

Mathematik und Statistik

P. Ruge
C. Birk
M. Wermuth

MATHEMATIK

P. Ruge, C. Birk

1 Mengen, Logik, Graphen

1.1 Mengen

1.1.1 Grundbegriffe der Mengenlehre

Eine *Menge* M ist die Gesamtheit ihrer *Elemente* x . Man schreibt $x \in M$ (x ist Element von M) und fasst die Elemente in geschweiften Klammern zusammen. Eine erste Möglichkeit der Darstellung einer Menge ist die Aufzählung ihrer Elemente:

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}. \quad (1-1)$$

Weit reichender ist folgende Art der Darstellung: Eine Menge M im klassischen Sinn ist eine Gesamtheit von Elementen x mit einer bestimmten definierenden Eigenschaft P , die eine eindeutige Entscheidung ermöglicht, ob ein Element a aus einer Klasse („Vorrat“) A zur Menge M gehört.

$$\begin{aligned} a \in M & \text{ falls } P(a) \text{ wahr: } \mu = 1, \\ a \notin M & \text{ falls } P(a) \text{ nicht wahr: } \mu = 0. \end{aligned}$$

Die *Zugehörigkeitsfunktion* $\mu(a)$ ordnet jedem Objekt einen der Werte 0 oder 1 zu. Man schreibt

$$M = \{x \mid x \in A, P(x)\}. \quad (1-2)$$

M ist die Menge aller Elemente aus A , für welche die Eigenschaft P zutrifft. **Beispiel:**

$$\begin{aligned} M_1 &= \{x \mid x \in \mathbb{C}, x^4 + 4 = 0\} \\ &= \{1 + j, 1 - j, -1 + j, -1 - j\}. \quad j^2 = -1. \end{aligned}$$

Tabelle 1-1. Bezeichnungen der Standard-Zahlenmengen

Natürlich	Ganz	Rational	Reell	Komplex
$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$

Gewisse Standard-Zahlenmengen werden durch bestimmte Buchstabensymbole gekennzeichnet.

Leere Menge enthält kein Element $\emptyset = \{\}$

Endliche Menge enthält endlich viele Elemente

Mächtigkeit $|M|$ auch Kardinalität $\text{card}(M)$ einer endlichen Menge M ist die Anzahl ihrer Elemente.

Gleichmächtigkeit A ist gleichmächtig B , $A \sim B$, wenn sich jedem Element von A genau ein Element von B zuordnen lässt und umgekehrt. Zum Beispiel:

$$\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\},$$

$$\mathbb{U} = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}.$$

Zu jedem Element k aus $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es ein Element $2k - 1$ aus $\mathbb{U}$ und umgekehrt. Zudem sind alle Elemente von $\mathbb{U}$ in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ enthalten.

Unendliche Menge Eine Menge A ist unendlich, falls sich eine echte Teilmenge B von A angeben lässt, die mit A gleichmächtig ist.

Abzählbarkeit Jede unendliche Menge, die mit $\mathbb{N}$ gleichmächtig ist, heißt abzählbar.

Überabzählbarkeit Eine Menge M heißt überabzählbar, falls M nicht abzählbar ist.

Kontinuum Jede Menge, welche die Mächtigkeit der reellen Zahlen hat, heißt Kontinuum.

Fuzzy-Menge (unscharfe Menge). Unter einem Element f einer Fuzzy-Menge versteht man ein Paar aus einem Objekt x und der Bewertung $\mu(x)$ seiner Mengenzugehörigkeit mit Werten aus dem Intervall $[0, 1]$; d. h., $0 \leq \mu \leq 1$. Die Elemente werden einzeln aufgezählt,

$$\text{Element } f = (x, \mu(x)), \mu \in [0, 1], \\ F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\},$$

oder durch geschlossene Darstellung der Objekte und der Bewertung wie im folgenden **Beispiel**.

Die Fuzzy-Mengen

$$F_1 = \{(x, \mu(x)) \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } \mu = (1 + x^2)^{-1}\}, \\ F_2 = \{(x, \mu(x)) \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } \mu = (1 + x^4)^{-1}\}$$

können mit den die Unschärfe andeutenden Namen $F_1 = \text{NAHENULL}$, $F_2 = \text{SEHRNAHENULL}$ belegt werden.

Weitere Einzelheiten und Anwendungen siehe in der Literatur [1]–[4].

1.1.2 Mengenrelationen und -operationen

Mengen und ihre Beziehungen zueinander lassen sich durch Punktmenge in der Ebene, z. B. Ellipsen, veranschaulichen; sog. Venn-Diagramme, siehe Bild 1-1.

Gleichheit, $A = B$

Jedes Element von A ist auch Element von B und umgekehrt.

Teilmenge, $A \subseteq B$

A Teilmenge von B . Jedes Element von A ist auch Element von B . Gleichheit ist möglich.

Echte Teilmenge, $A \subset B$

Gleichheit wird ausgeschlossen.

Potenzmenge, $P(M)$

Potenz von M . Menge aller Teilmengen der Men-

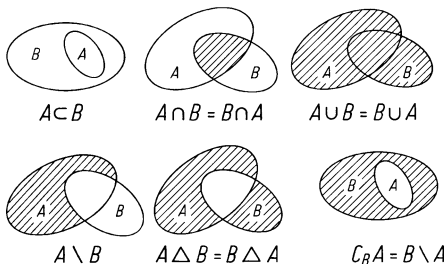


Bild 1-1. Venn-Diagramme. Ergebnismengen sind schraffiert

ge M . Zum Beispiel $M = \{a, b\}$,
 $P(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Durchschnitt, $A \cap B$

A geschnitten mit B . Menge aller Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören.

