

Technische Mechanik

J. Wittenburg
H.A. Richard
J. Zierep
K. Bühler

MECHANIK FESTER KÖRPER

J. Wittenburg, H.A. Richard

1 Kinematik

Gegenstand der Kinematik ist die Beschreibung der Lagen und Bewegungen von Punkten und Körpern mit Mitteln der analytischen Geometrie. Dabei spielen weder physikalische Körpereigenschaften noch Kräfte als Ursachen von Bewegungen eine Rolle. Infolgedessen tauchen die Begriffe Schwerpunkt, Trägheitshauptachsen, Inertialsystem und absolute Bewegung nicht auf. Betrachtet werden Lagen und Bewegungen relativ zu einem beliebig bewegten kartesischen Achsensystem mit dem Ursprung 0 und mit Achseneinheitsvektoren $\underline{e}_1^0, \underline{e}_2^0, \underline{e}_3^0$ (genannt Basis $\underline{e}^0$ oder Körper Null)

1.1 Kinematik des Punktes

1.1.1 Lage. Lagekoordinaten

Die Lage eines Punktes P in der Basis $\underline{e}^0$ wird durch den Orts- oder Radiusvektor $\underline{r}$ oder durch drei skalare Lagekoordinaten gekennzeichnet. Die am häufigsten verwendeten Lagekoordinaten sind nach Bild 1-1a kartesische Koordinaten x, y, z , Zylinderkoordinaten ϱ, φ, z mit $\varrho \geq 0$ und Kugelkoordinaten r, ϑ, φ mit $r = |\underline{r}|$. Bei Lagen in der $(\underline{e}_1^0, \underline{e}_2^0)$ -Ebene sind die Zylinderkoordinaten $z = 0$ und $\varrho = r$. Dann heißen r und φ Polarkoordinaten (Bild 1-1b). Bei Bewegungen des Punktes P längs einer Bahnkurve sind der Ortsvektor $\underline{r}$ und seine Lagekoordinaten Funktionen der Zeit. Nach Bild 1-1c wird die Lage von P auch durch die Form der Bahnkurve und durch die Bogenlänge s längs der Kurve von einem beliebig gewählten Punkt $s = 0$ aus gekennzeichnet. Allen

Lagekoordinaten sind nach Bild 1-1a–c Tripel von zueinander orthogonalen Einheitsvektoren zugeordnet, und zwar $\underline{e}_1^0, \underline{e}_2^0, \underline{e}_3^0$ den kartesischen Koordinaten, $\underline{e}_\varrho, \underline{e}_\varphi, \underline{e}_z$ den Zylinderkoordinaten, $\underline{e}_r, \underline{e}_\vartheta, \underline{e}_\varphi$ den Kugelkoordinaten und $\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_b$ (Tangenten-, Hauptnormalen- und Binormalenvektor der Bahnkurve) in Bild 1-1c. In der Ebene von $\underline{e}_t$ und $\underline{e}_n$ liegt der Krümmungskreis mit dem Krümmungsradius ϱ (nicht zu verwechseln mit der Zylinderkoordinate ϱ). Zur Bestimmung von $\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_b$ und ϱ in jedem Punkt einer gegebenen Kurve siehe A 13.2 sowie [1]. Bei ebenen Kurven mit der Darstellung $y = f(x)$ ist

$$\frac{1}{\varrho(x)} = \frac{d^2 f}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2}.$$

Umrechnung zwischen kartesischen und Zylinderkoordinaten (bzw. Polarkoordinaten im Fall $z \equiv 0, r \equiv \varrho$):

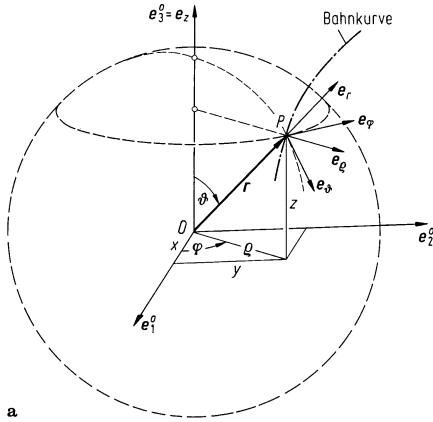
$$\left. \begin{aligned} \varrho &= (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \tan \varphi = y/x, \\ x &= \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z \equiv z. \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

Umrechnung zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten:

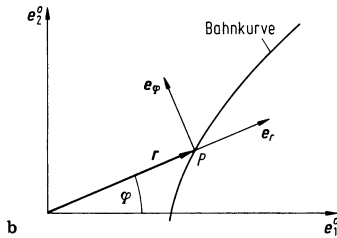
$$\left. \begin{aligned} r &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \tan \vartheta = (x^2 + y^2)^{1/2}/z, \\ \tan \varphi &= y/x, \quad x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

Umrechnung zwischen Zylinder- und Kugelkoordinaten:

