



Kapitel 2

**Allgemeine Spannungs- und
Verzerrungszustände**

2

2	Allgemeine Spannungs- und Verzerrungszustände	
2.1	Spannungsvektor	31
2.2	Zweiachsiger Spannungszustand	32
2.3	Dreiachsiger Spannungszustand	39
2.4	Verschiebungen und Verzerrungen	46
2.5	HOOKESches Gesetz	52
2.6	Arbeit, Verzerrungsarbeit und -energie	55

2 Allgemeine Spannungs- und Verzerrungszustände

Im Folgenden werden die lokalen Gleichgewichtsbilanzen für differenzielle Körperteile angegeben. Die in der Realität auftretenden Verschiebungen von Punkten der gelagerten Körper seien wie bisher als hinreichend klein im Vergleich zu den entsprechenden Körperabmessungen angenommen, so dass ihr Einfluss auf die Gleichgewichtsbilanzen für den aktuellen Belastungszustand vernachlässigbar ist. Obwohl diese Verschiebungen bei ungleichmäßiger Verteilung über die Körperpunkte Verzerrungen und damit Spannungen im Körper verursachen, wird ihre Kenntnis für die allgemeine Definition des Spannungsbegriffes unter obiger Voraussetzung nicht benötigt.

2.1 Spannungsvektor

2.1

Zur Untersuchung des Spannungszustandes eines beliebig belasteten, im Gleichgewicht befindlichen Körpers betrachten wir die Anordnung nach Bild 2.1, wo als äußere Lasten beispielhaft drei Einzelkräfte \mathbf{F}_i , eine Streckenlast \mathbf{q} und ein Einzelmoment \mathbf{M} auftreten. Denkbar wären auch Flächenkräfte, Volumenkräfte und Momente pro Längeneinheit (Linienmomente), die nicht eingetragen wurden, sowie Momente pro Flächeneinheit und Momente pro Volumeneinheit, welche in der vorliegenden Theorie nicht berücksichtigt werden. Die Lasten können auch im Körperinneren angreifen.

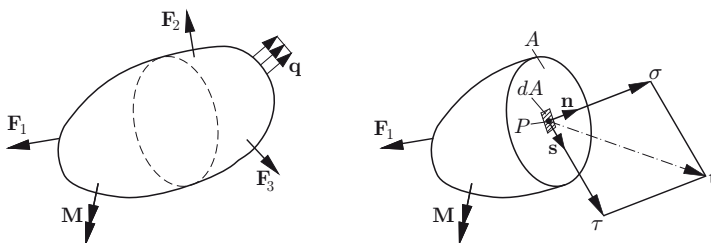


Bild 2.1. Zur Definition des Spannungsvektors

Wir zerlegen den Körper in zwei Teile mit der gemeinsamen glatten Schnittfläche A . In dieser Schnittfläche befindet sich das Flächenelement dA , das den Punkt P einschließt und den nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} besitzt. Es unterliegt einer auf ihm glatt verteilten Flächenkraft \mathbf{t} , die der angrenzende, hier nicht eingezeichnete Körperteil ausübt. Eine Momentenwechselwirkung über dA hinweg wird ausgeschlossen.

Die gesamte, auf das Flächenelement dA wirkende Kraft $d\mathbf{F}$ ist

$$d\mathbf{F} = \mathbf{t}dA . \quad (2.1)$$

Die Flächenkraft \mathbf{t} heißt, wie oben schon erwähnt, Spannungsvektor. Die Größe dieses Vektors hängt nicht nur von der Position P des Flächenelementes dA , sondern auch von der Orientierung des Normaleneinheitsvektors \mathbf{n} relativ zum Körper ab (vgl. Abschnitt 1.7.2). Der Spannungsvektor \mathbf{t} bzw. der gemäß (2.1) bestimmte Kraftvektor $d\mathbf{F}$ und der Normalenvektor \mathbf{n} liegen in einer Ebene, deren Schnittlinie mit der Fläche A im Punkt P den tangentialen Einheitsvektor \mathbf{s} besitzt. Die Vektoren \mathbf{t} bzw. $d\mathbf{F}/dA$ können nach dem Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} und dem tangentialen Einheitsvektor \mathbf{s} gemäß

$$\mathbf{t} = \frac{dF_N}{dA}\mathbf{n} + \frac{dF_T}{dA}\mathbf{s} = \sigma\mathbf{n} + \tau\mathbf{s} \quad (2.2)$$

zerlegt werden (Bild 2.1), wobei σ die Normalspannung und τ die Schubspannung bezeichnen. Die Größen σ und τ sind die Maßzahlen oder Koordinaten des Vektors \mathbf{t} bezüglich der aus \mathbf{n} und \mathbf{s} bestehenden Vektorbasis.

Wenn der Spannungsvektor \mathbf{t} mit dem Normalenvektor \mathbf{n} einen spitzen Winkel einschließt, wird die Normalspannung σ positiv und heißt Zugspannung. Bei einem stumpfen Winkel ist die Normalspannung σ negativ und bezeichnet eine Druckspannung.

2.2 Zweiachsiger Spannungszustand

Eine gegenüber Bild 2.1 vereinfachte Situation entsteht für einen prismatischen Körper, der nur durch Spannungsvektoren belastet wird, die parallel zu den Grundflächen orientiert und gleichmäßig über den Seitenflächen verteilt sind. Dies führt zu einem zweiachsigen oder ebenen Spannungszustand, abgekürzt als ESZ. Ein solcher Spannungszustand existiert exakt an freien Körperoberflächen und näherungsweise z. B. in dünnen Scheiben, die durch gleichmäßig über der Scheibendicke verteilte äußere Flächenkräfte normal zum Scheibenrand und parallel zur Scheibenmittelebene belastet werden. Er hat technische Bedeutung (vgl. Abschnitt 9.2.2).

Wir betrachten nach Bild 2.2a das aus einer senkrecht zur z -Achse liegenden Scheibe herausgeschnittene quaderförmige Element mit der Dicke b und den Seitenflächen $x = \text{konst.}$ bzw. $y = \text{konst.}$

Die Seitenflächen seien gemäß Bild 2.2a durch glatt verteilte Spannungsvektoren belastet, die bereits in normale und tangentiale Anteile (Spannungen) zerlegt wurden. Diese Spannungen sind jeweils durch nur einen Pfeil symbolisiert. Der eingeführte Doppelindex ist so definiert, dass der erste Index die Koordinate anzeigt, zu welcher die äußere Normale der betrachteten Fläche

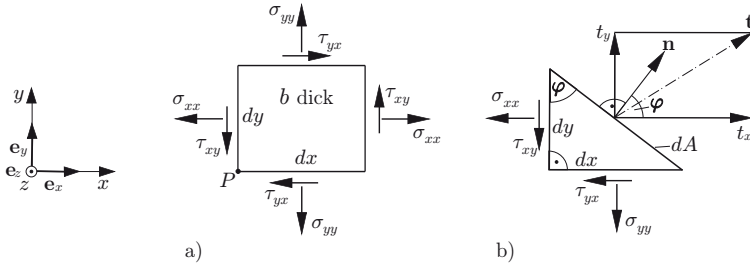


Bild 2.2. Kartesisches Scheibenelement im ebenen Spannungszustand

parallel ist (z. B. x für beide vertikale Flächen), während der zweite Index die zugeordnete Flächenkraftrichtung angibt. Die Zählpfeile der Spannungen in Bild 2.2a weisen dabei definitionsgemäß auf der Seite, wo die Flächennormale die positive Koordinatenrichtung besitzt, in positive Koordinatenrichtung. Die betreffende Seite heißt positives Schnittufer. Auf der gegenüberliegenden Seite, dem negativen Schnittufer, sind die Zählpfeile der Spannungen in negativer Koordinatenrichtung orientiert. So zeigt der Zählpfeil der Normalspannung σ_{xx} an der rechten Fläche $x = \text{konst.}$ in positiver x -Richtung, an der linken Fläche $x = \text{konst.}$ in negativer x -Richtung. Der Zählpfeil der Schubspannung τ_{xy} besitzt an der rechten Fläche $x = \text{konst.}$ die positive y -Orientierung, an der linken Fläche $x = \text{konst.}$ die negative y -Orientierung. Der Spannungsvektor \mathbf{t} an einer beliebig orientierten Schnittfläche dA des Scheibenelementes (Bild 2.2b) ist durch die Spannungsvektoren an den Koordinatenflächen $x = \text{konst.}$ bzw. $y = \text{konst.}$ bestimmt. Denn die für das Scheibenelement gültigen (lokalen) Kräftebilanzen

$$\rightarrow : \quad t_x dA - \sigma_{xx} dA \cos \varphi - \tau_{yx} dA \sin \varphi = 0 ,$$

$$\uparrow : \quad t_y dA - \tau_{xy} dA \cos \varphi - \sigma_{yy} dA \sin \varphi = 0$$

liefern

$$t_x = \sigma_{xx} \cos \varphi + \tau_{yx} \sin \varphi = \sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y , \quad (2.3a)$$

$$t_y = \tau_{xy} \cos \varphi + \sigma_{yy} \sin \varphi = \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y . \quad (2.3b)$$

Die Größen n_x und n_y bezeichnen die Koordinaten des Flächennormalenvektors \mathbf{n} . In die Bilanzen (2.3) gehen Volumenkräfte nicht ein, da das Volumen des Scheibenelementteiles aus Bild 2.2b

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dA}{b} \cos \varphi \frac{dA}{b} \sin \varphi \right) b = \frac{1}{2b} \cos \varphi \sin \varphi (dA)^2 \quad (2.4)$$

beträgt und Terme der Ordnung $(dA)^2$ gegenüber Termen der Ordnung dA entfallen.