Vereinigung, $A \cup B$

A vereinigt mit B . Menge aller Elemente, die zumindest zu A oder B gehören.

Differenz, $B \setminus A$

B ohne A . Menge aller Elemente von B , die nicht gleichzeitig Elemente von A sind.

Komplement, $C_B A$

Komplement von A bezüglich B . Für $A \subseteq B$ ist $C_B A = B \setminus A$.

Symmetrische Differenz, $A \Delta B$

Menge aller Elemente von A oder B außerhalb des Durchschnitts:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Produktmenge, $A \times B$

A kreuz B . Menge aller geordneten Paare (a_i, b_j) , die sich aus je einem Element der Menge A und der Menge B bilden lassen. Zum Beispiel

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad B = \{b_1, b_2\},$$

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2),$$

$$(a_3, b_1), (a_3, b_2)\}.$$

Anmerkung: Bei einem geordneten Paar ist die Reihenfolge von Bedeutung: $(x, y) \neq (y, x)$ für $x \neq y$.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

Menge aller geordneten n -Tupel $(A_{1i}, A_{2j}, \dots, A_{nk})$ aus je einem Element der beteiligten Mengen.

1.2 Verknüpfungsmerkmale spezieller Mengen

Charakteristische Eigenschaften von Verknüpfungen und Relationen sind:

Kommutativität, $a \circ b = b \circ a$

a verknüpft mit b . Falls die Reihenfolge der Verknüpfung zweier Elemente a und b einer Menge unerheblich ist, dann ist die betreffende Verknüpfung in der Menge kommutativ.

Assoziativität, $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$

Gilt dies für alle Tripel (a, b, c) einer Menge, so

ist die betreffende Verknüpfung in der Menge assoziativ.

Distributivität, $a \circ (b \diamond c) = (a \circ b) \diamond (a \circ c)$

Gilt dies für zwei verschiedenartige Verknüpfungen (Kreis und Karo) angewandt auf alle Tripel einer Menge, so sind die Verknüpfungen in der Menge distributiv.

Reflexivität, $a \circ a$

Relation $\circ$ reflektiert a auf sich selbst; z. B. $a = a$, g parallel g (g Gerade).

Symmetrie, $a \circ b \leftrightarrow b \circ a$

Relation ist symmetrisch; z. B. $a = b$, g parallel h (g, h Geraden).

Transitivität, $a \circ b$ und $b \circ c \rightarrow a \circ c$

Zum Beispiel aus $a = b$ und $b = c$ folgt $a = c$.
Aus $A \subset B$ und $B \subset C$ folgt $A \subset C$.

Äquivalenz

Eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt Äquivalenzrelation, z. B. die Gleichheitsrelation.

Drei in der modernen Mathematik wichtige algebraische Strukturen sind Gruppen, Ringe und Körper.

Gruppe: Eine Menge $G = \{a_1, a_2, \dots\}$ heißt Gruppe, wenn in G eine Operation $a_1 \circ a_2 = b$ erklärt ist und gilt:

1. $b \in G$ Abgeschlossenheit
2. $(a_i \circ a_j) \circ a_k = a_i \circ (a_j \circ a_k)$ Assoziativität
3. $a_i \circ e = e \circ a_i = a_i$, $e \in G$ Existenz eines Einselementes
4. $a_i \circ a_i^{-1} = a_i^{-1} \circ a_i = e$ Existenz von inversen Elementen.

Abel'sche Gruppe. Es gilt zusätzlich:

5. $a_i \circ a_j = a_j \circ a_i$ Kommutativität.

Ring: Eine Menge $R = \{r_1, r_2, \dots\}$ heißt assoziativer Ring, wenn in R zwei Operationen $\circ$ und $\diamond$ erklärt sind und Folgendes gilt:

1. R ist eine Abel'sche Gruppe bezüglich der Operation $\circ$
2. $r_i \diamond r_j = c$, $c \in R$ Abgeschlossenheit
3. $r_i \diamond (r_j \diamond r_k) = (r_i \diamond r_j) \diamond r_k$ Assoziativität
4. $r_i \diamond (r_j \diamond r_k) = (r_i \diamond r_j) \diamond (r_i \diamond r_k)$ Distributivität.
 $(r_i \diamond r_j) \diamond r_k = (r_i \diamond r_k) \diamond (r_j \diamond r_k)$

Kommutativer Ring: Es gilt zusätzlich

5. $r_i \diamond r_j = r_j \diamond r_i$ Kommutativität.

Kommutativer Ring mit Einselement: Es gilt zusätzlich

6. $r_i \diamond e = e \diamond r_i = r_i$;
 e Einselement.

Körper: Kommutativer Ring mit Einselement und Division (außer durch $r_i = 0$).

7. $r_i \diamond r_i^{-1} = r_i^{-1} \diamond r_i = e$, $r_i \neq 0$.