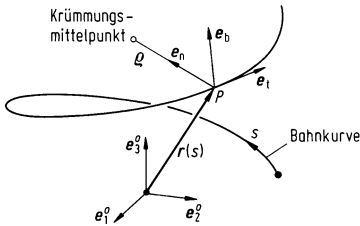
$$\left. \begin{aligned} r &= (\varrho^2 + z^2)^{1/2}, \quad \tan \vartheta = \varrho/z, \quad \varphi \equiv \varphi, \\ \varrho &= r \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$



a



b



c

Bild 1-1. Ortsvektor $\mathbf{r}$ und Lagekoordinaten eines Punktes P . **a** Kartesische Koordinaten x, y, z , Zylinderkoordinaten ϱ, φ, z und Kugelkoordinaten r, ϑ, φ mit zugeordneten Tripeln von Einheitsvektoren. **b** Polarkoordinaten r, φ für ebene Bewegungen. **c** Bogenlänge s und Krümmungsradius ϱ einer Bahnkurve

1.1.2 Geschwindigkeit. Beschleunigung

Die *Geschwindigkeit* $\mathbf{v}(t)$ und die *Beschleunigung* $\mathbf{a}(t)$ des Punktes P relativ zu $\mathbf{e}^0$ sind die erste bzw. die zweite zeitliche Ableitung von $\mathbf{r}(t)$ in dieser Basis:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (1-4)$$

Bei Vektoren kann durch die Schreibweise d/dt darauf hingewiesen werden, dass in einer bestimmten Basis $\mathbf{e}^i$ nach t differenziert wird. Für einen Vektor $\mathbf{c}$ mit beliebiger physikalischer Dimension ist der Zusammenhang zwischen den Ableitungen in zwei Basen $\mathbf{e}^0$ und $\mathbf{e}^1$

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{d\mathbf{c}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}, \quad (1-5)$$

$\boldsymbol{\omega}$ Winkelgeschwindigkeit von $\mathbf{e}^1$ relativ zu $\mathbf{e}^0$.

Komponentendarstellungen für $\mathbf{v}(t)$ und $\mathbf{a}(t)$

Ein Punkt über einer skalaren Größe bedeutet Ableitung nach der Zeit.

Kartesische Koordinaten:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \dot{x}\mathbf{e}_1^0 + \dot{y}\mathbf{e}_2^0 + \dot{z}\mathbf{e}_3^0, \\ \mathbf{a}(t) &= \ddot{x}\mathbf{e}_1^0 + \ddot{y}\mathbf{e}_2^0 + \ddot{z}\mathbf{e}_3^0. \end{aligned} \quad (1-6)$$

Zylinderkoordinaten (bzw. Polarkoordinaten im Fall $z \equiv 0, \varrho \equiv r$):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \dot{\varrho}\mathbf{e}_\varrho + \varrho\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \dot{z}\mathbf{e}_z, \\ \mathbf{a}(t) &= (\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_\varrho + (\varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi + \ddot{z}\mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (1-7)$$

Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + r\dot{\varphi}\sin\vartheta\mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{a}(t) &= [\ddot{r} - r(\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2)]\mathbf{e}_r \\ &\quad + [r(\ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta) + 2\dot{r}\dot{\vartheta}]\mathbf{e}_\vartheta \\ &\quad + [\dot{r}(\dot{\varphi}\sin\vartheta + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta) + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\vartheta]\mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (1-8)$$

Bogenlänge ϱ Krümmungsradius):

$$\mathbf{v}(t) = \dot{s}\mathbf{e}_t, \quad \mathbf{a}(t) = \ddot{s}\mathbf{e}_t + (\dot{s}^2/\varrho)\mathbf{e}_n. \quad (1-9)$$

Aus (1-9) erkennt man, dass $\mathbf{v}$ stets tangential gerichtet ist, während $\mathbf{a}$ bei gekrümmten Bahnen eine Komponente normal zur Bahn, und zwar zur Innenseite der Kurve hin hat.

Zur Kinematik des Punktes mit Relativbewegung siehe 1.3.

1.2 Kinematik des starren Körpers

Sei $\mathbf{e}^1$ eine auf dem Körper feste Basis mit dem Ursprung A in einem beliebig gewählten Punkt des Körpers und mit Achseneinheitsvektoren $\mathbf{e}_1^1, \mathbf{e}_2^1, \mathbf{e}_3^1$ (Bild 1-2). Zur vollständigen Beschreibung von Lage

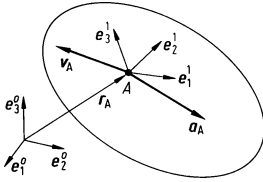


Bild 1-2. Starrer Körper mit körperfester Basis $\underline{e}^1$ und körperfestem Punkt A

und Bewegung des Körpers relativ zu $\underline{e}^0$ gehören drei translatorische und drei rotatorische Größen. Die translatorischen sind Lage $\underline{r}_A(t)$, Geschwindigkeit $\underline{v}_A(t)$ und Beschleunigung $\underline{a}_A(t)$ des Punktes A. Die rotatorischen sind Winkellage, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung des Körpers.

1.2.1 Winkellage. Koordinatentransformation

Die Winkellage der Basis $\underline{e}^1$ in der Basis $\underline{e}^0$ wird durch die (3×3) -Matrix $\underline{A}$ der *Richtungscosinus*

$$A_{ij} = \cos \angle(\underline{e}_i^1, \underline{e}_j^0) = \underline{e}_i^1 \cdot \underline{e}_j^0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1-10)$$

beschrieben. Es gilt

$$\begin{bmatrix} \underline{e}_1^1 \\ \underline{e}_2^1 \\ \underline{e}_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}_1^0 \\ \underline{e}_2^0 \\ \underline{e}_3^0 \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

oder abgekürzt $\underline{e}^1 = \underline{A} \underline{e}^0$.