Bezüglich des Momentengleichgewichts des Scheibenelementes von Bild 2.2a gilt wie schon in Abschnitt 1.2 die lokale Momentenbilanz

$$\widehat{P} : \tau_{xy} dy b dx - \tau_{yx} dx b dy = 0$$

d. h.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} , \quad (2.5)$$

die so genannte Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen. In (2.5) bleiben Volumenkräfte ähnlich wie in den Kräftebilanzen bedeutungslos, da sie wieder auf Differenziale höherer Ordnung führen. Die Symmetriebedingung (2.5) kann verletzt sein, wenn das Scheibenmaterial elektrisch polarisiert oder magnetisiert ist und einem äußeren elektrischen oder magnetischen Feld unterliegt. Unter diesen Voraussetzungen wirken Volumenmomente, welche hier ausgeschlossen werden.

Die auf der rechten Seite von (2.3) enthaltenen Spannungen können in der symmetrischen Matrix

$$(\sigma_{kl}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

angeordnet werden. Sie legen den Spannungszustand im betrachteten Körperpunkt vollständig fest. Dabei vermitteln sie eine lineare Beziehung zwischen dem Normalenvektor \mathbf{n} des Flächenelementes und dem auf diesem Flächenelement wirkenden Spannungsvektor \mathbf{t} . In diesem Zusammenhang werden sie als Koordinaten des Spannungstensors bezüglich der Vektorbasis $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ bezeichnet.

Derselbe Spannungszustand ist auch mittels einer gedrehten Vektorbasis angebar. Hierzu betrachten wir Bild 2.3.

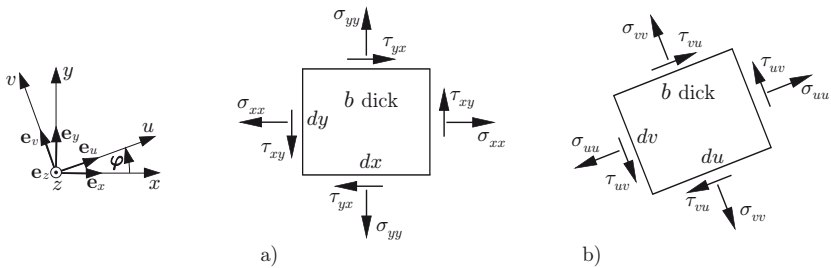


Bild 2.3. Spannungszustand in verschiedenen kartesischen Vektorbasissystemen

Zu der Vektorbasis $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ wurde die mit dem Winkel φ um die z -Achse gedrehte Vektorbasis $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v$ eingeführt. Ein und derselbe Spannungstensor hat bezüglich der gedrehten Vektorbasis die neuen Koordinaten σ_{uu} , σ_{vv} und τ_{uv}

anstelle der alten σ_{xx} , σ_{yy} und τ_{xy} . Zur Berechnung der neuen Spannungstensorkoordinaten in Abhängigkeit von den alten werden an rechtwinkligen Dreiecksscheibenelementen mit Hypothenusen in u - bzw. v -Richtung (Bild 2.4) die lokalen Kräftebilanzen in u - bzw. v -Richtung aufgestellt.

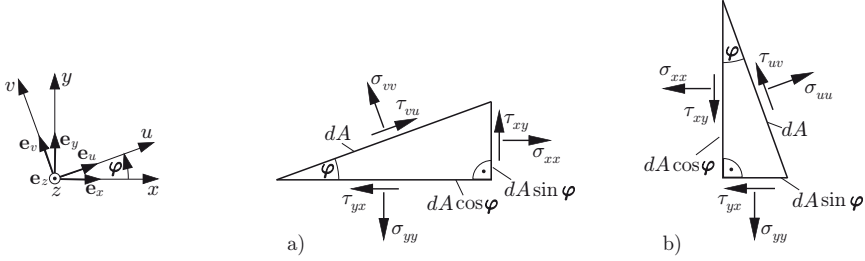


Bild 2.4. Zur Transformation der Spannungstensorkoordinaten

Sie liefern für die Zerlegung nach Bild 2.4a

$$\nwarrow : \quad \sigma_{vv}dA - \sigma_{yy}dA \cos^2 \varphi + \tau_{yx}dA \cos \varphi \sin \varphi + \tau_{xy}dA \sin \varphi \cos \varphi - \sigma_{xx}dA \sin^2 \varphi = 0 ,$$

$$\nearrow : \quad \tau_{vu}dA + \sigma_{xx}dA \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy}dA \sin^2 \varphi - \sigma_{yy}dA \cos \varphi \sin \varphi - \tau_{yx}dA \cos^2 \varphi = 0$$

bzw. mit (2.5)

$$\sigma_{vv} = \sigma_{xx} \sin^2 \varphi + \sigma_{yy} \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi , \quad (2.6)$$

$$\tau_{vu} = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) . \quad (2.7)$$

Die Kräftebilanz in u -Richtung gemäß der Zerlegung nach Bild 2.4b ergibt

$$\sigma_{uu} = \sigma_{xx} \cos^2 \varphi + \sigma_{yy} \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi . \quad (2.8)$$

Künftig werden wir auch die vereinfachte Schreibweise $\sigma_{xx} = \sigma_x$, $\sigma_{yy} = \sigma_y$ und $\sigma_{uu} = \sigma_u$, $\sigma_{vv} = \sigma_v$ benutzen.

Bei Anwendung der Formeln $\sin^2 \varphi = (1 - \cos 2\varphi)/2$, $\cos^2 \varphi = (1 + \cos 2\varphi)/2$ und $2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$ in (2.6) bis (2.8) entsteht noch

$$\sigma_u = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi , \quad (2.9)$$

$$\sigma_v = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi , \quad (2.10)$$

$$\tau_{uv} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi . \quad (2.11)$$

Die mathematische Struktur der Gleichungen (2.6) bis (2.8) bzw. (2.9) bis (2.11) ist identisch zur Struktur der Transformationsgleichungen der Flächenmomente zweiter Ordnung in der Statik. Sie spiegelt die mathematischen Eigenschaften von Tensoren zweiter Stufe wider, zu denen sowohl Flächenmomente zweiter Ordnung als auch Spannungstensoren gehören. Die zweite Stufe entspricht dabei den zwei Indizes an den Tensorkoordinaten σ_{kl} . Sie ist von der Dimension des Raumes zu unterscheiden, die hier wegen des ebenen Spannungszustandes zwei beträgt im Gegensatz zur Dimension drei beim dreiachsigen Spannungszustand (s. Abschnitt 2.3).

Wie im Fall der Flächenmomente zweiter Ordnung liefert (2.11) mit der Forderung $\tau_{uv} = 0$ eine Bestimmungsgleichung für den Winkel 2φ in der Formel

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} . \quad (2.12)$$

Zu den beiden Lösungen φ_0 und $\bar{\varphi}_0 = \varphi_0 + \pi/2$ gehören zwei senkrecht aufeinander stehende Achsen, die als Hauptachsen bzw. -richtungen bezeichnet werden. Die dazu gehörenden Normalspannungen $\sigma_1, \sigma_2 \hat{=} \sigma_{1,2}$ heißen Hauptspannungen. Sie berechnen sich durch Einsetzen von φ_0 und $\bar{\varphi}_0$ in (2.8) bzw. (2.9) zahlenmäßig direkt oder nach Elimination der Winkel aus (2.12), (2.9) und (2.10) zu

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} , \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 , \quad (2.13)$$

wobei die Winkelzuordnung hinsichtlich der Hauptspannungen auch aus

$$\tan \varphi_{01,2} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_{2,1}} \quad (2.14)$$

entnehmbar ist. Zur Herleitung von (2.14) wurde das Additionstheorem

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

auf (2.12) angewendet und (2.13) benutzt.

Die Angabe des Hauptachsenbezugssystems und der beiden Hauptspannungen legen den ebenen Spannungszustand vollständig fest und begründen den Begriff „zweiachsiger Spannungszustand“.

Mit (2.9), (2.10) und (2.13) folgt noch die Beziehung

$$\sigma_u + \sigma_v = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 , \quad (2.15)$$

in der die Summen offensichtlich invariant gegenüber dem Wechsel der Bezugssysteme sind und deshalb als Rechenkontrollen dienen können.

Die Beziehungen (2.9) bis (2.15) lassen sich in derselben Weise wie bei den Flächenmomenten zweiter Ordnung in der Statik mittels des MOHRschen Trägheitskreises, nach MOHR (1835–1918), veranschaulichen.

Beispiel 2.1

Gegeben ist die Scheibe unter reiner Schubbeanspruchung τ gemäß Bild 1.4d bzw. Bild 1.7. Gesucht sind die Hauptspannungen und -richtungen.

Lösung:

Nach Bild 1.7 und Bild 2.3a ist $\tau_{xy} = \tau$ sowie $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Aus (2.13) folgt

$$\sigma_{1,2} = \pm \tau$$

und aus (2.14)

$$\tan \varphi_{01,2} = \frac{\tau}{-(\mp \tau)} = \pm 1$$

bzw.

$$\varphi_{01} = 45^\circ, \quad \varphi_{02} = 135^\circ.$$

Der reine Schubspannungszustand (auch als reiner Schub bezeichnet) ist also gemäß den Alternativen von Bild 2.5 angebbbar.