1.3 Aussagenlogik

Gegenstand der Aussagenlogik sind die Wahrheitswerte verknüpfter Aussagen (Tabelle 1-2). a heißt eine Aussage, wenn a einen Sachverhalt behauptet. Besonders wichtig ist die Menge A_2 der zweiwertigen Aussagen, die entweder wahr (W, true) oder falsch (F, false) sein können; üblich ist auch eine Codierung durch die Zahlen 1 (wahr) und 0 (falsch).

Die logischen Verknüpfungen in Tabelle 1-3 entsprechen den Verknüpfungen der Boole'schen Algebra (siehe Abschnitt J 1).

Aussagenverknüpfungen, die unabhängig vom Wahrheitswert der Einzelaussagen stets den Wert wahr (1) besitzen, heißen *Tautologien* (Tabelle 1-4).

Tabelle 1-2. Verknüpfungen der Aussagenlogik (Junktoren)

Symbol/Verwendung	Sprechweise: Definition	Benennung
$\neg a$ (auch: $\bar{a}$)	nicht a	Negation
$a \wedge b$	a und b	Konjunktion, UND-Verknüpfung
$a \vee b$	a oder b	Disjunktion, ODER-Verknüpfung
Abgeleitete Verknüpfungen		
$a \rightarrow b$	a impliziert b :	$\bar{a} \vee b$ Implikation, Subjunktion
$a \leftrightarrow b$	a äquivalent b :	$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$ Äquivalenz, Äquijunktion
$a \nleftrightarrow b$	entweder a oder b :	$(a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$ Antivalenz, XOR-Funktion
$a \overline{\wedge} b$	a und b nicht zugleich:	$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$ NAND-Funktion
$a \overline{\vee} b$	weder a noch b :	$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$ NOR-Funktion

Tabelle 1-3. Wahrheitswerte von Aussagenverknüpfungen

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \rightarrow b$	$a \leftrightarrow b$	$a \bar{\wedge} b$	$a \bar{\vee} b$
		UND	ODER	Impli- ziert	Äqui- valent	NAND	NOR
0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0

Tabelle 1-4. Beispiele von Tautologien

Abtrennungsregel	$(a \wedge (a \rightarrow b)) \rightarrow b$
Indirekter Beweis	$(a \wedge (\bar{b} \rightarrow \bar{a})) \rightarrow b$
Fallunterscheidung	$((a \vee b) \wedge (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow c$
Kettenschluss	$((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c)$
Schluss auf eine Äquivalenz	$((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)) \rightarrow (a \leftrightarrow b)$
Kontraposition	$(a \rightarrow b) \rightarrow (\bar{b} \rightarrow \bar{a})$ $(\bar{b} \rightarrow \bar{a}) \rightarrow (a \rightarrow b)$

Tabelle 1-5. Wahrheitstabelle für den Kettenschluss

a	0	1	0	1	0	1	0	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	0	0	0	1	1	1	1
$u = a \rightarrow b$	1	0	1	1	1	0	1	1
$v = b \rightarrow c$	1	1	0	0	1	1	1	1
$w = a \rightarrow c$	1	0	1	0	1	1	1	1
$x = u \wedge v$	1	0	0	0	1	0	1	1
$x \rightarrow w$	1	1	1	1	1	1	1	1

Mithilfe von Wahrheitstabellen lassen sich die Wahrheitswerte von Aussagenverknüpfungen systematisch ermitteln. Bei Tautologien muss die Schlusszeile (vgl. Tabelle 1-5) überall den Wahrheitswert 1 aufweisen.

Tautologien wie in Tabelle 1-4 liefern die Bausteine für Beweistechniken, so zum Beispiel der *Methode der vollständigen Induktion*, siehe Tabelle 1-6.

1.4 Graphen

Graphen und die Graphentheorie finden als mathematische Modelle für Netze jeder Art Anwendung. Ein Graph G besteht aus einer Menge $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ von n Knoten und einer Menge V von Kanten als Verbindungen zwischen je 2 Knoten.

Tabelle 1-6. Methode der vollständigen Induktion

Eine Aussage „Für jedes x aus der Menge X gilt $p(x)$ mit $X = \{x | (x \in \mathbb{N}) \wedge (x \geq a)\}, a \in \mathbb{N}^+$ ist wahr, wird in 4 Schritten bewiesen.

1. Induktionsbeginn: Nachweis der Wahrheit von $p(a)$.
2. Induktionsannahme: $p(k)$ mit beliebigem $k > a$ sei wahr.
3. Induktionsschritt: Berechnung von $p(k+1)$ als $P(k+1)$ von $p(k)$ ausgehend.
4. Induktionsschluss: $p(x)$ ist wahr, falls $P(k+1) = p(k+1)$.

Beispiel.

Aussage: $p(x) = 1^2 + 2^2 + \dots + x^2$
 $= x(x+1)(2x+1)/6$.

1. $a = 1$. $p(1) = 1^2 = 1(1+1)(2+1)/6$.
2. $p(k) = k(k+1)(2k+1)/6$.
3. $P(k+1) = p(k) + (k+1)^2$
 $= (k+1)k(2k+1)/6 + (k+1)$
 $= (k+1)(2k^2 + 7k + 6)/6$.
4. $p(k+1) = (k+1)(k+2)(2k+3)/6 = P(k+1)$.