Eigenschaften von $\underline{A}$: In Zeile i stehen die Koordinaten des Vektors $\underline{e}_i^1$ in der Basis $\underline{e}^0$ und in Spalte j die Koordinaten des Vektors $\underline{e}_j^0$ in der Basis $\underline{e}^1$.

$$\sum_{k=1}^3 A_{ik} A_{jk} = \delta_{ij}, \quad \sum_{k=1}^3 A_{ki} A_{kj} = \delta_{ij}$$

(δ_{ij} Kronecker-Symbol). Das sind für die neun Elemente von $\underline{A}$ insgesamt zwölf Bindungsgleichungen, von denen sechs unabhängig sind. $\det \underline{A} = \underline{e}_1^1 \cdot \underline{e}_2^1 \times \underline{e}_3^1 = 1$, $\underline{A}^{-1} = \underline{A}^T$, $\underline{A}$ hat den Eigenwert +1. Wenn $\underline{v}^0 = [v_1^0 \ v_2^0 \ v_3^0]^T$ und $\underline{v}^1 = [v_1^1 \ v_2^1 \ v_3^1]^T$ die Spaltenmatrizen der Koordinaten eines beliebigen Vektors $\underline{v}$ in $\underline{e}^0$ bzw. in $\underline{e}^1$ bezeichnen, dann gilt

$$\underline{v}^1 = \underline{A} \underline{v}^0, \quad \underline{v}^0 = \underline{A}^T \underline{v}^1. \quad (1-12)$$

Deshalb heißt $\underline{A}$ auch *Transformationsmatrix*. Ein Körper hat zwischen 0 und 3 Freiheitsgraden der Rotation relativ zu $\underline{e}^0$. Von entsprechend vielen generalisierten Koordinaten der Winkellage ist $\underline{A}$ abhängig. Drehungen um eine feste Achse und ebene Bewegungen ohne feste Achse haben einen Freiheitsgrad der Rotation. Wenn dabei z. B. $\underline{e}_3^1$ und $\underline{e}_3^0$ ständig parallel sind, ist mit dem Winkel φ in Bild 1-3

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1-13)$$

Für allgemeinere Fälle werden häufig *Eulerwinkel* ψ, ϑ, φ , *Kardanwinkel* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ und *Eulerparameter* q_0, q_1, q_2, q_3 verwendet.

Eulerwinkel (Bild 1-4a). Die zunächst mit $\underline{e}^0$ achsenparallele Basis $\underline{e}^1$ erreicht ihre gezeichnete Winkellage durch drei aufeinander folgende Drehungen über die Zwischenlagen $\underline{e}^*$ und $\underline{e}^{**}$. Die Drehungen um die Winkel ψ, ϑ und φ werden in dieser Reihenfolge um die Achsen $\underline{e}_3^0, \underline{e}_1^*$ und $\underline{e}_3^{**}$ ausgeführt. Mit den Abkürzungen $s_\psi = \sin \psi, c_\psi = \cos \psi$ usw. ist

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} c_\psi c_\varphi - s_\psi c_\vartheta s_\varphi & s_\psi c_\varphi + c_\psi c_\vartheta s_\varphi & s_\vartheta s_\varphi \\ -c_\psi s_\varphi - s_\psi c_\vartheta c_\varphi & -s_\psi s_\varphi + c_\psi c_\vartheta c_\varphi & s_\vartheta c_\varphi \\ s_\psi s_\vartheta & -c_\psi s_\vartheta & c_\vartheta \end{bmatrix}. \quad (1-14)$$

Statt der Drehachsenfolge 3, 1, 3 sind auch die Folgen 1, 2, 1 und 2, 3, 2 möglich.

Kardanwinkel (Bild 1-4b). Die zunächst mit $\underline{e}^0$ achsenparallele Basis $\underline{e}^1$ erreicht ihre gezeichnete Winkellage durch drei aufeinander folgende Drehungen über die Zwischenlagen $\underline{e}^*$ und $\underline{e}^{**}$. Die Drehungen um die Winkel φ_1, φ_2 und φ_3 werden in dieser

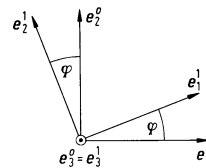


Bild 1-3. Zwei Basen $\underline{e}^0$ und $\underline{e}^1$ mit der Transformation (1-13)

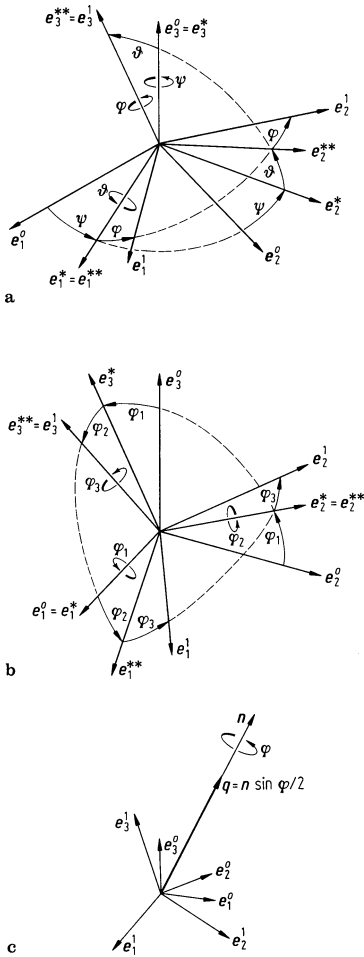


Bild 1-4. Zur Definition von Eulerwinkeln (Bild a), Kardanwinkeln (Bild b) und Eulerparametern (Bild c)