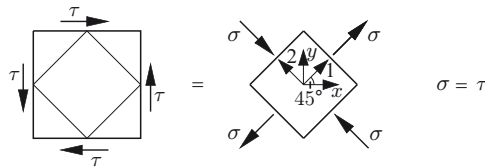


Bild 2.5. Alternative Beschreibungen des reinen Schubspannungszustandes

Ähnliches gilt auch für unterschiedliche Beschreibungen ein und desselben Verzerrungszustandes (siehe hierzu Bild 1.2 und Beispiel 2.3). \square

Abschließend seien noch die lokalen Kräftebilanzen des differentiellen Scheibenelementes im ebenen, örtlich veränderlichen Spannungszustand betrachtet. Hierfür benötigen wir den Begriff der partiellen Ableitung einer Funktion $z = f(x, y)$ von zwei unabhängigen Variablen x und y .

Bei Veränderung nur einer unabhängigen Variable, z.B. x um Δx , kann der Grenzwert des Differenzenquotienten der Funktion $z = f(x, y)$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_{,x} = z_{,x}$$

gebildet werden. Dieser Grenzwert stellt die partielle Ableitung der Funktion $z = f(x, y)$ nach x mit verschiedenen Schreibweisen dar. Die Diffe-

renziationsregeln für Funktionen von einer unabhängigen Variablen können übernommen werden, wobei nur die übrige Variable y als Konstante anzusehen ist. Die Erweiterung auf drei und mehr unabhängige Variable erfordert keine weiteren grundsätzlichen Überlegungen.

In den lokalen Kräftebilanzen soll die Wirkung der Volumenkräfte f_x und f_y (Bild 2.6) mit einbezogen werden. Ähnlich wie beim Stab in Bild 1.14 bekommt die Schnittkraft $\sigma_x b dy$ beim Fortschreiten um dx den Zuwachs

$$\frac{\partial(\sigma_x b dy)}{\partial x} dx = b dy \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx ,$$

wobei das partielle Ableitungssymbol $\partial()/\partial x$ das Festhalten der y -Koordinate beinhaltet und die Konstanz des kartesischen Flächendifferenzials $b dy$ beim Ableiten berücksichtigt wurde. Entsprechend gewinnt die Kraft $\tau_{yx} b dx$ beim Fortschreiten um dy in der y -Richtung den Zuwachs

$$\frac{\partial(\tau_{yx} b dx)}{\partial y} dy = b dx \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy .$$

Wegen der Ortsunabhängigkeit der kartesischen Flächendifferenziale $b dx$ und $b dy$ wurden in Bild 2.6 nur die Spannungen und ihre partiellen Differenziale eingetragen. Es empfiehlt sich aber bei Untersuchung des Kräftegleichgewichtes krummlinig berandeter Scheibenelemente oder bei veränderlicher Scheibendicke die Kräfte selbst in die Elementarskizze einzutragen und damit die Veränderlichkeit der Flächenelemente bei der partiellen Ableitung schon im Bild mit zu erfassen. Dies wird am Beispiel von Polarkoordinaten im Kapitel 9 demonstriert.

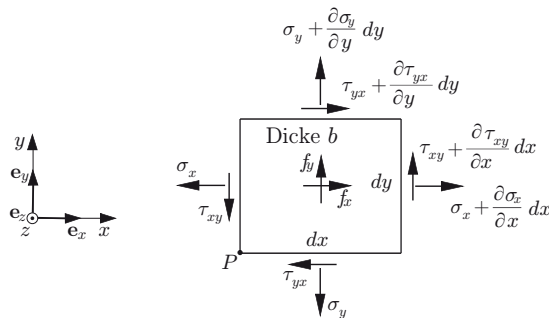


Bild 2.6. Zum Gleichgewicht des Scheibenelementes im ebenen Spannungszustand

In der horizontalen Kräftebilanz

$$\begin{aligned} \rightarrow : \quad & -\sigma_x bdy + \sigma_x bdy + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx bdy \\ & -\tau_{yx} bdx + \tau_{yx} bdx + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy bdx + f_x bdx dy = 0 \end{aligned}$$

verbleiben nach Herauskürzen des gemeinsamen Faktors $bdx dy$ nur die Volumenkraft f_x und die partiellen Ableitungen der beiden Spannungen σ_x , τ_{yx} in der Form

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0 . \quad (2.16a)$$

Das Ergebnis der obigen Überlegungen für die y -Richtung lautet

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 . \quad (2.16b)$$

Die beiden Gleichungen (2.16) sind lokale Kräftebilanzen. An dieser Stelle sei darauf verwiesen, dass im kinetischen Fall beschleunigter Bewegungen die Erweiterung von (2.16) nur die Berücksichtigung von Trägheitsanteilen in den Volumenkräften erfordert (s. Abschnitt 12.5).

Beide lokalen Kräftebilanzen (2.16) und die lokale Momentenbilanz (2.5) enthalten, wie bereits in Abschnitt 1.2 gefordert, keine Einzellasten.

In der Momentenbilanz, z. B. um P ausgeführt, haben die partiellen Spannungsableitungen und die Volumenkräfte keinen Einfluss. Die Symmetriebedingung (2.5) bleibt also sowohl in der Statik als auch in der Kinetik gültig. Sie sorgt für die Kopplung zwischen (2.16a) und (2.16b).

Die beiden als lineare inhomogene partielle Differenzialgleichungen einzuordnenden Beziehungen (2.16) enthalten die drei Unbekannten σ_x , σ_y und τ_{xy} . Deshalb ist das Gleichungssystem (2.16) einfach statisch unbestimmt. Diese Unbestimmtheit kann durch Hinzunahme von Gleichungen für die Verformungskinetik und das Materialverhalten beseitigt werden. Darüber hinaus sind die Gleichungen (2.16) durch statische Rand- oder Sprungbedingungen zu ergänzen, die Angaben über den Spannungsvektor betreffen (vgl. Kapitel 12).

2.3 Dreiachsiger Spannungszustand

Im allgemeinen Fall ist von einem dreiachsigen oder räumlichen Spannungszustand auszugehen. Die Erweiterung der Anordnung von Bild 2.3a führt auf das quaderförmige differenzielle Volumenelement im Bild 2.7.

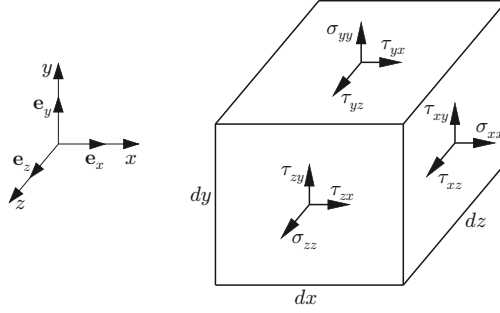


Bild 2.7. Kartesisches Quaderelement im räumlichen Spannungszustand

Die drei sichtbaren Koordinatenflächen sind durch glatt verteilte Spannungsvektoren belastet, die mittels ihrer Koordinatentripel

$$(\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}), \quad (\tau_{yx}, \sigma_{yy}, \tau_{yz}), \quad (\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_{zz})$$

bezüglich der kartesischen Basis \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z beschrieben werden. Auf den Rückseiten liegen die entgegengesetzt gleich großen Flächenkräfte vor.

Ähnlich wie in Abschnitt 2.2 fragen wir nach dem Zusammenhang zwischen dem Spannungsvektor an einem beliebig orientierten Flächenelement mit der Einheitsnormalen \mathbf{n} und den Spannungsvektoren an fest orientierten Koordinatenflächenelementen eines freigeschnittenen Tetraeders (Bild 2.8). Ersterer ist in Bild 2.8 als \mathbf{t} eingetragen. Für ihn werden zwei Komponentenzerlegungen benutzt, eine bezüglich der Basis $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ und die andere bezüglich des Normaleneinheitsvektors \mathbf{n} sowie des tangentialen Einheitsvektors \mathbf{s} des Flächenelementes dA . Die Zerlegungen sind

$$\mathbf{t} = t_x \mathbf{e}_x + t_y \mathbf{e}_y + t_z \mathbf{e}_z = \sigma \mathbf{n} + \tau \mathbf{s}, \quad (2.17)$$

wobei σ wieder eine Normalspannung und τ eine Schubspannung bezeichnen. Von den Spannungsvektoren an den Koordinatenflächenelementen liegt bereits die Koordinatendarstellung vor.

Die Inhalte der Flächenelemente in den Koordinatenebenen ergeben sich als Projektionen des geneigten Flächenelementes dA auf die Koordinatenebenen aus

$$\begin{aligned} dA_x &= dA \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_x) = n_x dA, \\ dA_y &= dA \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_y) = n_y dA, \\ dA_z &= dA \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_z) = n_z dA, \end{aligned} \quad (2.18)$$

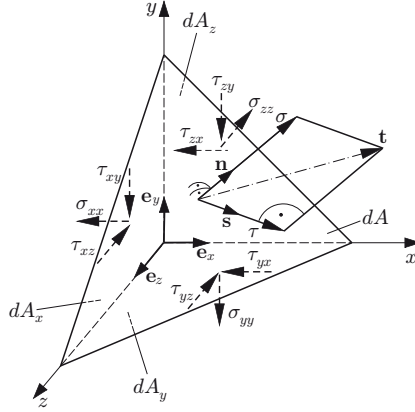


Bild 2.8. Zur Darstellung des Spannungsvektors

wobei

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z \quad (2.19)$$

gilt und $(\mathbf{n}, \mathbf{e}_k)$, $k = x, y, z$ den Winkel zwischen dem Normalenvektor \mathbf{n} und dem Basisvektor \mathbf{e}_k bezeichnet.