Gerichtete Kanten werden durch ein geordnetes Knotenpaar (x_i, x_k) beschrieben, ungerichtete Kanten durch eine zweielementige Knotenmenge $\{x_i, x_k\}$. *Schlichte* Graphen enthalten keine Schlingen, d.h. keine Kanten $\{x, y\}$ mit $x = y$, und keine Parallelkanten zu Kanten (x, y) oder Mengen $\{x, y\}$.

Ein Graph G mit ungerichteten Kanten lässt sich durch eine symmetrische Verknüpfungsmatrix V mit Elementen

$$v_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \{x_i, x_j\} \in G \\ 0, & \text{falls } \{x_i, x_j\} \notin G \end{cases} \quad (1-1)$$

beschreiben.

Der Grad $d(x)$ eines Knotens x bezeichnet die Anzahl der Kanten, die sich in x treffen. Bei einem gerichteten Graphen unterscheidet man d^+ und d^- :

$d^+(x)$ Anzahl der vom Knoten abgehenden Kanten,
 $d^-(x)$ Anzahl der in den Knoten einlaufenden Kanten,

$$d(x) = d^+(x) + d^-(x).$$

Die Summe aller Knotengrade eines schlichten Graphen ist gleich der doppelten Kantenanzahl. Eine endliche Folge benachbarter Kanten nennt man Kantenfolge. Sind End- und Anfangsknoten identisch, so heißt die Kantenfolge geschlossen, andernfalls offen.

Eine Kantenfolge mit paarweise verschiedenen Kanten heißt *Kantenzug* und speziell *Weg*, falls dabei jeder Knoten nur einmal passiert wird. Geschlossene Wege nennt man *Kreise*. Ein ungerichteter Graph, bei dem je zwei Knoten durch einen Weg verbunden sind, heißt *zusammenhängend*. Einen zusammenhängenden ungerichteten Graphen ohne Kreise nennt man *Baum*.

Beispiel: Verknüpfungsmatrix V sowie spezielle Kantenfolgen für den Graphen in Bild 1-2.

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = V^T.$$

Kantenfolge, geschlossen: $\{5, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 5\},$
 $\{5, 3\}, \{3, 2\}, \{2, 5\}$
 Kantenzug, offen: $\{5, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 5\}$
 $\{5, 3\}, \{3, 2\}$
 Weg: $\{6, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 1\}$
 Kreis: $\{4, 3\}, \{3, 2\}, \{2, 5\},$
 $\{5, 4\}.$

2 Zahlen, Abbildungen, Folgen

2.1 Reelle Zahlen

2.1.1 Zahlenmengen, Mittelwerte

Mithilfe der Zahlen können reale Ereignisse quantifiziert und geordnet werden. Rationale Zahlen lassen sich durch ganze Zahlen einschließlich null darstellen.

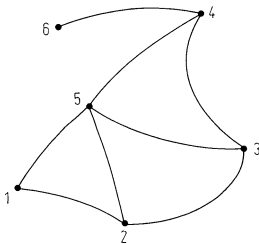


Bild 1-2. Schlichter Graph mit ungerichteten Kanten

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\},$

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\},$

a, b teilerfremd. (2-1)

Algebraische und transzendente Zahlen, z. B. als Lösungen x der Gleichungen $x^2 = 2$ bzw. $\sin x = 1$, erweitern die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen zur Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Die Elemente der Menge $\mathbb{R}$ bilden einen Körper bezüglich der Addition und Multiplikation. Für jedes Paar $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Ordnungsrelationen:

$$r_1 < r_2 \quad \text{oder} \quad r_1 = r_2 \quad \text{oder} \quad r_1 > r_2. \quad (2-2)$$

Zur Charakterisierung einer Menge n reeller Zahlen sind gewisse Mittelwerte erklärt:

Arithmetischer Mittelwert:

$$A = (a_1 + \dots + a_n)/n.$$

Geometrischer Mittelwert:

$$G^n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n. \quad (2-3)$$

Harmonischer Mittelwert:

$$H^{-1} = (a_1^{-1} + \dots + a_n^{-1})/n.$$

Für $a_i > 0, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$H \leq G \leq A.$$

Pythagoreische Zahlen sind gekennzeichnet durch ein Tripel $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ganzer Zahlen mit der Eigenschaft

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (2-4)$$

Ein beliebiges Paar $(m, n) \in \mathbb{Z}$ garantiert mit $a = m^2 - n^2, b = 2mn$ die Eigenschaft (2-4).

Beispiel:

$$m = 7, n = 1 \rightarrow a = 48, b = 14, c = 50.$$

2.1.2 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Potenzen. Die Potenz a^b (a hoch b) mit der Basis a und dem Exponenten b ist für die drei Fälle $a > 0 \wedge b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \wedge b \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{N}$ reell.

Rechenregeln:

$$\begin{aligned} a^1 &= a, & a^0 &= 1 \ (a \neq 0), & 1^b &= 1, \\ a^{-b} &= 1/a^b, & a^b a^c &= a^{b+c}, \\ (ab)^c &= a^c b^c, & (a^b)^c &= a^{bc}, & a^b/a^c &= a^{b-c}, \\ (a/b)^c &= a^c/b^c. \end{aligned} \quad (2-5)$$

Wurzeln. Die Wurzel $\sqrt[b]{c} = c^{1/b} = a$ (b -te Wurzel aus c) ist eine Umkehrfunktion zur Potenz $c = a^b$ mit dem „Wurzelexponenten“ b und dem Radikanden c . Für $c > 0 \wedge b \neq 0$ ist a reell. Bei der Quadratwurzel schreibt man die 2 in der Regel nicht an: $\sqrt[2]{c} = \sqrt{c}$.