Reihenfolge um die Achsen e_1^0 , e_2^* und e_3^{**} ausgeführt. Mit den Abkürzungen $s_i = \sin \varphi_i$, $c_i = \cos \varphi_i$ ist

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} c_2 c_3 & c_1 s_3 + s_1 s_2 c_3 & s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 \\ -c_2 s_3 & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & s_1 c_3 + c_1 s_2 s_3 \\ s_2 & -s_1 c_2 & c_1 c_2 \end{bmatrix}. \quad (1-15)$$

Statt der Drehachsenfolge 1, 2, 3 sind auch die Folgen 2, 3, 1 und 3, 1, 2 möglich. Wenn alle drei Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ll 1$ sind, ist in linearer Näherung

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_3 & -\varphi_2 \\ -\varphi_3 & 1 & \varphi_1 \\ \varphi_2 & -\varphi_1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1-16)$$

Eulerparameter (Bild 1-4c)

Die zunächst mit e^0 achsenparallele Basis e^1 erreicht ihre gezeichnete Winkellage durch eine Drehung um eine in e^0 und in e^1 feste Achse mit dem Einheitsvektor n . Der Drehwinkel ist φ im Rechtsschraubensinn um n . Man definiert

$$q_0 = \cos(\varphi/2), \quad q = n \sin(\varphi/2) \quad (1-17)$$

$$\text{bzw. } q_i = n_i \sin(\varphi/2) \quad (i = 1, 2, 3).$$

q hat in e^0 und in e^1 dieselben Koordinaten. $q_0, \dots, q_3$ sind die *Eulerparameter*. Sie sind durch die Bindungsgleichung

$$q_0^2 + q^2 = \sum_{i=0}^3 q_i^2 = 1 \quad (1-18)$$

gekoppelt. Mit den Eulerparametern ist

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{bmatrix}. \quad (1-19)$$

q ist der Eigenvektor von $\underline{A}$ zum Eigenwert +1. Umrechnung von Richtungscosinus in Eulerwinkel:

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta &= A_{33}, & \sin \vartheta &= (1 - \cos^2 \vartheta)^{1/2} \\ \cos \psi &= -A_{32} / \sin \vartheta, & \sin \psi &= A_{31} / \sin \vartheta, \\ \cos \varphi &= A_{23} / \sin \vartheta, & \sin \varphi &= A_{13} / \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

Umrechnung von Richtungscosinus in Kardanwinkeln:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi_2 &= A_{31}, & \cos \varphi_2 &= (1 - \sin^2 \varphi_2)^{1/2}, \\ \sin \varphi_1 &= -A_{32} / \cos \varphi_2, & \cos \varphi_1 &= A_{33} / \cos \varphi_2, \\ \sin \varphi_3 &= -A_{21} / \cos \varphi_2, & \cos \varphi_3 &= A_{11} / \cos \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

Umrechnung von Richtungscosinus in Eulerparameter:

$$q_0 = (1 + \text{sp}A)^{1/2}/2, \quad q_i = (A_{jk} - A_{kj})/(4q_0) \\ (i, j, k = 1, 2, 3 \text{ zyklisch}). \quad (1-22)$$

Umrechnung von Eulerwinkeln in Eulerparameter:

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \cos(\vartheta/2) \cos[(\psi + \varphi)/2], \\ q_1 &= \sin(\vartheta/2) \cos[(\psi - \varphi)/2], \\ q_2 &= \sin(\vartheta/2) \sin[(\psi - \varphi)/2], \\ q_3 &= \cos(\vartheta/2) \sin[(\psi + \varphi)/2]. \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$

Euler- und Kardanwinkel enthalten als Sonderfälle die Drehung um eine Achse mit konstanter Richtung (zwei Winkel identisch null) und Drehungen, wie beim Kreuzgelenk, um zwei orthogonale Achsen (ein Winkel identisch null). Eulerwinkel eignen sich besonders für Präzessionsbewegungen, das sind Bewegungen mit $\vartheta = \text{const.}$ Sie eignen sich nicht, wenn der kritische Fall $\sin \vartheta = 0$ eintreten kann. Abhilfe: Man arbeitet alternierend mit zwei Tripeln von Eulerwinkeln mit verschiedenen Drehachsenfolgen. Für Kardanwinkel ist $\cos \varphi_2 = 0$ der entsprechende kritische Fall. Kardanwinkel eignen sich gut für lineare Näherungen, wenn alle Winkel klein sind. Eulerparameter eignen sich besonders bei drei Freiheitsgraden der Rotation und bei Drehungen um eine feste Achse, die nicht die Richtung eines Basisvektors hat (n_1, n_2, n_3 konstant).

