

# Vorwort

Das Ziel dieses Buches ist es, in die Begriffe und Methoden der Algebra einzuführen und wesentliche Ergebnisse darzustellen. Es enthält den inzwischen klassischen Kanon, der von Begriffsbildungen wie Gruppe und Ring ausgeht und hin zu den Körpererweiterungen und der Galoistheorie führt. Darüber hinaus gestattet das Buch Einblicke in verschiedene Entwicklungen innerhalb der Algebra, die mit anderen Gebieten der Mathematik stark verflochten sind.

Der oben genannte Kanon wird in den ersten sechs Kapiteln des Buches dargestellt. Die folgenden vier Kapitel behandeln zentrale Teile der Theorie der Moduln, Algebren und Ringe. In ergänzenden Abschnitten werden Ausblicke auf weiterführende Themen gegeben.

Algebraische Begriffe spielen eine tragende Rolle in ganz unterschiedlichen Bereichen der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Im Rahmen dieses Buches ist es nicht möglich, alle Aspekte zu behandeln. Das (im folgenden skizzierte) Ergebnis unserer Auswahl ist sicher von subjektiven Gesichtspunkten und persönlichen Erfahrungen geprägt worden.

Historisch gesehen sind große Teile der Algebra in engem Zusammenspiel mit der Zahlentheorie und der algebraischen Geometrie entwickelt worden. Wir betonen hier den Zusammenhang mit arithmetischen Fragestellungen und benutzen oft Beispiele aus diesem Umfeld, um allgemeine Begriffe der Algebra zu erläutern. Zentrale Begriffe der algebraischen Zahlentheorie sind der Gegenstand des Kapitels X über ganze Ringerweiterungen und Dedekindringe, in dem auch die Zerlegungsgesetze behandelt werden. Auch die im vorangehenden Kapitel IX entwickelte Theorie der endlich dimensionalen Divisionsalgebren über einem Körper gehört zu den Kindern der Zahlentheorie. Hier waren Fragen in der Klassenkörpertheorie der Ausgangspunkt für einen bedeutenden Aufschwung in der Theorie der hyperkomplexen Systeme, wie Algebren damals genannt wurden.

Dem gegenüber räumen wir den aus der algebraischen Geometrie hervorgegangenen Bereichen der kommutativen Algebra wenig Platz ein und gehen nicht über den Hilbertschen Basissatz hinaus. Wir halten es für angemessen, daß diese Theorie in engem Zusammenhang mit der algebraischen Geometrie entwickelt wird. Eine solche Aufgabe würde jedoch den Rahmen dieses Buches sprengen.

Dagegen betonen wir hier nichtkommutative Aspekte stärker als in vielen Lehrbüchern der Algebra. Hierzu gehören neben der bereits erwähnten Theorie der Divisionsalgebren die Abschnitte über artinsche Ringe in Kapitel VIII

und dessen Supplemente sowie die Beschreibung von Schiefpolynomringen, die eine zentrale Rolle in der Theorie der noetherschen, nicht artinschen Ringe spielen.

Im Rahmen der Gruppentheorie gehen wir über das Übliche hinaus, indem wir Gruppen mit Erzeugenden und Relationen diskutieren und dann die allgemeinen linearen Gruppen über Körpern näher untersuchen. Letzteres wird dann wieder vom arithmetischen Blickwinkel aufgenommen, wenn diese Gruppen über Zahlringen behandelt werden.

Einige ergänzende Abschnitte sind durch die Darstellungstheorie von endlichen Gruppen und, allgemeiner, von endlich dimensional Algebren motiviert. Dabei verzichten wir auf die Charaktertheorie, bei der wir auf gute Monographien verweisen können. Statt dessen legen wir Gewicht auf modultheoretische Aspekte wie projektive Moduln und Erweiterungen. Deren allgemeine Diskussion in den Supplementen zu Kapitel VII weist auch in die Richtung der homologischen Algebra. Im Anschluß an Kapitel VIII geben wir Ausblicke auf die Theorie von Frobenius-Algebren und die Darstellungstheorie von Köchern. Dabei geht es um Klassen von Algebren, die eine besondere Rolle in der Darstellungstheorie von endlichen Gruppen und von Lie-Algebren spielen, die fundamental in der allgemeinen Darstellungstheorie von endlich dimensional Algebren sind und die interessante geometrische Anwendungen haben.

Am Schluß des Buches haben wir für die Supplemente eine Liste mit weiterführender Literatur zusammengestellt, die ein vertieftes Studium der betrachteten Gebiete gestattet.

In diesem Buch wird genügend Material für eine zweisemestrige Vorlesung bereitgestellt. Auch wird den Studierenden Stoff zum Selbststudium angeboten. Zahlreiche Beispiele und Übungsaufgaben sollen das Verständnis fördern.

Aarhus und Wien, April 2005

Jens Carsten Jantzen  
Joachim Schwermer

### **Vorwort zur zweiten Auflage**

In dieser Auflage haben wir ein Kapitel über quadratische Formen hinzugefügt, ein klassisches Gebiet der Algebra, das über die orthogonalen Gruppen und die Clifford-Algebren eine enge Verbindung zu andere Themen des Buches hat. Außerdem ergänzen wir den Abschnitt über Gruppenalgebren mit einem Supplement über Darstellungen endlicher Gruppen. Schließlich haben wir alle uns bekannten Fehler korrigiert. Wir danken allen Lesern, die uns auf diese Fehler aufmerksam gemacht haben.

Aarhus und Wien, Juli 2013



<http://www.springer.com/978-3-642-40532-7>

Algebra

Jantzen, J.C.; Schwermer, J.

2014, X, 458 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-40532-7