Rechenregeln:

$$\begin{aligned}\sqrt[b]{c} &= c, & \sqrt[b]{1} &= 1, & \sqrt[b]{c^b} &= c, & \sqrt[b]{c^a} &= c^{a/b}, \\ \sqrt[ab]{d^{ac}} &= \sqrt[b]{d^c}, & \sqrt[ab]{c} &= \sqrt[a]{\sqrt[b]{c}} = \sqrt[b]{\sqrt[a]{c}}, & (2-6) \\ \sqrt[b]{c} \cdot \sqrt[b]{c} &= \sqrt[b]{c^{a+b}}, & \sqrt[ab]{c} &= \sqrt[a]{c} \cdot \sqrt[b]{c}, \\ \sqrt[a/b]{c} &= \sqrt[a]{c} / \sqrt[b]{c}.\end{aligned}$$

Logarithmen. Der Logarithmus $\log_a c = b$ (Logarithmus vom Numerus c zur Basis a) ist eine weitere Umkehrfunktion zur Potenz $c = a^b$. Für $a > 0 \wedge 1 \wedge c > 0$ ist b reell. Bevorzugte Basen sind

$a = 10$, dekadischer (Brigg'scher) Logarithmus
 $\log_{10} c = \lg c$.
 $a = e$, natürlicher Logarithmus $\log_e c = \ln c$.

Rechenregeln:

$$\begin{aligned}\log_a 1 &= 0, & \log_a a^b &= b, & a^{\log_a c} &= c, \\ \log_a (1/b) &= -\log_a b, \\ \log_a (bc) &= \log_a b + \log_a c, & (2-7) \\ \log_a (b/c) &= \log_a b - \log_a c, \\ \log_a b^c &= c \log_a b, & \log_a \sqrt[b]{c} &= c^{-1} \log_a c.\end{aligned}$$

Umrechnung zwischen verschiedenen Basen:

$$\begin{aligned}\log_a c &= \log_a b \log_b c, & \log_a b &= 1 / \log_b a, \\ \lg c &= \ln c \lg e, & \ln c &= \lg c \ln 10, \\ \lg e &= 1 / \ln 10 = M, \\ [M] &= [0,434294, 0,434295].\end{aligned}$$

2.2 Stellenwertsysteme

Natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ werden durch Ziffernfolgen dargestellt, wobei jedes Glied einen Stellenwert bezüglich einer Basis g besitzt:

$$\begin{aligned}n &= [a_m \dots a_1 a_0]_g = a_m g^m + \dots + a_0 g^0 \\ \text{mit } a_i &\in \{0, 1, \dots, g-1\}.\end{aligned}\quad (2-8)$$

Dezimalsystem $g = 10$. $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

Beispiel: $n = [5309]_{10} = 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$.

Dualsystem $g = 2$. $a_i \in \{0, 1\}$,

Beispiel: $n = [10100]_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = [20]_{10}$.

2.3 Komplexe Zahlen

2.3.1 Grundoperationen, Koordinatendarstellung

Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen z besteht aus geordneten Paaren reeller Zahlen a und b .

$$\begin{aligned}z &= a + jb, & \text{auch } z &= (a, b), \\ j &\text{ imaginäre Einheit mit } j^2 = -1, & (2-9) \\ a &\in \mathbb{R}, & \text{Realteil von } z, \operatorname{Re}(z) &= a, \\ b &\in \mathbb{R}, & \text{Imaginärteil von } z, \operatorname{Im}(z) &= b.\end{aligned}$$

Grundoperationen

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2), \\ z_1 - z_2 &= (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2), \\ z_1 \cdot z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + b_1 a_2), \\ z_1 / z_2 &= \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} \cdot \frac{a_2 - jb_2}{a_2 - jb_2} & (2-10) \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_2^2 + b_2^2}.\end{aligned}$$

Konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ zu z :

$$\begin{aligned}z &= a + jb; & \bar{z} &= a - jb \\ z\bar{z} &= a^2 + b^2.\end{aligned}\quad (2-11)$$

Die Paare (a, b) können als kartesische Koordinaten eines Punktes in einer Zahlenebene aufgefasst werden. Die gerichtete Strecke vom Ursprung $(0, 0)$ zum Punkt $z = (a, b)$ heißt auch **Zeiger**.

$$\text{Zeigerlänge: } r = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.\quad (2-12)$$

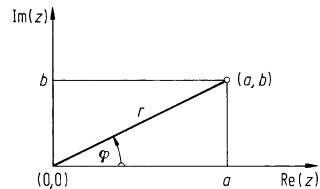


Bild 2-1. Komplexe Zahl z in Polarkoordinaten r, φ

Sinnvoll ist ebenfalls eine Umrechnung in Polarkoordinaten $z = (r, \varphi)$ nach Bild 2-1 mit Zeigerlänge r und Winkel φ .

$$\begin{aligned} a &= r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi, \\ r &= +\sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned} \quad (2-13)$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \\ z_1 / z_2 &= (r_1 / r_2) [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \end{aligned}$$