Schraubung. In Bild 1-5a ist die Lage der Basis $\underline{e}^1$ das Ergebnis einer Drehung ($q_0, \underline{q}$) und einer Translation $\underline{r}_0$ aus einer Anfangslage heraus, in der $\underline{e}^1$ mit $\underline{e}^0$ zusammenfiel. Den Übergang aus derselben Anfangslage in dieselbe Endlage bewirkt nach Bild 1-5b auch eine mit einem Drehschubgelenk erzeugbare *Schraubung* um eine zu $\underline{q}$ parallele Schraubachse mit demselben Drehwinkel φ und mit der Translation $s = \underline{q} \cdot \underline{r}_0 / \sin(\varphi/2)$ in Richtung von $\underline{q}$. Die Schraubachse hat in $\underline{e}^0$ die Parameterdarstellung

$$\underline{r}(\lambda) = \lambda \underline{q} + \frac{q_0 \underline{q} \times \underline{r}_0 - \underline{q} \times (\underline{q} \times \underline{r}_0)}{2 \sin^2(\varphi/2)}. \quad (1-24)$$

Resultierende Drehung. Zu zwei nacheinander ausgeführten Drehungen um feste Achsen durch einen

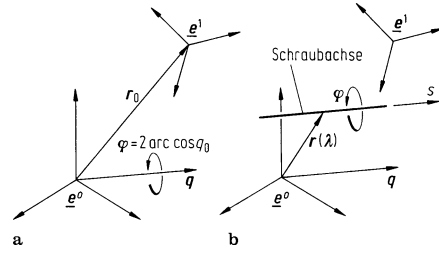


Bild 1-5. Die Überlagerung der Drehung ($q_0, \underline{q}$) und der Translation $\underline{r}_0$ in Bild **a** kann durch die Schraubung in Bild **b** mit der Schraubachse $\underline{r}(\lambda)$, (1-24), ersetzt werden

gemeinsamen Punkt gibt es eine *resultierende Drehung*, die den Körper aus derselben Ausgangslage in dieselbe Endlage bringt. Wenn Winkel und Drehachsen für beide Drehungen in $\underline{e}^0$ gegeben sind, die erste Drehung mit

$$(q_{01}, \underline{q}_1) = (\cos(\varphi_1/2), \underline{n}_1 \sin(\varphi_1/2))$$

und die zweite mit

$$(q_{02}, \underline{q}_2) = (\cos(\varphi_2/2), \underline{n}_2 \sin(\varphi_2/2)),$$

dann gilt für die resultierende Drehung

$$\left. \begin{aligned} q_{0\text{res}} &= q_{02}q_{01} - \underline{q}_2 \cdot \underline{q}_1, \\ \underline{q}_{\text{res}} &= q_{02}\underline{q}_1 + q_{01}\underline{q}_2 + \underline{q}_2 \times \underline{q}_1 \end{aligned} \right\} \quad (1-25a)$$

oder ausführlich

$$\left. \begin{aligned} \cos(\varphi_{\text{res}}/2) &= \cos(\varphi_2/2) \cos(\varphi_1/2) \\ &\quad - \underline{n}_2 \cdot \underline{n}_1 \sin(\varphi_2/2) \sin(\varphi_1/2), \\ \underline{n}_{\text{res}} \sin(\varphi_{\text{res}}/2) &= \underline{n}_1 \cos(\varphi_2/2) \sin(\varphi_1/2) \\ &\quad + \underline{n}_2 \cos(\varphi_1/2) \sin(\varphi_2/2) \\ &\quad + \underline{n}_2 \times \underline{n}_1 \sin(\varphi_2/2) \sin(\varphi_1/2). \end{aligned} \right\} \quad (1-25b)$$

Die Schraubachse der resultierenden Drehung ist von der Reihenfolge der beiden Drehungen abhängig, der Drehwinkel nicht. Nur im Grenzfall infinitesimal kleiner Winkel gilt für Winkelvektoren $\underline{\varphi}_1 = \varphi_1 \underline{n}_1$ und $\underline{\varphi}_2 = \varphi_2 \underline{n}_2$ entlang den Drehachsen das Parallelagrammgesetz $\underline{\varphi}_{\text{res}} = \varphi_{\text{res}} \underline{n}_{\text{res}} = \underline{\varphi}_1 + \underline{\varphi}_2$.

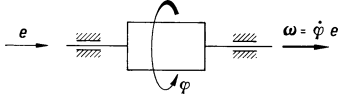


Bild 1-6. Für eine Winkelgeschwindigkeit mit konstanter Richtung gilt $\omega = \dot{\varphi}$ und Drehzahl $n = \omega/(2\pi)$

1.2.2 Winkelgeschwindigkeit

Die *Winkelgeschwindigkeit* $\omega(t)$ des Körpers $\underline{e}^1$ relativ zu $\underline{e}^0$ ist ein Vektor, der an keinen Punkt gebunden ist, denn er kennzeichnet die zeitliche Änderung der Winkellage des Körpers. Bei einem einzigen Freiheitsgrad der Rotation mit einer Winkelkoordinate φ hat ω konstante Richtung und die Größe $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$ (Bild 1-6). Bei zwei und drei Freiheitsgraden ist ω nicht Ableitung einer anderen Größe. Seien $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Koordinaten von ω bei Zerlegung in der körperfesten Basis $\underline{e}^1$. Zwischen ihnen und generalisierten Koordinaten der Winkellage bestehen die folgenden Beziehungen. Für Richtungscosinus in beliebiger Darstellung:

$$\underline{\tilde{\omega}} = \underline{\dot{A}} \underline{A}^T, \quad \underline{\dot{A}} = -\underline{\tilde{\omega}} \underline{A} \quad (1-26)$$

mit der Matrix $\underline{\tilde{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$.