Die Kräftebilanz für das Tetraeder, in der ähnlich wie in Abschnitt 2.2 Volumenkräfte weggelassen werden können, führt mit der linken Gleichung von (2.17) und gemäß Bild 2.8 auf

$$\begin{aligned} \leftarrow : & \quad -t_x dA + \sigma_{xx} dA_x + \tau_{yx} dA_y + \tau_{zx} dA_z = 0, \\ \downarrow : & \quad -t_y dA + \tau_{xy} dA_x + \sigma_{yy} dA_y + \tau_{zy} dA_z = 0, \\ \nearrow : & \quad -t_z dA + \tau_{xz} dA_x + \tau_{yz} dA_y + \sigma_{zz} dA_z = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Hieraus entsteht unter Benutzung von (2.18)

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z, \\ t_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{zy} n_z, \\ t_z &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Diese Beziehungen, die auf CAUCHY (1789–1857) zurückgehen, stellen den angekündigten Zusammenhang zwischen den auf die Basis $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ bezogenen kartesischen Koordinaten des an einem beliebig orientierten Schnittflächenelement $\mathbf{n}dA$ wirkenden Spannungsvektors \mathbf{t} und den kartesischen Koordinaten der Spannungsvektoren an den kartesischen Koordinatenflächenelementen dar. Im ebenen Spannungszustand gemäß (2.3) entfallen die z -indizierten Terme.

Bezüglich des Momentengleichgewichts des Quaders von Bild 2.7 gelten in Verallgemeinerung von (2.5) die Symmetriebedingungen

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} , \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} , \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} . \quad (2.22)$$

Der räumliche Spannungszustand ist demnach durch sechs unabhängige Angaben bestimmt, die in der symmetrischen Matrix

$$(\sigma_{kl}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

angeordnet werden können. Diese Angaben stellen wie im ebenen Fall die Koordinaten des Spannungstensors dar. Es entstehen auch hier keine Missverständnisse, wenn die doppelten Indizes an den Normalspannungen durch einfache ersetzt werden, d. h. wir benutzen künftig die Schreibweise $\sigma_{xx} = \sigma_x$, $\sigma_{yy} = \sigma_y$ und $\sigma_{zz} = \sigma_z$.

Analog zum ebenen Fall kann auch ein und derselbe räumliche Spannungszustand bezüglich verschiedener gegeneinander räumlich gedrehter Vektorbasen beschrieben werden. Die Spannungstensorkoordinaten in Bezug auf die alte Vektorbasis und die Spannungstensorkoordinaten in Bezug auf die neue, gedrehte Vektorbasis hängen über Gleichungen voneinander ab, die den Beziehungen (2.6) bis (2.8) ähneln und in der weiterführenden Literatur zu finden sind.

Im Folgenden schränken wir den Spannungsvektor \mathbf{t} so ein, dass er normal zum schrägen Schnittflächenelement wirken soll, und geben seine Koordinatendarstellung unter Nutzung von (2.17) und (2.19) an:

$$\mathbf{t} = t_x \mathbf{e}_x + t_y \mathbf{e}_y + t_z \mathbf{e}_z = \sigma \mathbf{n} = \sigma n_x \mathbf{e}_x + \sigma n_y \mathbf{e}_y + \sigma n_z \mathbf{e}_z \quad (2.23)$$

bzw.

$$t_x = \sigma n_x , \quad t_y = \sigma n_y , \quad t_z = \sigma n_z . \quad (2.24)$$

Einsetzen von (2.24) in (2.21) ergibt ein lineares homogenes Gleichungssystem für die unbekannten Richtungskosinus n_x , n_y und n_z , das unter Benutzung von (2.22) in der Form

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z &= 0 , \\ \tau_{yx}n_x + (\sigma_y - \sigma)n_y + \tau_{yz}n_z &= 0 , \\ \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + (\sigma_z - \sigma)n_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

geschrieben werden kann.

Die notwendige Bedingung für nichttriviale Lösungen von (2.25) besteht im Verschwinden der Koeffizientendeterminante

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 . \quad (2.26)$$

Ohne Beweis sei festgestellt, dass die in (2.26) ausgedrückte Polynomgleichung dritten Grades

$$\begin{aligned} & -\sigma^3 + (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2)\sigma \\ & + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

wegen der Symmetrie der Koeffizientenmatrix von (2.26) drei reelle Lösungen besitzt. Diese drei Lösungen (Wurzeln) sind die Eigenwerte σ_i , $i = 1, 2, 3$ oder Hauptwerte des Spannungstensors und heißen Hauptspannungen.

Die drei Eigenwerte seien verschieden. Dann erzeugt jeder dieser Eigenwerte mit (2.25) ein homogenes Gleichungssystem für die drei Koordinaten des zum jeweiligen Eigenwert gehörenden Eigenvektors. Für $i = 1$ lautet das Gleichungssystem der zu bestimmenden Eigenvektorkoordinaten

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1)n_{1x} + \tau_{xy}n_{1y} + \tau_{xz}n_{1z} &= 0 , \\ \tau_{yx}n_{1x} + (\sigma_y - \sigma_1)n_{1y} + \tau_{yz}n_{1z} &= 0 , \\ \tau_{zx}n_{1x} + \tau_{zy}n_{1y} + (\sigma_z - \sigma_1)n_{1z} &= 0 . \end{aligned} \quad (2.28)$$

In (2.28) sind genau zwei Gleichungen linear unabhängig. Mittels dieser Gleichungen lassen sich zwei Eigenvektorkoordinaten durch die dritte ausdrücken. Der aus (2.28) folgende Eigenvektor

$$\mathbf{n}_1 = n_{1x}\mathbf{e}_x + n_{1y}\mathbf{e}_y + n_{1z}\mathbf{e}_z , \quad (2.29)$$

der die Richtung einer Hauptachse hat, besitzt zunächst eine unbestimmte Länge, die durch die Normierungsbedingung

$$|\mathbf{n}_1| = n_{1x}^2 + n_{1y}^2 + n_{1z}^2 = 1 \quad (2.30)$$

festgelegt wird, so dass n_{1x} , n_{1y} und n_{1z} die Richtungskosinus von \mathbf{n}_1 darstellen.

Die Wiederholung der Prozedur (2.28), (2.30) für $i = 2, 3$ führt auf die verbleibenden Eigenvektoren \mathbf{n}_2 und \mathbf{n}_3 . Diese können in einem Rechtssystem, dem Hauptachsenbezugssystem, angeordnet werden. Ihre Richtungskosinus bilden dann eine eigentlich orthogonale Matrix. Diese Matrix beschreibt

die räumliche Drehung des Hauptachsenbezugssystems gegenüber dem Ausgangssystem. Die zu den Hauptachsen senkrechten Ebenen heißen Hauptebenen.

Bei einer Doppelwurzel von (2.27) bestimmen die dazugehörigen Eigenvektoren eine Ebene, die senkrecht zum Eigenvektor der dritten Wurzel von (2.27) angeordnet ist. Die beiden Eigenvektoren der Doppelwurzel können so gewählt werden, dass sie zusammen mit dem dritten Eigenvektor ein kartesisches Rechtssystem bilden (Orthonormierung).

Entsteht das Hauptachsenbezugssystem durch Drehung um nur eine Koordinatenachse des Ausgangsbezugssystems, wobei diese Koordinatenachse schon eine Hauptachse ist, so führt die erläuterte Vorschrift zur Berechnung der Hauptspannungen und -richtungen auf die speziellen Formeln (2.12) bis (2.14).

Verschwindet eine Hauptspannung, so liegt ein ebener Spannungszustand vor. Umgekehrt geht der ebene Spannungszustand immer mit dem Verschwinden einer Hauptspannung einher. Ein einachsiger Spannungszustand ist gegeben, wenn zwei Hauptspannungen null sind. Drei gleiche Hauptspannungen charakterisieren den hydrostatischen Spannungszustand, bei dem jedes orthogonale Bezugssystem Hauptachsensystem ist.

Mit Kenntnis der Hauptspannungen lässt sich (2.27) nach den Regeln der Algebra auch als

$$\begin{aligned} -(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) &= -\sigma^3 + (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\sigma^2 \\ &\quad -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)\sigma + \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

schreiben. Die Koeffizienten von (2.27) und (2.31) legen dasselbe Polynom fest. Sie sind offensichtlich nicht vom Wechsel des Bezugs vom x, y, z -System auf das Hauptachsensystem betroffen und heißen deshalb Invarianten des Spannungstensors.

Ohne Beweis sei noch die maximale Schubspannung τ_{\max} angegeben, deren Definition für σ_k und σ_l mit $k \neq l$ durch

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}|\sigma_k - \sigma_l|_{\max}, \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (2.32)$$

bzw.

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (2.33)$$

gegeben ist, wobei die Hauptspannungen der Größe nach geordnet sind. Die maximale Schubspannung wirkt in Ebenen, die jeweils eine Neigung von je 45° gegenüber den Hauptachsen 1 und 3 besitzen.

Die Hauptspannungen und die maximale Schubspannung haben Bedeutung für die Beurteilung der Festigkeit von Bauteilen (vgl. Kapitel 6).

Das oben erläuterte Eigenwertproblem des Spannungstensors ist identisch mit dem Eigenwertproblem symmetrischer quadratischer Matrizen.

Beispiel 2.2

Bei der Berechnung eines Bauteiles wurde der räumliche Spannungszustand mit den Zahlenwerten $\sigma_x = 100$ MPa, $\sigma_y = 80$ MPa, $\sigma_z = 90$ MPa, $\tau_{xy} = 0$, $\tau_{xz} = 20$ MPa und $\tau_{yz} = 20$ MPa ermittelt (vgl. a. Bild 2.7). Gesucht sind die Hauptspannungen und -richtungen sowie die maximale Schubspannung.

