis n bekommt, sind kleiner oder gleich n, alle anderen sind nach der Feststellung zu Beginn des Absatzes größer als n.

Anmerkung

In der Literatur werden in der Regel fünf Peano-Axiome angeführt, von denen das erste lautet: „1 ist eine natürliche Zahl". Die Nummerierung der anderen Axiome verschiebt sich dann entsprechend. Mit diesem ersten „Axiom" ist jedoch keine Aussage über die Struktur der Menge der natürlichen Zahlen verbunden, sondern es wird nur ein Name für eine bestimmte „ausgezeichnete" natürliche Zahl festgelegt.

Macht man sich klar, dass es zum Zeitpunkt der Einführung der natürlichen Zahlen mittels der Peano-Axiome bestimmt nicht auf den Namen dieses ausgezeichneten Elements ankommt, so sieht man ein, dass dieses (übliche) erste Axiom eine andere Qualität als die folgenden Axiome hat. Man kann durch Nennung der hochgradig besetzten Bezeichnung „1" ganz leicht in die Irre geführt werden. Es kann keine 1 gemeint sein, die einer irgendwie schon vorhandenen Zahlenmenge entstammt, denn dadurch würde sich das gesamte Axiomensystem ad absurdum führen.

An dieser Stelle, das heißt, wenn die natürlichen Zahlen mit Hilfe der Peano-Axiome eingeführt werden, kommt der Zahl 1 (die dem Element a aus (P2) entspricht) noch keine arithmetische Bedeutung zu. Erst später, nämlich dann, wenn die Rechenoperationen erklärt werden, erhält das Anfangselement dann tatsächlich seine Rolle, zum Beispiel die, dass es als Faktor in einem Produkt den Wert dieses Produkts nicht ändert. Auch die Betrachtungen im folgenden Abschnitt zeigen, dass es keineswegs notwendig ist, sich das Anfangselement a der natürlichen Zahlen als die 1 in den schon fertig vorhanden gedachten reellen Zahlen vorzustellen.

2.6.3 Modelle zu den Peano-Axiomen

Welche Auswirkungen auf die Struktur von $\mathbb{N}$ haben die einzelnen Axiome von Peano, was ist jeweils deren Sinn?

In den Abbildung 2.2, 2.3 und 2.4 sind Modelle angegeben, in denen manche der Peano-Axiome erfüllt sind und andere nicht. Die Elemente der Grundmenge sind in Form der grauen Quadrate dargestellt. Die Pfeile geben den jeweiligen Nachfolger an.

Abb. 2.2 In diesem Beispiel ist (P1) nicht erfüllt, denn nur zwei der drei Elemente besitzen einen Nachfolger. Die restlichen Axiome gelten dagegen: Das mit A bezeichnete Feld hat keinen Vorgänger, wie (P2) fordert. Es gibt keine zwei verschiedenen Elemente, die den Nachfolger gemeinsam haben. Jede Teilmenge, die das Feld A enthält und mit jedem Element auch den Nachfolger, ist bereits die gesamte Menge

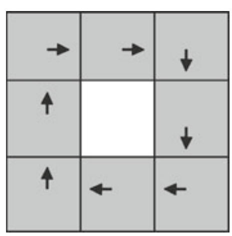


Abb. 2.3 In diesem Beispiel ist (P2) nicht erfüllt. Jedes Element besitzt einen Vorgänger, keines spielt also die A zukommende Rolle. Aber (P1) und (P3) gelten hier, denn jedes Element hat einen Nachfolger und kein Element besitzt mehr als einen Vorgänger. Da das Anfangselement fehlt, ist (P4) hier natürlich sinnlos

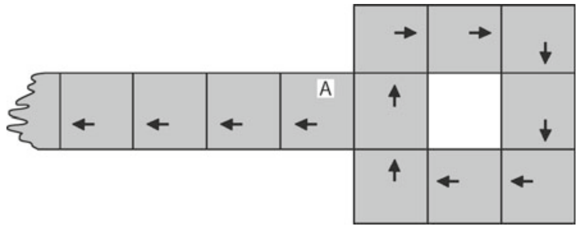


Abb. 2.4 In diesem Beispiel ist nun (P4) nicht erfüllt, wohl aber (P1), (P2) und (P3). Man kann eine Teilmenge herausnehmen (die nämlich aus dem Element A und seinen Nachfolgern besteht), die nicht mit der ganzen Menge übereinstimmt

2.6.4 Mengentheoretische Begründung von $\mathbb{N}$

Der nun folgende Abschnitt ist wirklich nur etwas für Hartgesottene. Er kann nicht nur beim ersten Lesen ohne Probleme übersprungen werden. Es geht hier darum, die natürlichen Zahlen aus den Axiomen der Mengenlehre herzuleiten (wobei die Axiome aber nicht näher ausgeführt werden sollen).

Dabei erscheinen diese Zahlen dann als Mengen, die nach folgender Vorschrift zu bilden sind: Es ist $1 := \emptyset$ und $n' := n \cup \{n\}$. Das erste Element („1" oder „a") ist damit die leere Menge. Der Nachfolger „$1'$" wird definiert als Vereinigung des ersten Elements mit der Menge, die dieses erste Element enthält. Entsprechend ist $1' = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$. Alle weiteren Elemente entstehen ebenfalls, wenn man den entsprechenden Vorgänger (und das ist bereits eine Menge) mit der Menge vereinigt, die diesen Vorgänger enthält. Die ersten Mengen der Folge sind also

$$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \Big\{\emptyset\,,\ \{\emptyset\}\Big\},\ \Big\{\emptyset\,,\ \{\emptyset\},\ \Big\{\emptyset\,,\ \{\emptyset\}\Big\}\Big\},\ldots$$

mit der folgenden „Rollenverteilung":

$$(1 =)\,\emptyset, \quad (2 := 1' =)\,\{\emptyset\}, \quad (3 := 2' =)\,\Big\{\emptyset\,,\ \{\emptyset\}\Big\},$$

$$(4 := 3' =)\,\Big\{\emptyset\,,\ \{\emptyset\},\ \Big\{\emptyset\,,\ \{\emptyset\}\Big\}\Big\},\ldots$$