Für Eulerwinkel:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_\vartheta s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ s_\vartheta c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ c_\vartheta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}, \quad (1-27a)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_\varphi/s_\vartheta & c_\varphi/s_\vartheta & 0 \\ c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ -s_\varphi c_\vartheta/s_\vartheta & -c_\varphi c_\vartheta/s_\vartheta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}. \quad (1-27b)$$

Für Kardanwinkel:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 c_3 & s_3 & 0 \\ -c_2 s_3 & c_3 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix}, \quad (1-28a)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3/c_2 & -s_3/c_2 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ -c_3 s_2/c_2 & s_3 s_2/c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}. \quad (1-28b)$$

Im Fall sehr kleiner Winkel gilt die Näherung $\dot{\varphi}_i \approx \omega_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Für Eulerparameter:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}, \quad (1-29a)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}. \quad (1-29b)$$

Die jeweils zweite der Glen. (1-26) bis (1-29) stellt *kinematische Differenzialgleichungen* zur Berechnung der Winkellage aus vorher berechneten Funktionen $\omega_i(t)$ dar. Wenn die numerische Integration bei Eulerparametern Größen $q_i(t)$ liefert, die die Bindungsgleichung (1-18) nicht streng erfüllen, dann ersetze man die $q_i(t)$ durch die renormierten Größen

$$q_i^*(t) = q_i(t) \left[\sum_{j=0}^3 q_j^2(t) \right]^{-1/2} \quad (i = 0, \dots, 3).$$

Geschwindigkeitsverteilung im starren Körper.

ω und die Geschwindigkeit v_A eines körperfesten Punktes A bestimmen die Geschwindigkeit v_P jedes anderen körperfesten Punktes P am Radiusvektor $\overrightarrow{AP} = \underline{\varrho}$:

$$\underline{v}_P = \underline{v}_A + \omega \times \underline{\varrho}. \quad (1-30)$$

Ebene Bewegung. Polbahnen. Geschwindigkeitsplan. Bei der ebenen Bewegung eines Körpers hat $\omega(t)$ konstante Richtung, und alle Körperpunkte bewegen sich in parallelen Ebenen. Nur eine Bewegungsebene wird betrachtet. In ihr hat der Körper in jedem Zeitpunkt dieselbe Geschwindigkeitsverteilung, wie bei einer Drehung um einen festen Punkt, $\underline{v} = \omega \times \underline{r}$ (Bild 1-7). Dieser Punkt heißt *Momentanpol der Geschwindigkeit*, Geschwindigkeitspol, Drehpol oder Pol. Er liegt im Schnittpunkt aller Geschwindigkeitslote. Zwei Lote genügen zur Bestimmung. Im Sonderfall der reinen Translation liegt der Pol im Unendlichen und im Sonderfall der Drehung um eine feste Achse permanent auf der Achse.

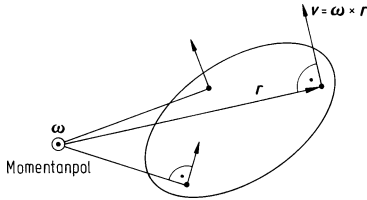


Bild 1-7. Die Richtungen der Geschwindigkeiten zweier Punkte bestimmen den Momentanpol

Im Allgemeinen liegt er zu verschiedenen Zeiten an verschiedenen Orten. Seine Bahn in $\underline{e}^0$ heißt *Rastpolbahn* und seine Bahn in $\underline{e}^1$ *Gangpolbahn*. Die Bewegung des Körpers kann man durch Abrollen der Gangpolbahn auf der Rastpolbahn erzeugen.

Beispiel 1-1: In Bild 1-8a bewegt sich ein Stab der Länge l mit seinen Enden auf Führungsgeraden. Der Pol P hat von M und von der Stabmitte die konstanten Entfernungen l bzw. $l/2$. Also sind die Polbahnen die gezeichneten Kreise. Die Bewegung wird konstruktiv eleganter erzeugt, indem man den kleinen Kreis mit dem auf ihm festen Stab als Planetenrad im großen Kreis abrollt. Da sich jeder Punkt am Umfang des kleinen Rades auf einer Geraden durch M bewegt, können zwei Räder mit dem Radienverhältnis 2:1 auch die Bewegung einer Stange auf zwei Führungen unter einem beliebigen Winkel α erzeugen (Bild 1-8b). Der Radius des kleinen Rades ist $l/(2 \sin \alpha)$.

Wenn sich mehrere Körper relativ zu $\underline{e}^0$ in derselben Ebene bewegen, dann hat jeder Körper i relativ zu jedem anderen Körper j einen Pol P_{ij} (gleich P_{ji}) der Relativbewegung und eine relative Winkelgeschwindigkeit ω_{ij} . Es gilt der Satz von

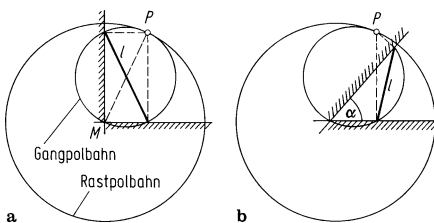


Bild 1-8. Polbahnen eines auf zwei Geraden geführten Stabes

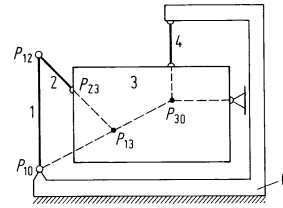


Bild 1-9. Zur Konstruktion des Pols P_{13}

Kennedy und Aronhold: Die Pole P_{ij} , P_{jk} und P_{ki} dreier Körper i , j und k liegen auf einer Geraden. Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten der Körper i und j relativ zu Körper k ist (plus bei gleicher Richtung der Vektoren, minus andernfalls)

$$\frac{\omega_{ik}}{\omega_{jk}} = \pm \frac{|P_{jk}P_{ij}|}{|P_{ik}P_{ij}|}$$

Beispiel 1-2: Im Mechanismus von Bild 1-9 sind die Pole P_{10} , P_{12} , P_{23} und P_{30} ohne den Satz von Kennedy und Aronhold konstruierbar. Nach dem Satz liegt P_{13} im Schnittpunkt von $\overline{P_{10}P_{30}}$ und $\overline{P_{12}P_{23}}$.