Lösung:

In der Eigenwertgleichung (2.27) wird der normierte Eigenwert $\bar{\sigma}$ mittels $\sigma = \bar{\sigma} \cdot 10$ MPa eingeführt, so dass

$$-\bar{\sigma}^3 + 27\bar{\sigma}^2 - 234\bar{\sigma} + 648 = 0$$

mit den Lösungen $\bar{\sigma}_1 = 12$, $\bar{\sigma}_2 = 9$ und $\bar{\sigma}_3 = 6$ folgt. Die Hauptspannungen sind dann $\sigma_1 = 120$ MPa, $\sigma_2 = 90$ MPa und $\sigma_3 = 60$ MPa.

Aus den gegebenen Spannungswerten und der ersten Hauptspannung σ_1 ergibt sich mit (2.28) das homogene Gleichungssystem zur Bestimmung der Richtungskosinus n_{1x} , n_{1y} und n_{1z} des Eigenvektors \mathbf{n}_1 der ersten Hauptrichtung

$$\begin{aligned} -2n_{1x} + 2n_{1z} &= 0, \\ -4n_{1y} + 2n_{1z} &= 0, \\ 2n_{1x} + 2n_{1y} - 3n_{1z} &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen liefern $n_{1x} = n_{1z}$ und $n_{1y} = n_{1z}/2$. Die Normierungsbedingung (2.30) ergibt

$$n_{1x}^2 + n_{1y}^2 + n_{1z}^2 = \frac{9}{4}n_{1z}^2 = 1$$

bzw. $n_{1x} = 2/3$, $n_{1y} = 1/3$ und $n_{1z} = 2/3$.

Analoge Rechnungen für σ_2 und σ_3 führen auf $n_{2x} = -2/3$, $n_{2y} = 2/3$ und $n_{2z} = 1/3$ bzw. $n_{3x} = -1/3$, $n_{3y} = -2/3$ und $n_{3z} = 2/3$. Die Normierung der Eigenvektoren wurde so realisiert, dass die Eigenvektoren \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 und \mathbf{n}_3 der Hauptrichtungen ein Rechtssystem bilden.

Die maximale Schubspannung beträgt nach (2.32) bzw. (2.33)

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = 30 \text{ MPa}.$$

□

Es sei noch erwähnt, dass zur Untersuchung inhomogener dreiachsiger Spannungszustände und bei Berücksichtigung von beliebigen Volumenkräften ein-

schließlich Trägheitsanteilen die Anordnung aus Bild 2.6 um Terme bezüglich der z -Richtung erweitert werden muss. Das Kräftegleichgewicht führt dann auf drei Gleichungen anstelle von (2.16a) und (2.16b) sowie in den dazugehörigen statischen Randbedingungen für den Spannungsvektor auf die Berücksichtigung einer z -Komponente (s. Kapitel 12). Die Symmetrie (2.22) des Spannungstensors als Ausdruck der Erfüllung der Momentenbilanz bleibt bestehen.

An dieser Stelle ist zu bemerken, dass die mitunter anzutreffenden, durch die Punktmechanik inspirierten kugelförmigen Massen- bzw. Volumenelemente anstelle der durch Koordinatenflächen wie in Bild 2.7 abgegrenzten Elemente für die obigen Betrachtungen ungeeignet sind. Denn sie hinterlassen auch bei noch so geringen Abmessungen in dichtester Packung Lücken, die im Widerspruch zu der mit dem Körperbegriff eingeführten Kontinuumsannahme stehen, und die Erfüllung ihres Momentengleichgewichtes bleibt offen (s. a. Kapitel 12).

2.4 Verschiebungen und Verzerrungen

Wird ein Körper belastet, so verformt er sich. Dabei werden die Körperpunkte in Abhängigkeit von ihrem Ort verschoben. Die Verschiebungen aller Körperpunkte bilden den Verschiebungszustand des Körpers, auch als Verschiebungsfeld bezeichnet. Ortsveränderliche Verschiebungsfelder verursachen i. Allg. Verzerrungen des Körpers. Die Verzerrungen gehen gemeinsam mit den Spannungen in die Materialgleichungen ein. Es werden deshalb Definitionsgleichungen für die Verzerrungen benötigt, die kinematischer (auch geometrischer) Natur sind.

Zur Berechnung des kinematischen Zusammenhangs zwischen dem Verschiebungsfeld der Körperpunkte und den daraus folgenden Verzerrungen betrachten wir ein kartesisches Volumenelement des Körpers. Von einer in der x, y -Ebene liegenden Fläche dieses elementaren Quaders sind in Bild 2.9 die materiellen Seitenlinien AB und AC eingezeichnet.

Zunächst werde der Quader nur parallel zur x, y -Ebene bewegt. Dabei wird der anfänglich bei $A(x, y)$ befindliche Körperpunkt an den Ort A' verschoben. Der entsprechende Verschiebungsvektor ergibt sich als Funktion der beiden unabhängigen Ortskoordinaten x und y der Ausgangslage A des Körperpunktes zu

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{r}_{A'} - \mathbf{r}_A = u_x(x, y)\mathbf{e}_x + u_y(x, y)\mathbf{e}_y . \quad (2.34)$$

In Bild 2.9 wurde der Vektor \mathbf{u} zur Vereinfachung ohne die Argumente x und y eingetragen.

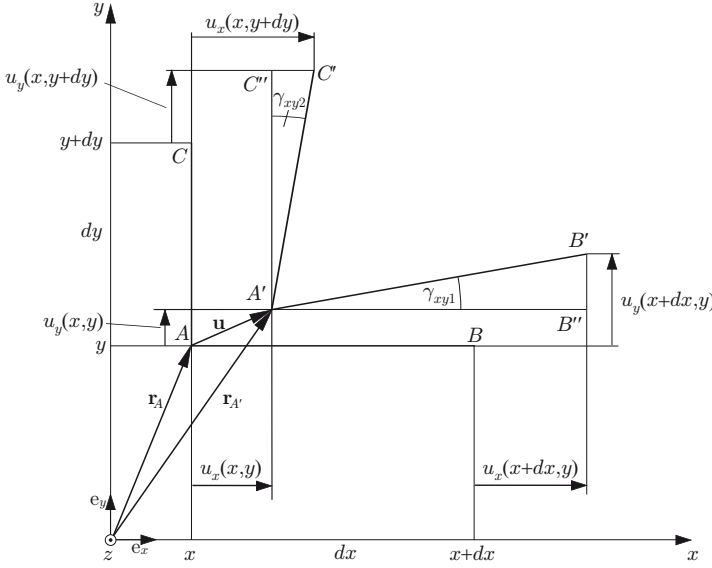


Bild 2.9. Zur Berechnung der Verzerrungen

Infolge ebener Verzerrung des Quaderelementes wird der in der Ausgangsanordnung um dx vom Körperpunkt bei A entfernte Körperpunkt bei B nach B' verschoben. Der dabei erzeugte Winkel γ_{xy1} zwischen der materiellen Seitenlinie im verzerrten Zustand $A'B'$ und im Ausgangszustand AB sei hinreichend klein, $|\gamma_{xy1}| \ll 1$. Dann ist näherungsweise $\overline{A'B'} \approx \overline{A'B''}$, und die Dehnung des mit seinen Enden ursprünglich in den Punkten A und B befindlichen materiellen Längenelementes dx ergibt sich analog zu (1.31) und mit $u_x(x+dx, y) = u_x(x, y) + \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} dx$ in der Form

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\overline{A'B''} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{dx} \left[dx + u_x(x+dx, y) - u_x(x, y) - dx \right] = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (2.35)$$

wobei das Symbol $\partial()/\partial x$ wieder die partielle Ableitung für festgehaltenes y bezeichnet und der Doppelindex xx auf die Form der rechten Seite in (2.35) Bezug nimmt.

Eine ähnliche Überlegung bezüglich des materiellen Elementes dy führt auf

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}. \quad (2.36)$$

Wir setzen auch $|\varepsilon_{xx}|, |\varepsilon_{yy}| \ll 1$ voraus. Für $|\gamma_{xy1}| \ll 1$ gilt dann in derselben Näherungsordnung mit $A'B'' \approx dx$ noch

$$\gamma_{xy1} = \frac{\overline{B'B''}}{A'B''} = \frac{1}{dx} [u_y(x+dx, y) - u_y(x, y)] = \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.37)$$

und analog

$$\gamma_{xy2} = \frac{\partial u_x}{\partial y} . \quad (2.38)$$

Das verzerrte materielle Zweibein $A'B' - A'C'$ weicht deshalb um die Schubverzerrung

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy1} + \gamma_{xy2} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.39)$$

vom ursprünglich rechten Winkel ab.

Bei einer räumlichen Verzerrung des Körpers ist das materielle Zweibein $AB - AC$ aus Bild 2.9 um einen dritten Schenkel in z -Richtung AD zu ergänzen und die Abhängigkeit aller Verschiebungsvektorkoordinaten u_x, u_y und u_z von den unabhängigen Ortsvariablen x, y und z zu beachten. Für analoge Näherungen wie oben bleiben die Formeln (2.35), (2.36) und (2.39) erhalten. Es kommen noch eine Dehnung in z -Richtung ε_{zz} sowie zwei Schubverzerrungen γ_{xz} bzw. γ_{yz} in den Ebenen $x-z$ bzw. $y-z$ hinzu, so dass sich schließlich insgesamt drei Dehnungen

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} , \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} , \quad |\varepsilon_{xx}|, |\varepsilon_{yy}|, |\varepsilon_{zz}| \ll 1 \quad (2.40)$$

und drei Schubverzerrungen

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} , \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} , \quad (2.41)$$

$$|\gamma_{xy}|, |\gamma_{xz}|, |\gamma_{yz}| \ll 1$$

ergeben.