Man kann sich davon überzeugen, dass die Peano-Axiome für diese Gesamtheit von Mengen erfüllt sind. Die Mengen bilden also „die" natürlichen Zahlen, denn hierunter darf jede Menge verstanden werden, in der die Peano-Axiome erfüllt sind. Es wird durch dieses Beispiel vielleicht ein wenig klarer, dass verschiedene Modelle für die natürlichen Zahlen letztendlich nur durch Umbenennung auseinander hervorgehen.

2.7 Übungsaufgaben

1. Es seien k, m, n natürliche Zahlen. Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche falsch?
   a) Ist k ein Teiler von n und von m, so auch von $n + m$.
   b) Ist k ein Teiler von n aber keiner von m, so ist k kein Teiler von $n + m$.
   c) Ist k kein Teiler von n und keiner von m, so auch keiner von $n + m$.
   d) Ist k ein Teiler von n und von m, so auch von $n \cdot m$.
   e) Ist k ein Teiler von n, aber keiner von m, so ist k kein Teiler von $n \cdot m$.
   f) Ist k kein Teiler von n und keiner von m, so auch keiner von $n \cdot m$.

   Dabei sollen Schulkenntnisse zum Begriff des Teilers einer natürlichen Zahl verwendet werden.
2. Es sei n eine natürliche Zahl. Man zeige, dass dann genau eine der Zahlen n, $n+1$, $n+2$ durch 3 teilbar ist.
3. Beweisen Sie die für alle $n \in \mathbb{N}$ gültige Gleichung:

   $$\sum_{i=1}^{n}(i \cdot i!) = (n+1)! - 1.$$

   In Definition 2.3.1 kann man übrigens nachsehen, was unter $n!$ zu verstehen ist.
4. Ein Gewinnspiel für zwei Personen: Es wird abwechselnd und fortlaufend gezählt, wobei jeder Spieler nach eigenem Ermessen eine oder zwei Zahlen weiterzählen darf. Begonnen wird mit 1, das heißt also, Spieler A darf „1" oder „1, 2" sagen, worauf Spieler B mit „2" bzw. „2, 3" und im zweiten Fall mit „3" bzw. „3, 4" fortsetzen kann. Wer „20" sagen muss, hat verloren.

   Gibt es für einen der beiden Spieler eine Strategie, die sicher zum Gewinn führt?
5. Die folgenden Gleichungen für die Summe der ersten m natürlichen Zahlen, deren Quadrate bzw. deren dritte Potenzen sollen bewiesen werden:
   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$,
   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$,
   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2$.
6. Man zeige für alle natürlichen Zahlen n:
   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$,
   b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$.
7. Zeigen Sie, dass für die Fibonacci-Zahlen die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

8. Zeigen Sie, dass für die Fibonacci-Zahlen und für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > 1$ die Beziehungen
   a) $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$ und
   b) $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$
   erfüllt sind.
9. a) Es seien n verschiedene Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_n$ in der Ebene gegeben, von denen keine zwei parallel sein sollen. Kein Punkt der Ebene sei Schnittpunkt von mehr als zwei dieser Geraden. In wie viele Teile zerschneiden die Geraden die Ebene? Entwickeln Sie eine Idee für die gesuchte Zahl und beweisen Sie diese anschließend mit vollständiger Induktion.
   b) Wie verändert sich die Anzahl der Teile in a), wenn zwei oder mehr Geraden parallel sein dürfen?
10. Die folgenden Ungleichungen sind im jeweiligen Gültigkeitsbereich nachzuweisen.
   a) Für alle natürliche Zahlen $n \geq 3$ gilt:
   $$2n + 1 < 2^n.$$
   b) Unter Benutzung von a) zeige man, dass für $n \geq 4$ gilt:
   $$n^2 \leq 2^n.$$
   c) Sind die Ungleichungen in a) bzw. b) für $n = 1, 2$ bzw. $n = 1, 2, 3$ richtig oder falsch?
11. Man überprüfe für die folgenden Mengen X mit der jeweils gegebenen Nachfolger-Definition, welche der Peano-Axiome erfüllt sind und welche nicht (die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ werden mit Schulkenntnissen zur Definition der Mengen benutzt).
   a) $X = \mathbb{R}, x' = x + 1$ für alle $x \in X$.
   b) $X = \mathbb{R}\setminus\{0, -1, -2, -3, \ldots\},\ x' = x + 1$ für alle $x \in X$.
   c) $X = \{0, 2, 4, 6, \ldots\} \subset \mathbb{R},\ x' = x + 2$ für alle $x \in X$.
   d) $X = \{1, -1\} \subset \mathbb{R},\ x' = (-1) \cdot x$.
   e) $X = \{-1, 0, 1\},\ -1' = 0,\ 0' = -1,\ 1' = 0$.
   Kleiner Warnhinweis: Die Aufgabe verlangt eine absolut formale Betrachtungsweise.
12. Zeigen Sie, dass das Anfangselement a in jedem Modell der natürlichen Zahlen eindeutig bestimmt ist. Es gibt also genau ein a mit den gewünschten Eigenschaften aus Axiom 2.1.

http://www.springer.com/978-3-642-39772-1

Basiswissen Zahlentheorie
Eine Einführung in Zahlen und Zahlbereiche
Reiss, K.; Schmieder, G.
2014, XVIII, 427 S. 36 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-39772-1