2.3.2 Potenzen, Wurzeln

Potenz. Für Exponenten $a \in \mathbb{Z}$ gilt die *Moivre'sche Formel*:

$$\begin{aligned} z &= r(\cos \varphi + j \sin \varphi) = r \cdot e^{j\varphi} \\ a \in \mathbb{Z}: z^a &= r^a [\cos(a\varphi) + j \sin(a\varphi)]. \end{aligned} \quad (2-14)$$

Im Allgemeinen ist die Potenz jedoch mehrdeutig:

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{R}: z^a &= r^a \{\cos[a(\varphi + 2k\pi)] \\ &\quad + j \sin[a(\varphi + 2k\pi)]\}, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ \text{Hauptwert für } k &= 0: \\ z^a &= r^a [\cos(a\varphi) + j \sin(a\varphi)]. \end{aligned} \quad (2-15)$$

Wurzel. Umkehrfunktion $\sqrt[a]{b} = b^{\frac{1}{a}} = z$ zur Potenz $b = z^a$. Die Wurzeln – auch reeller Zahlen – sind a -fach.

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{N}: \\ \sqrt[a]{z} &= \sqrt[a]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{a} + j \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{a} \right), \\ k \in \{0, 1, \dots, a-1\}. \end{aligned} \quad (2-16)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{\cos 0 + j \sin 0}, \\ z &= \{1, j, -1, -j\}. \end{aligned}$$

2.4 Intervalle

Beim Rechnen mit konkreten Zahlen muss man sich mit endlich vielen Stellen begnügen, also mit Näherungszahlen. Aussagekräftiger sind Zahlenangaben durch gesicherte untere und obere Schranken. An die Stelle diskreter reeller Zahlen tritt die Menge I der abgeschlossenen *Intervalle* mit Elementen

$$[u] = [\underline{u}, \bar{u}] = \{u \mid u \in \mathbb{R}, \underline{u} \leq u \leq \bar{u}\}. \quad (2-17)$$

Grundrechenarten

$$\begin{aligned} [u] + [v] &= [\underline{u} + \underline{v}, \bar{u} + \bar{v}], \\ [u] - [v] &= [\underline{u} - \bar{v}, \bar{u} - \underline{v}], \\ [u] \cdot [v] &= [p_{\min}, p_{\max}], \quad p = \{\underline{u}\underline{v}, \underline{u}\bar{v}, \bar{u}\underline{v}, \bar{u}\bar{v}\}, \\ [u] / [v] &= [q_{\min}, q_{\max}], \quad q = \{\underline{u}/\underline{v}, \underline{u}/\bar{v}, \bar{u}/\underline{v}, \bar{u}/\bar{v}\}. \end{aligned} \quad (2-18)$$

Runden: $\underline{u}$ abrunden, $\bar{u}$ aufrunden.

Beispiel:

$$\begin{aligned} A &= (a+b)(a-b), \quad a^2 = 9,9, \quad b = \pi, \\ [a] &= [3,146, 3,147], \quad [b] = [3,141, 3,142], \\ [a] + [b] &= [6,287, 6,289], \\ [a] - [b] &= [4,000 \cdot 10^{-3}, 6,000 \cdot 10^{-3}], \\ [A] &= [2,514 \cdot 10^{-2}, 3,774 \cdot 10^{-2}]. \end{aligned}$$

In der Menge der Intervalle definiert man *Ordnungsrelationen* nach Bild 2-2.

1. $[u] < [v]$ gilt, wenn $\bar{u} < \underline{v}$.
2. $[u] \leq [v]$ gilt, wenn $\underline{u} \leq \underline{v}$ und $\bar{u} \leq \bar{v}$.
3. $[u] \subseteq [v]$ gilt, wenn $\underline{v} \leq \underline{u}$ und $\bar{u} \leq \bar{v}$.

Weiteres zur Intervallrechnung findet man in [1].

2.5 Abbildungen, Folgen und Reihen

2.5.1 Abbildungen, Funktionen

X und Y seien zwei Mengen. Dann heißt $A \subset X \times Y$ eine Abbildung der Menge X in die Menge Y , falls zu jedem Original $x \in X$ nur ein einziges Bild $y \in Y$ gehört, also eine eindeutige Zuordnung existiert. Statt Abbildung spricht man auch von Funktion oder Operator f :

$$f: x \rightarrow y. \quad f \text{ bildet } x \text{ in } y \text{ ab.}$$

$$\text{Auch } x \rightarrow y = f(x). \quad (2-20)$$

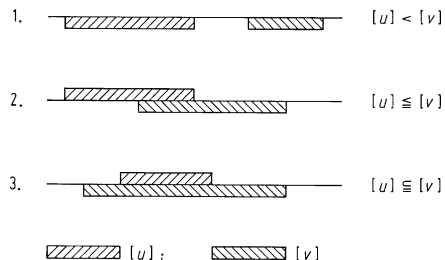


Bild 2-2. Ordnungsrelationen von Intervallen

Tabelle 2-1. Einteilung der Funktionen $y = f(x)$

Name	Darstellung	Beispiel
Algebraisch	$P_n(x)y^n + \dots + P_1(x)y + P_0(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$ $P_k(x)$: Polynome in x	$x\sqrt{y} = y + 1$ d. h. $y^2 + y(2 - x^2) + 1 = 0$
Algebraisch ganz rational	$P_n(x)$ bis $P_2(x) = 0, P_1(x) = 1$: $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$	$y = 4x^3 - 1$
Algebraisch gebrochen rational	$P_n(x)$ bis $P_2(x) = 0$, $y = \frac{a_0x^m + \dots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + \dots + b_{n-1}x + b_n}$ $m < n$: echt-, sonst unecht gebrochen	$y = \frac{x^2 + 7x}{x^3 - 1}$
Algebraisch nicht rational: Irrational		$y = x^{1/n}$
Nicht algebraisch: Transzendent		$y = a^x, y = \sin x$