Die Dehnungen (2.40) und Schubverzerrungen (2.41) lassen sich mit der Definition

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \gamma_{kl} , \quad k \neq l \quad (2.42)$$

und der Indexvereinbarung $x_x = x, x_y = y, x_z = z$ zu den Maßzahlen oder Koordinaten des so genannten Verzerrungstensors

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) , \quad k, l = x, y, z \quad (2.43)$$

zusammenfassen. Die Verzerrungen (2.43), welche den Verzerrungszustand eindeutig festlegen, werden auch häufig in der Matrixform

$$(\varepsilon_{kl}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

angegeben.

Die schon angesprochene Kleinheit der Beträge $|\varepsilon_{kl}|$ in (2.43) garantieren wir durch die Bedingung $|\partial u_k / \partial x_l| \ll 1$ für die Verschiebungsgradienten. Die vorgenommene Näherung erlaubt auch die Vernachlässigung der hier nicht erklärten lokalen Starrkörperrotationen, welche z. B. für das Knicken schlanker Stäbe bedeutsam sind (s. Abschnitt 8.3). Sie stellt eine geometrische Linearisierung dar.

Der Verzerrungstensor (2.43) besitzt dieselben mathematischen Eigenschaften wie der Spannungstensor. Er ist offensichtlich symmetrisch, d. h. seine Koordinaten genügen der Bedingung

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} , \quad (2.44)$$

so dass in den neun kinematischen (auch geometrischen) Beziehungen (2.43) nur sechs unabhängig sind.

Die Transformation der Verzerrungstensorkoordinaten bei Drehung des Bezugssystems erfolgt nach denselben Gleichungen wie beim Spannungstensor. Beispielsweise ergeben sich im ebenen Fall, der durch das Verschwinden einer Hauptdehnung definiert ist, beim Wechsel vom kartesischen x, y -System auf das kartesische u, v -System in der schon festgelegten Hauptebene nach Bild 2.3 die Transformationsgleichungen

$$\varepsilon_u = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\varphi + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\varphi , \quad (2.45)$$

$$\varepsilon_v = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\varphi - \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\varphi , \quad (2.46)$$

$$\gamma_{uv} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\varphi + \gamma_{xy} \cos 2\varphi , \quad (2.47)$$

in denen die Definition (2.42) und die Indexvereinfachung $xx, yy, uu, vv \rightarrow x, y, u, v$ eingesetzt wurden. Der Formalismus zur Bestimmung der Hauptwerte und -achsen kann vom Spannungstensor allein durch Austausch der Bezeichnungen unter Beachtung von (2.42) vollständig übernommen werden. Nach Sortierung der Hauptdehnungen in der Anordnung

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3 \quad (2.48)$$

ergibt sich die maximale Schubverzerrung analog zur maximalen Schubspannung bis auf den Faktor $1/2$ aus

$$\gamma_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 . \quad (2.49)$$

Besonders erwähnt sei die erste Invariante e des Verzerrungstensors

$$e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 . \quad (2.50)$$

Sie liefert die auf das Ausgangsvolumen V_0 bezogene Änderung des Volumens $V - V_0$, wie die homogene Dehnung eines Quaders mit den Kantenlängen l_1 , l_2 und l_3 zeigt. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned} \frac{V - V_0}{V_0} &= \frac{l_1(1 + \varepsilon_1)l_2(1 + \varepsilon_2)l_3(1 + \varepsilon_3) - l_1l_2l_3}{l_1l_2l_3} \\ &= (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1 . \end{aligned}$$

Für $|\varepsilon_i| \ll 1$ und die daher erlaubte Vernachlässigung der nichtlinearen Terme ergibt sich

$$\frac{V - V_0}{V_0} \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = e . \quad (2.51)$$

Der Ausdruck (2.51) heißt Volumendehnung.

Abschließend wird nochmals darauf hingewiesen, dass für die im Gleichgewicht befindlichen Körper bei ihrer Bindung an eine feste Umgebung sowie wegen der vorausgesetzten sehr kleinen Dehnungen und Winkeländerungen die Ortskoordinaten der materiellen Körperpunkte in der Ausgangsposition näherungsweise auch zur Angabe der aktuellen Position benutzt werden dürfen (geometrische Linearisierung). Ausgenommen davon ist das Kapitel 8 über elastische Stabilitätsprobleme. Im Übrigen gehören zu den Differenzialgleichungen (2.43) noch kinematische (auch geometrisch genannte) Randbedingungen mit Angaben über die Verschiebungen (s. Kapitel 12).

Beispiel 2.3

Man betrachte das Bild 1.2 und bestimme den Zusammenhang zwischen der relativen Längenänderung $\varepsilon = \Delta l/l$ und der Abweichung vom rechten Winkel γ . Das Ergebnis ist mittels der Transformationsformeln (2.45) bis (2.47) zu überprüfen.

Lösung:

Aus Bild 1.2b kann

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{l/2 - \Delta l/2}{l/2 + \Delta l/2} = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

abgelesen werden. Das Additionstheorem für den Tangens liefert

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\gamma}{2}}{1 + \tan\frac{\pi}{4} \tan\frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \tan\frac{\gamma}{2}}{1 + \tan\frac{\gamma}{2}}.$$

Wegen $|\gamma|, |\varepsilon| \ll 1$ gelten $\tan \gamma/2 \approx \gamma/2$, $(1 + \gamma/2)^{-1} \approx 1 - \gamma/2$ und $(1 + \varepsilon)^{-1} \approx 1 - \varepsilon$. Daraus ergibt sich

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \approx \frac{1 - \gamma/2}{1 + \gamma/2} \approx (1 - \gamma/2)^2 \approx (1 - \varepsilon)^2$$

bzw. im Rahmen der geometrischen Linearisierung

$$\gamma = 2\varepsilon.$$

Für die Anwendung der Transformationsformeln (2.45) bis (2.47) sind zunächst gemäß Bild 1.2 die Beziehungen $\varepsilon_x = \varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_y = \varepsilon_2 = -\varepsilon$, $\gamma_{xy} = 0$ und $\varphi = \pi/4$ festzustellen. Diese führen auf $\varepsilon_u = 0$, $\varepsilon_v = 0$ und $\gamma_{uv} = -2\varepsilon = -\gamma$. Das Minuszeichen genügt der Tatsache, dass γ eine Verkleinerung des ursprünglich rechten Winkels in Bild 1.2 bezeichnet, ein durch die Achsen u, v gegebener rechter Winkel aber nach Bild 1.2b um γ vergrößert wird. \square

Das Beispiel 2.3 zeigt, dass wie im Fall des Spannungszustandes ein und derselbe Verzerrungszustand durch genau einen Verzerrungstensor festgelegt wird, wobei die Koordinaten des Verzerrungstensors, d. h. die Beschreibung des Verzerrungszustandes, in unterschiedlichen Bezugssystemen, hier x, y bzw. u, v , verschieden ausfallen (vgl. auch Beispiel 2.1).

Beispiel 2.4

Auf der Oberfläche eines ebenen Blechs befinden sich drei Dehnmessstreifen a , b und c mit den Richtungen nach Bild 2.10.

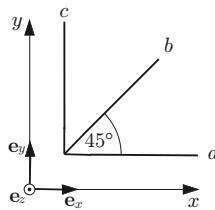


Bild 2.10. Dehnmessstreifenanordnung

Gesucht sind die Koordinaten des Verzerrungstensors bezüglich des x, y, z -Systems in Abhängigkeit von den gemessenen Dehnungen ε_a , ε_b und ε_c .

Lösung:

Aus Bild 2.10 können $\varepsilon_x = \varepsilon_a$ und $\varepsilon_y = \varepsilon_c$ abgelesen werden. Für ε_b ergibt

sich mit (2.45)

$$\varepsilon_b = \varepsilon_u = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 90^\circ$$

und folglich

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}(2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c) .$$

Die restlichen Verzerrungstensorsorkoordinaten ε_z , ε_{zx} und ε_{zy} bleiben unbestimmt. \square

2.5

2.5 HOOKEsches Gesetz

Die bereits in Abschnitt 1.3 aus den Ergebnissen des Zugversuches gewonnenen linear-elastischen Materialgleichungen werden jetzt auf den dreiachsigen Spannungszustand verallgemeinert. Wir setzen weiterhin Isotropie, d. h. Richtungsunabhängigkeit, und Homogenität, d. h. Ortsunabhängigkeit, der Materialeigenschaften des Körpers voraus.

Zunächst liege ein einachsiger Spannungszustand σ vor (Bild 2.11a).