Bei ebenen Getrieben genügt die Kenntnis der Pole zur Angabe aller Geschwindigkeitsverhältnisse.

Beispiel 1-3; Gliedergetriebe: In Bild 1-10 sei v_{rel} die Geschwindigkeit des Kolbens 2 relativ zum Zylinder 1. Sie ist zugleich die Geschwindigkeit relativ

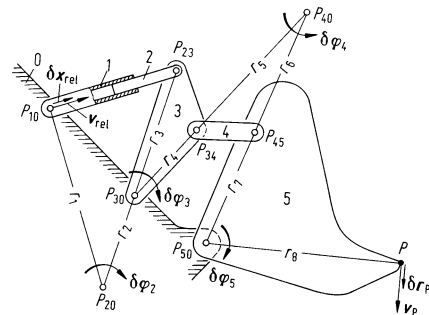


Bild 1-10. Polplan für einen Baggerschaufelmechanismus. Jeder Gelenkpunkt ist auf zwei Körpern fest und bewegt sich momentan auf Kreisen um die Pole beider Körper. Daraus ergibt sich $v_P : v_{rel} = (r_2 r_4 r_6 r_8) / (r_1 r_3 r_5 r_7)$ mit $r_2 = P_{20}P_{23}$ und $r_3 = P_{30}P_{23}$. Zu den virtuellen Verschiebungen siehe 1.5

zu Körper 0 desjenigen Punktes von 2, der mit P_{10} zusammenfällt. Damit ergibt sich P_{20} . Mit den gezeichneten Polen und mit den Radien $r_1, \dots, r_8$ erhält man für die Größe der Geschwindigkeit v den angegebenen Ausdruck.

Beispiel 1-4; Planetengetriebe (in Bild 1-11 links): Nach rechts herausgezogene Parallelen geben die Lage von Polen P_{ij} an. Im x, v -Diagramm in Bildmitte gibt die Gerade i ($i = 0, \dots, 4$) an, wie im Körper i die Geschwindigkeit v relativ zu Körper 0 vom Ort x abhängt. Je zwei Geraden i und j schneiden sich auf der Höhe von P_{ij} ($i, j = 0, \dots, 4$). Die Steigung der Geraden i ist proportional zur Winkelgeschwindigkeit ω_{i0} von Körper i relativ zu Körper 0. Für eine einzige Gerade wird die Steigung willkürlich vorgegeben (z.B. für Gerade 1 mit $v = 0$ in der Höhe von P_{10}). Alle anderen Geraden sind danach festgelegt. Im *Winkelgeschwindigkeitsplan* rechts im Bild sind Parallelen zu allen Geraden von einem Punkt aus angetragen. Die Abschnitte auf der Geraden senkrecht zur Geraden 0 sind proportional zu den Steigungen, d.h. zu den Winkelgeschwindigkeiten ω_{i0} . Als Differenzen sind auch alle relativen Winkelgeschwindigkeiten $\omega_{ij} = \omega_{i0} - \omega_{j0}$ ablesbar.

Mehr über Geschwindigkeitspläne ebener Getriebe in [2].

Räumliche Drehung um einen festen Punkt. Winkelgeschwindigkeitsplan. Der nach Größe und Richtung veränderliche Vektor $\omega(t)$ des Körpers 1 erzeugt, wenn man ihn vom festen Punkt 0 aus anträgt, so-

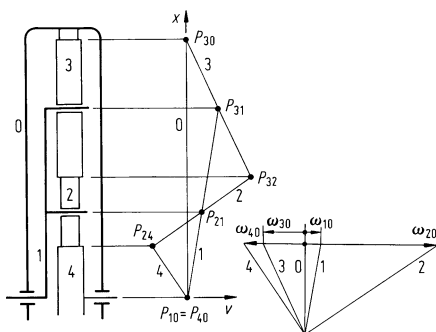


Bild 1-11. Bauplan eines Planetenradgetriebes (links) mit Geschwindigkeitsplan (Mitte) und Winkelgeschwindigkeitsplan (rechts) für stehendes Gehäuse 0

wohl in $\underline{e}^0$ als auch in $\underline{e}^1$ eine allgemeine Kegelfläche (Bild 1-12a). Die Kegel heißen Rastpolkegel bzw. Gangpolkegel. Die Bewegung des Körpers kann man dadurch erzeugen, dass man den Gangpolkegel auf dem Rastpolkegel abrollt.

Beispiel 1-5: Das Kegelrad 2 in Bild 1-12b ist sein eigener Gangpolkegel für die Drehung relativ zu Rad 1, und Rad 1 ist der Rastpolkegel.