Bei Gültigkeit der Abbildung (2-20) sowie $S \subset X$ und $T \subset Y$ sind die Begriffe

Bildmenge $f(S)$ von S , $f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$,

Urbildmenge $f^{-1}(T)$ von T ,

$f^{-1}(T) = \{x \mid f(x) \in T\}$,

definiert.

Injektiv heißt eine Abbildung (2-20) dann, wenn keine zwei Elemente von X auf dasselbe Element y abgebildet werden.

Surjektiv heißt eine Abbildung (2-20) dann, wenn jedes Element $y \in Y$ Bild eines Originals $x \in X$ ist.

Bijektiv heißt eine Abbildung (2-20) dann, wenn sie injektiv und surjektiv ist. Für diesen Sonderfall hat die inverse Relation f^{-1} den Charakter einer Abbildung und heißt Umkehrfunktion.

2.5.2 Folgen und Reihen

Unter einer Folge mit Gliedern $a_k, k = 1, 2, \dots$, versteht man eine Funktion f , die auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen definiert ist.

Arithmetische Folge. Die Differenzen Δ^k k -ter Ordnung von $k + 1$ aufeinander folgenden Gliedern sind konstant.

$$\begin{aligned} k = 1: \Delta_j^1 &= a_{j+1} - a_j = \text{const} \\ k = 2: \Delta_j^2 &= \Delta_{j+1}^1 - \Delta_j^1 = \text{const} \end{aligned} \quad (2-21)$$

Geometrische Folge. Der Quotient q von zwei aufeinander folgenden Gliedern ist konstant.

Reihen. Die Summe der Glieder von Folgen nennt man Reihen.

Einige Reihen. Summation jeweils von $k = 1$ bis $k = n$.

$$\begin{aligned} \sum k &= n(n+1)/2. \\ \sum k^2 &= n(n+1)(2n+1)/6. \\ \sum k^3 &= [n(n+1)/2]^2. \\ \sum k^4 &= n(n+1) \times (2n+1)(3n^2+3n-1)/30. \\ \sum (2k-1) &= n^2. \\ \sum (2k-1)^2 &= n(2n-1)(2n+1)/3. \\ \sum (2k-1)^3 &= n^2(2n^2-1). \\ \sum kx^{k-1} &= [1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}]/(1-x)^2, \\ &\quad x \neq 1. \\ \sum \frac{k}{2^k} &= 2 - \frac{n+2}{2^n}. \end{aligned} \quad (2-22)$$

Konvergenz. Eine Folge von Gliedern $a_k, k = 1, 2, \dots, n$, heißt konvergent und g der Grenzwert der Folge,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = g, \quad \text{falls } |g - a_n| < \varepsilon, \quad n > N, \quad (2-23)$$

falls bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ stets ein gewisser Index N angebbbar ist, ab dem die Ungleichung (2-23) gilt.

Beispiel:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a^k = \begin{cases} \infty & \text{für } a > 1 \\ 1 & \text{für } a = 1 \\ 0 & \text{für } -1 < a < 1 \\ \text{divergent} & \text{für } a \leq -1 \end{cases}$$

Eine unendliche Reihe

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad (2-24)$$

heißt konvergent, wenn die Folge der Teilsummen s_n konvergiert. Notwendige Bedingung:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0. \quad (2-25)$$

Absolute Konvergenz:

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{absolut konvergent,} \\ \text{falls } \tilde{r} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{konvergiert.} \quad (2-26)$$

Rechenregel:

$$r_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad r_2 = \sum_{l=1}^{\infty} b_l \quad \text{absolut konvergent;} \\ \rightarrow r_1 r_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k a_{k+1-l} b_l. \quad (2-27)$$

Majorantenprinzip. Wenn

$$r_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{konvergent und} \\ |b_s| \leq |a_s|, \quad \text{für } s \geq N, \quad N \in \mathbb{N} \setminus 0 \quad \text{dann ist auch} \\ r_2 = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \quad \text{konvergent.} \quad (2-28)$$

Hinreichende Konvergenzkriterien:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1, \quad \text{Wurzelkriterium;} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1, \quad \text{Quotientenkriterium.} \quad (2-29)$$

Notwendig und hinreichend für alternierende Reihen (wechselndes Vorzeichen):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| = 0. \quad (2-30)$$

Potenzreihen sind ein Spezialfall von Reihen mit veränderlichen Gliedern und vorgegebenen Koeffizienten a_k :

$$p = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k. \quad (2-31)$$

Der Konvergenzbereich $|x| < \varrho \neq 0$ einer Potenzreihe wird durch den Konvergenzradius ϱ bestimmt. Für gleichmäßige Konvergenz im Bereich $|x| < \varrho$ darf die n -te Teilsumme $s_n(x)$ ab einem gewissen Index N ($n > N$) eine vorgegebene Differenz $\varepsilon > 0$ zum Grenzwert $p(x)$ der Reihe nicht überschreiten.