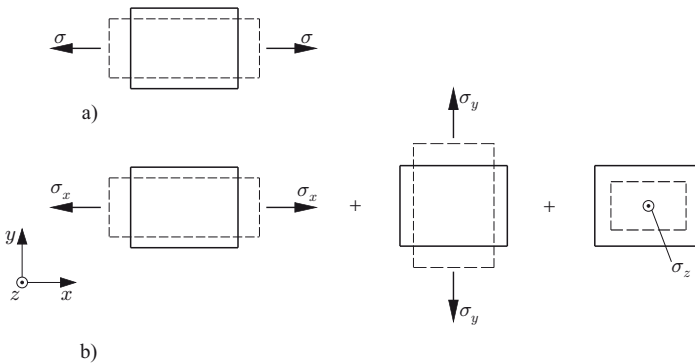


Bild 2.11. Zur Verallgemeinerung des HOOKEschen Gesetzes

Die Dehnung ε in Richtung der Spannung σ , die so genannte Längsdehnung, folgt mit dem schon aus (1.13) bekannten Elastizitätsmodul E zu

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

und die dazugehörige Querdehnung mit der Querkontraktionszahl ν nach (1.15) zu

$$\varepsilon_q = -\nu\varepsilon = -\nu\frac{\sigma}{E} .$$

Wird der Körper außer durch eine Längsspannung σ_x noch durch zwei Querspannungen σ_y und σ_z beansprucht (Bild 2.11b), so verringert sich die Längsdehnung in x -Richtung um die anteiligen Querdehnungen infolge der Längsdehnungen in y - bzw. z -Richtung, so dass

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2.52)$$

entsteht. Dabei durften die anteiligen Terme wegen ihrer linearen Abhängigkeit von der Spannung addiert werden. Die Wiederholung der Überlegung für die y - und die z -Richtung liefert noch

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x + \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] , \quad (2.53)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y + \frac{1}{E}\sigma_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] . \quad (2.54)$$

Nach Addition der drei Dehnungen entsteht die Volumendehnung (2.50) in der Form

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) . \quad (2.55)$$

Sie ist also der Spannungssumme proportional. Mit ihrer Hilfe lässt sich die Umkehrung des Gleichungssystems (2.52) bis (2.54) als

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 + \nu} \left[\left(1 + \frac{\nu}{1 - 2\nu}\right) \varepsilon_x + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_y + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_z \right] \\ &= \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1 - 2\nu} e \right) , \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{E}{1 + \nu} \left[\frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_x + \left(1 + \frac{\nu}{1 - 2\nu}\right) \varepsilon_y + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_z \right] \\ &= \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1 - 2\nu} e \right) , \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{E}{1 + \nu} \left[\frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_x + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_y + \left(1 + \frac{\nu}{1 - 2\nu}\right) \varepsilon_z \right] \\ &= \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1 - 2\nu} e \right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

schreiben. In den Gleichungssystemen (2.52) bis (2.54) und (2.56) bis (2.58) ist die bedeutsame Symmetrie der aus den Materialkonstanten gebildeten Koeffizientenmatrix zu erkennen.

Der Beanspruchungsfall reinen Schubes nach Bild 1.7 und Gleichung (1.16) wird auf die drei Ebenen xy , xz und yz angewendet:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \ , \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \ , \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \ . \quad (2.59)$$

Alle drei Gleichungen enthalten als Materialkonstante denselben Schubmodul G .

Der noch zu beweisende Zusammenhang (1.17) zwischen den drei Materialkonstanten E , G und ν bleibt bestehen (s. Abschnitt 2.6).

Wie im Fall einachsiger Spannung müssen gegebenenfalls auch unter allgemeineren Bedingungen Wärmedehnungen berücksichtigt werden. Bei isotropem Material dürfen sie sich in den drei Hauptrichtungen des thermischen Verzerrungstensors nicht unterscheiden. Die drei gleichen Hauptwerte gelten in allen kartesischen Bezugssystemen. Temperaturänderungen erzeugen deshalb keine Schubverzerrungen. Dies demonstriert die selbstähnliche Vergrößerung eines kartesischen Netzes infolge Temperaturerhöhung um ΔT gemäß dem Bild 2.12.

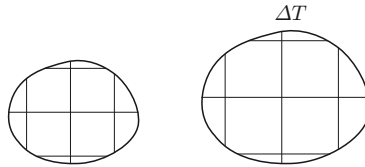


Bild 2.12. Verformung infolge Temperaturerhöhung

In Verallgemeinerung von (1.18) und (2.52) bis (2.54) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha\Delta T \ , \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha\Delta T \ , \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha\Delta T \end{aligned} \quad (2.60)$$

oder aufgelöst nach den Normalspannungen mit (2.55)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) - \frac{1}{1-2\nu} E\alpha\Delta T \ , \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) - \frac{1}{1-2\nu} E\alpha\Delta T \ , \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) - \frac{1}{1-2\nu} E\alpha\Delta T \ . \end{aligned} \quad (2.61)$$

Hier bezeichnet α wieder die Wärmedehnzahl. Die Beziehungen (2.59) bleiben bestehen.

2.6 Arbeit, Verzerrungsarbeit und -energie

Bei Belastung und Verformung von Körpern wird in den Körpern Arbeit verrichtet, die bei elastischem Materialverhalten in diesen gespeichert und während der Entlastung zurückgewonnen werden kann. Die Speicherung ist mit dem Begriff „Energie“ verbunden. Arbeit und Energie stellen streng zu unterscheidende fundamentale Definitionen der Mechanik dar, deren Kenntnis für das theoretische Verständnis als auch für die Lösung praktischer Aufgaben wichtig ist (s. Kapitel 6 bis 8).

Die Arbeit W , die eine Kraft F während der Verschiebung längs eines Weges u verrichtet, beträgt bei gleichen Orientierungen von Kraft und Verschiebung definitionsgemäß

$$W = \int_0^u F(\bar{u}) d\bar{u} . \quad (2.62)$$

Wirkt die Kraft F außerhalb des Zugstabes in Bild 2.13 und besitzt einen Angriffspunkt, der mit dem rechten Ende des Zugstabes zusammenfällt, so verrichtet sie an der Verschiebung u die äußere Arbeit W_a , welche sich mit (2.62) zu

$$W_a = \int_0^u F(\bar{u}) d\bar{u} \quad (2.63)$$

ergibt.

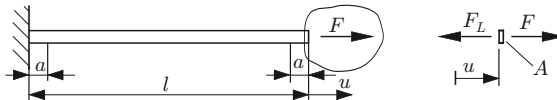


Bild 2.13. Zur Berechnung der Arbeit am Zugstab

Die Längsdehnung des Zugstabes geht einher mit einer nach Bild 2.13 ortsunabhängigen, im Inneren des Stabes wirkenden Kraft, der Längskraft F_L . Die Längskraft verrichtet an der Verschiebung u des rechten Zugstabendes (Bild 2.13) die innere Arbeit

$$W_i = - \int_0^u F_L(\bar{u}) d\bar{u} . \quad (2.64)$$

Das Minuszeichen entsteht, weil die Längskraft F_L am freigeschnittenen rechten Zugstabende entgegengesetzt zur Wegkoordinate u gerichtet ist. Es wird bei der Definition der inneren Arbeit in anderen Darstellungen mitunter weggelassen. Dies bedingt dann ein Pluszeichen zwischen innerer Arbeit und Po-

tenzial der inneren Lasten anstelle des Minuszeichens (s.u. (2.70)). Befindet sich das rechte Zugstabende während der Lastaufbringung immer im Gleichgewicht, d. h.

$$F(u) = F_L(u) , \quad (2.65)$$

so folgt die Identität

$$W_a = \int_0^u F(\bar{u}) d\bar{u} = \int_0^u F_L(\bar{u}) d\bar{u} = -W_i . \quad (2.66)$$

Für die Berechnung der inneren Arbeit setzen wir eine hinreichende Schlankheit und homogene linear-elastische Materialeigenschaften des Zugstabes voraus. Die Störung des Spannungs- und Verzerrungszustandes im Einspann- und Krafteinleitungsbereich mit der Abklinglänge $a \ll l$ kann dann gemäß dem Prinzip von DE SAINT VENANT (s. Abschnitt 10.1) vernachlässigt werden. Es ergibt sich wie in Beispiel 1.1 näherungsweise im gesamten Stabvolumen eine konstante Spannung $\sigma = F_L/A$ und eine konstante Dehnung

$$\varepsilon = \frac{u}{l} . \quad (2.67)$$

Damit wird die bei der Verformung des Zugstabes verrichtete innere Arbeit, die so genannte Verzerrungsarbeit,

$$W_i = - \int_0^u F_L(\bar{u}) d\bar{u} = -Al \int_0^{\varepsilon} \sigma(\bar{\varepsilon}) d\bar{\varepsilon} . \quad (2.68)$$

Aus ihr kann, da der Integralausdruck auf der rechten Seite von (2.68) an allen Stellen des Zugstabes gleich ist, die spezifische innere Verzerrungsarbeit je Volumeneinheit

$$W_i^* = \frac{W_i}{Al} = - \int_0^{\varepsilon} \sigma(\bar{\varepsilon}) d\bar{\varepsilon} \quad (2.69)$$

gewonnen werden.

Das Integral in (2.69) stellt die Fläche unter der Spannungsdehnungskurve dar (Bild 2.14). Das lineare Kurvenstück ① entsprechend dem HOOKEschen Gesetz liefert für Be- und Entlastungswege gleiche Flächen (vertikal schraffiert), d. h. die bei Belastung verrichtete innere Arbeit (2.69) wird bei Entlastung vollständig zurückgewonnen. Sie war im Zugstab gespeichert. Eine Arbeit mit dieser besonderen Eigenschaft wird bis auf ein aus formalen Gründen noch zu berücksichtigendes Minuszeichen als Energie, potenzielle Energie oder Potenzial bezeichnet, hier als die spezifische elastische Verzerrungsenergie U^* . Die statische Last, deren Arbeit gespeichert wurde,

heißt konservativ (energieerhaltend) oder Potenziallast. Mit der Definition $U^* = -W_i^*$, d. h. $U^*(0) = 0$, und dem HOOKEschen Gesetz (1.13) ergibt sich aus (2.69)

$$U^* = -W_i^* = \int_0^\varepsilon \sigma(\bar{\varepsilon}) d\bar{\varepsilon} = \int_0^\varepsilon E\bar{\varepsilon} d\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1}{2} \sigma\varepsilon . \quad (2.70)$$

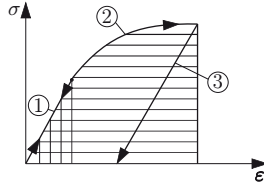


Bild 2.14. Spannungsdehnungsdiagramm mit Be- und Entlastungswegen

Die Maßeinheit für U^* ist $\text{Nm}/\text{m}^3 = \text{N}/\text{m}^2$, gleicht also der Maßeinheit der Spannung, obwohl beide Größen physikalisch verschieden voneinander sind. Das Spannungsdehnungsdiagramm metallischer Konstruktionswerkstoffe setzt sich meist oberhalb eines linearen Anfangsstückes nichtlinear fort. Dies zeigen, ergänzend zu Bild 1.6, das Geradenstück (1) und der gekrümmte Linienabschnitt (2) in Bild 2.14. Die unter beiden Kurven (1) und (2) befindliche horizontal schraffierte Fläche repräsentiert die spezifische Verzerrungsarbeit (2.69). Das Entlastungsverhalten der genannten Materialien kann näherungsweise durch die Gerade (3) parallel zu (1) beschrieben werden. Dann wird nur die Arbeit zurückgewonnen, welche der Fläche unter der Geraden (3) entspricht. Der Rest geht zum größten Teil in Wärme über, während ein kleiner Teil davon, begleitet von Strukturveränderungen des Materials, im Material verbleibt. Das beschriebene Materialverhalten heißt elastoplastisch. Für linear-elastisches Material lässt sich die Beziehung (2.66) mit (2.69) und (2.70) als

$$-W_i = -AlW_i^* = AlU^* = U = \frac{1}{2} Al\sigma\varepsilon = \frac{1}{2} F_L u = W_a \quad (2.71)$$

schreiben, wobei U die Verzerrungsenergie des Stabes bezeichnet.