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k, \quad p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k. \\ |p(x) - s_n(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für } n > N. \quad (2-32)$$

$$\varrho^{-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \quad \text{oder} \quad \varrho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|.$$

Potenzreihen dürfen innerhalb des Konvergenzbereiches differenziert und integriert werden.

Beispiel:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k / k. \\ \left. \begin{aligned} \varrho &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k+1}{k} \right| = 1 \\ \varrho^{-1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow |x| < 1.$$

2.5.3 Potenzen von Reihen

Polynomiale Sätze beschreiben die Bildung der Potenzen von Reihen.

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^m. \quad (2-33)$$

Wichtig ist der Fall $n = 2$ der binomialen Sätze. Mit dem Symbol $n!$ (n Fakultät) und den *Binomialkoeffizienten* b_{ck} (lies: c über k) gilt der *Binomische Satz*.

$$b_{ck} = \binom{c}{k} = \frac{c(c-1)(c-2) \dots [c-(k-1)]}{k!}, \\ k \in \mathbb{N}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k, \quad 0! = 1, \quad (2-34)$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beispiel:

$$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5.$$

Die Binomialkoeffizienten lassen sich aus dem Pascal'schen Dreieck in Bild 2-3 ablesen.

Rechenregeln:

$$\binom{k}{0} = 1, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{c}{k} + \binom{c}{k+1} = \binom{c+1}{k+1}. \quad (2-35)$$

3 Matrizen und Tensoren

3.1 Matrizen

3.1.1 Bezeichnungen, spezielle Matrizen

Eine zweidimensionale Anordnung von $m \times n$ Zahlen a_{ij} in einem Rechteckschema nennt man Matrix A , auch genauer (m, n) -Matrix $A = (a_{ij})$. Die Zahlen a_{ij} heißen auch Elemente.

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

1. Index i : Zeilenindex, m Zeilenanzahl.
2. Index j : Spaltenindex, n Spaltenzahl.

Teilfelder des Rechteckschemas kann man zu Untermatrizen zusammenfassen, so speziell zu n Spalten a_i oder m Zeilen a^j .

$$A = [a_1 \dots a_n] = \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix}, \quad a_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}, \quad (3-2)$$

$$a^j = [a_{j1} \dots a_{jn}].$$

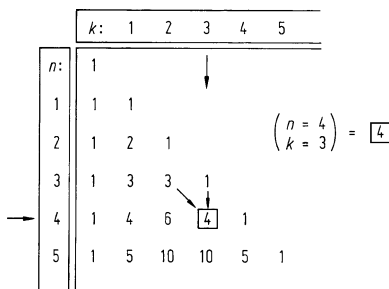


Bild 2-3. Pascal'sches Dreieck. Nicht-Einselemente sind gleich Summe aus darüberstehendem Element und dessen linkem Nachbarn

Durch Vertauschen von Zeilen und Spalten entsteht die sogenannte *transponierte Matrix* A^T (gesprochen: A transponiert) zu A .

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix} = [a_1^T \dots a_n^T],$$

$$a_T^j = \begin{bmatrix} a_{j1} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{bmatrix}, \quad a_i^T = [a_{1i} \dots a_{mi}]. \quad (3-3)$$

Durch Vertauschen von Zeilen und Spalten der komplexen Matrix C und zusätzlichem Austausch der Elemente $c_{ik} = a_{ik} + j b_{ik}$ durch die konjugiert komplexen $c_{ik} = a_{ik} - j b_{ik}$ entsteht die *konjugiert Transponierte* $\bar{C}^T$ zu C .

Beispiel:

$$C = \begin{bmatrix} 3-j & 2 \\ 5+j & 1+j \end{bmatrix}, \quad \bar{C}^T = \begin{bmatrix} 3+j & 5-j \\ 2 & 1-j \end{bmatrix}.$$

Spezielle Matrizen (auch Bild 3-1)

Diagonalmatrix	D mit $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$ $D = \text{diag}(d_1 \dots d_n)$
Einheitsmatrix	$I = \text{diag}(1 \dots 1)$, auch 1 oder E
Nullmatrix	$A = 0$ mit $a_{ij} = 0$
Rechteckmatrix	Zeilenanzahl $\neq$ Spaltenanzahl
Quadratische Matrix	Zeilenanzahl = Spaltenanzahl

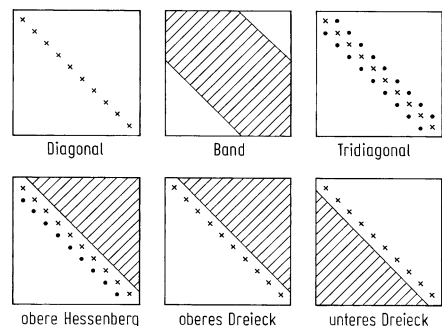


Bild 3-1. Spezielle Matrizen. Kreuze $\times$ stehen für Hauptdiagonalelemente

Das Ingenieurwissen: Mathematik und Statistik

Ruge, P.; Birk, C.; Wermuth, M.

2014, X, 184 S. 96 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-40473-3