Es gibt auch nichtlinear-elastische Materialien mit Kennlinien wie in Bild 2.15, bei denen Be- und Entlastungsweg übereinstimmen, so dass wieder $U^* = -W_i^*$ folgt. In diesem Fall kann zur spezifischen Verzerrungsenergie U^* die so genannte spezifische Ergänzungsenergie \bar{U}^* definiert werden, für die

$$\bar{U}^* = \sigma\varepsilon - U^* \quad (2.72)$$

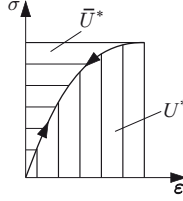


Bild 2.15. Spannungsdehnungsdiagramm bei nichtlinearer Elastizität

gilt und die gelegentlich als Hilfsrechengröße Verwendung findet. Bei linearem Material entstehen in Bild 2.15 zwei Dreiecke mit gleichem Flächeninhalt, d. h.

$$\bar{U}^* = U^* . \quad (2.73)$$

Unter reiner homogener Schubbeanspruchung gemäß Bild 1.7 beträgt die spezifische innere Verzerrungsarbeit wegen $|\gamma| \ll 1$

$$W_i^* = -\frac{1}{ahb} \int_0^\gamma \tau(\bar{\gamma}) ahb d\bar{\gamma} = - \int_0^\gamma \tau(\bar{\gamma}) d\bar{\gamma} , \quad (2.74)$$

die für linear-elastisches Material mit (1.16) unabhängig vom Belastungsweg ist und deshalb auf die spezifische elastische Verzerrungsenergie

$$U^* = -W_i^* = \int_0^\gamma \tau(\bar{\gamma}) d\bar{\gamma} = \int_0^\gamma G \bar{\gamma} d\bar{\gamma} = \frac{1}{2} G \gamma^2 = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{1}{2} \tau \gamma \quad (2.75)$$

führt.

Zur Berechnung der spezifischen Verzerrungsenergie des linear-elastischen Materials im räumlichen Spannungs- und Verzerrungszustand notieren wir zunächst die spezifische innere Verzerrungsarbeit als Summe aller Anteile der Normalspannungen an den Dehnungen gemäß (2.69) und der Schubspannungen an den Schubverzerrungen gemäß (2.74) in der Form

$$\begin{aligned} -W_i^* = \int & \left[\sigma_x(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z) d\varepsilon_x + \sigma_y(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z) d\varepsilon_y + \sigma_z(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z) d\varepsilon_z \right. \\ & \left. + \tau_{xy}(\gamma_{xy}) d\gamma_{xy} + \tau_{xz}(\gamma_{xz}) d\gamma_{xz} + \tau_{yz}(\gamma_{yz}) d\gamma_{yz} \right] . \end{aligned} \quad (2.76)$$

Dabei wird die Abhängigkeit der Normalspannungen von allen drei Dehnungen entsprechend (2.56) bis (2.58) und der Schubspannungen von der jeweiligen Schubverzerrung nach (2.59) angezeigt. Alle Verzerrungen variieren zwischen null und einem Endwert. Die letzten drei Summanden in (2.76) sind bestimmte Integrale einer Funktion von einer Veränderlichen. Dagegen bilden die ersten drei Summanden ein Linienintegral $-W_{iL}^*$. Das Linieninte-

gral, auch als Kurven- oder Wegintegral bezeichnet, hängt genau dann nicht vom Weg L der Zustandsvariablen $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ und ε_z ab, wenn sein Integrand das vollständige Differenzial einer Zustandsfunktion $U_L^*(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ ist, d. h.

$$\begin{aligned} -W_{iL}^* &= \int_L (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z) = \int_L \left(\frac{\partial U_L^*}{\partial \varepsilon_x} d\varepsilon_x + \frac{\partial U_L^*}{\partial \varepsilon_y} d\varepsilon_y + \frac{\partial U_L^*}{\partial \varepsilon_z} d\varepsilon_z \right) \\ &= \int_L dU_L^* = U_L^*(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z) . \end{aligned} \quad (2.77)$$

Notwendig und hinreichend für die Existenz der auch als Potenzial bezeichneten Zustandsfunktion U_L^* sind die Bedingungen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_y} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_x} , \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_z} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial \varepsilon_x} , \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_z} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial \varepsilon_y} , \quad (2.78)$$

welche wegen der Symmetrie der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (2.56) bis (2.58) erfüllt werden. Die Integration von (2.77) unter Beachtung von (2.56) bis (2.58) für einen beliebigen Weg L vom unverzerrten zum verzerrten Zustand liefert

$$U_L^*(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z) = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{1-\nu}{2} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \nu (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z) \right], \quad (2.79)$$

ein Ergebnis, das durch die Bildung von

$$\sigma_x = \frac{\partial U_L^*}{\partial \varepsilon_x} , \quad \sigma_y = \frac{\partial U_L^*}{\partial \varepsilon_y} , \quad \sigma_z = \frac{\partial U_L^*}{\partial \varepsilon_z} \quad (2.80)$$

aus (2.79) und Vergleich mit (2.56) bis (2.58) bestätigt wird. Wegen der Potenzialeigenschaft (2.80) heißt das elastische Materialgesetz konservativ. Das Wort konservativ weist auf den Fakt hin, dass bei Verformung des Materials Energie nicht dissipiert, d. h. nicht irreversibel in Wärme umgewandelt wird. Die Addition von U_L^* in der Form (2.79) zu den mit (2.59) berechneten letzten drei Integralen aus (2.76) ergibt die spezifische elastische Verzerrungsenergie

$$\begin{aligned} U^* &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{1-\nu}{2} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \nu (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z) \right] \\ &\quad + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) , \end{aligned} \quad (2.81)$$

welche mit (2.52) bis (2.54) und (2.59) auch als

$$U^* = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) \quad (2.82)$$

geschrieben werden kann. Desweiteren lässt sich U^* noch allein durch die Spannungen ausdrücken.

Die spezifische elastische Verzerrungsenergie ist in einen Volumen- und einen Gestaltänderungsanteil zerlegbar

$$U^* = U_V^* + U_G^* . \quad (2.83)$$

Ersterer folgt aus der mittleren Spannung

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

mit der Volumendehnung e aus (2.55) zu

$$U_V^* = \frac{1}{2}\sigma_m e = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \geq 0 , \quad (2.84)$$

letzterer unter Beachtung von (1.17) in (2.81) und (2.84) aus der Differenz $U_G^* = U^* - U_V^*$ nach elementarer Rechnung zu

$$U_G^* = \frac{1}{12G}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)] \geq 0 . \quad (2.85)$$

Die spezifische Gestaltänderungsenergie U_G^* ist Bestandteil einer klassischen Festigkeitshypothese zur Beurteilung der Bauteilbeanspruchung unter allgemeinen Spannungszuständen (s. Kapitel 6).

Die spezifische Verzerrungsenergie U^* dient als Grundlage sowohl numerischer Berechnungsverfahren als auch der effizienten Bestimmung diskreter Verformungsgrößen (s. Kapitel 7, in dem der Zusammenhang zwischen der Wegunabhängigkeit von U^* und der Symmetrie der Steifigkeitskoeffizienten nochmals angesprochen wird). Darüber hinaus findet sie bei allgemeinen theoretischen Überlegungen Verwendung. Hierzu betrachten wir abschließend den Zusammenhang (1.17) zwischen den Konstanten des isotropen linear-elastischen Materials.

Gemäß Bild 2.5 kann ein- und derselbe Spannungszustand im Bezugssystem x, y oder im Hauptachsensystem 1, 2 beschrieben werden. Beide Beschreibungen müssen zu der gleichen spezifischen Verzerrungsenergiedichte führen. Diese beträgt nach (2.82) für die reine Schubbeanspruchung

$$U^* = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2)$$

bzw. mit (2.59) sowie (2.52) und (2.53) in Hauptachsenkoordinaten

$$\frac{\tau^2}{2G} = \frac{1}{2E}[\sigma_1(\sigma_1 - \nu\sigma_2) + \sigma_2(\sigma_2 - \nu\sigma_1)] = \frac{\tau^2}{2E}[1 + \nu - (-1 - \nu)] = \frac{1 + \nu}{E}\tau^2 ,$$

so dass $E = 2G(1 + \nu)$ aus (1.17) bestätigt wird.



<http://www.springer.com/978-3-642-40980-6>

Einführung in die Technische Mechanik

Festigkeitslehre

Balke, H.

2014, XI, 321 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-40980-6