In Kegelradgetrieben mit mehreren Körpern $i = 0, \dots, n$ bewegt sich jeder Körper relativ zu jedem anderen um einen allen gemeinsamen Punkt 0 (Bild 1-13). Sei ω_{ij} die Winkelgeschwindigkeit von Körper i relativ zu Körper j ($i, j = 0, \dots, n$), sodass gilt

$$\omega_{ji} = -\omega_{ij}, \quad \omega_{ik} - \omega_{jk} = \omega_{ij} \quad (1-31) \\ (i, j, k = 0, \dots, n).$$

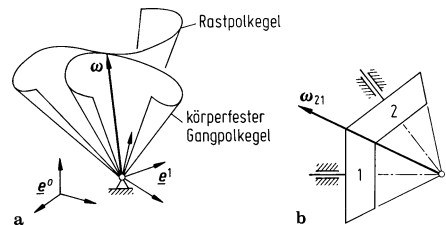


Bild 1-12. a Rastpolkegel und Gangpolkegel einer allgemeinen Starrkörperbewegung um einen festen Punkt. b Für die Bewegung des Kegelrades 2 relativ zu Rad 1 sind Rast- und Gangpolkegel mit den Wälzkugeln 1 bzw. 2 identisch

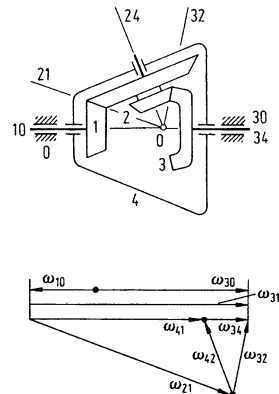


Bild 1-13. Bauplan und Winkelgeschwindigkeitsplan eines Differenzialgetriebes. ω_{10} und ω_{30} sind frei wählbar

Bei einem vorgegebenen Getriebe mit f Freiheitsgraden können die Größen von f relativen Winkelgeschwindigkeiten vorgegeben werden. Dann sind die Größen aller anderen und alle Winkelgeschwindigkeitsrichtungen durch die Richtungen der Radachsen und der Kegelberührungslinien sowie durch (1-31) festgelegt.

Beispiel 1-6: Das Differenzialgetriebe in Bild 1-13 hat Körper 0, ..., 4 und $f = 2$ Freiheitsgrade. Im Bauplan oben geben Geraden mit Indizes ij die Richtungen von relativen Winkelgeschwindigkeiten ω_{ij} an. Darunter der Winkelgeschwindigkeitsplan.

1.2.3 Winkelbeschleunigung

Die *Winkelbeschleunigung* des Körpers $\underline{e}^1$ relativ zu $\underline{e}^0$ ist die zeitliche Ableitung von ω in der Basis $\underline{e}^0$. Sie ist wegen (1-5) auch gleich der Ableitung in $\underline{e}^1$. Wenn es keine Verwechslung geben kann, schreibt man $\dot{\omega}$. Aus (1-27) und (1-28) ergeben sich die Darstellungen für Eulerwinkel

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_\vartheta s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ s_\vartheta c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ c_\vartheta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_\vartheta s_\varphi \dot{\psi} \dot{\theta} - s_\varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} + s_\vartheta c_\varphi \dot{\varphi} \dot{\psi} \\ c_\vartheta c_\varphi \dot{\psi} \dot{\theta} - c_\varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} - s_\vartheta s_\varphi \dot{\varphi} \dot{\psi} \\ -s_\vartheta \dot{\psi} \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (1-32)$$

und für Kardanwinkel

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 c_3 & s_3 & 0 \\ -c_2 s_3 & c_3 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s_2 c_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + c_3 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 - c_2 s_3 \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_1 \\ s_2 s_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - s_3 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 - c_2 c_3 \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_1 \\ c_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix}. \quad (1-33)$$

Beschleunigungsverteilung im starren Körper.

$\omega, \dot{\omega}$ und die Beschleunigung $\mathbf{a}_A$ des Punktes A bestimmen zusammen die Beschleunigung $\mathbf{a}_P$ jedes anderen körperfesten Punktes P am Radiusvektor $\overrightarrow{AP} = \underline{\varrho}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P &= \mathbf{a}_A + \dot{\omega} \times \underline{\varrho} + \omega \times (\omega \times \underline{\varrho}) \\ &= \mathbf{a}_A + \dot{\omega} \times \underline{\varrho} + (\omega \cdot \underline{\varrho})\omega - \omega^2 \underline{\varrho}. \end{aligned} \quad (1-34)$$

1.3 Kinematik des Punktes mit Relativbewegung

In Bild 1-14 bewegt sich Körper 1 mit der auf ihm festen Basis $\underline{e}^1$ relativ zu $\underline{e}^0$, und der Punkt P bewegt sich relativ zu $\underline{e}^1$. Der Bewegungszustand von Körper 1 relativ zu $\underline{e}^0$ wird nach 1.2 durch die sechs Größen $\mathbf{r}_A, \mathbf{v}_A, \mathbf{a}_A, \underline{A}, \omega$ und $\dot{\omega}$ beschrieben. Wenn diese Bewegung $f_1 \leq 6$ Freiheitsgrade hat, dann können die sechs Größen als Funktionen von f_1 generalisierten Koordinaten q_i ($i = 1, \dots, f_1$) und von deren Ableitungen dargestellt werden (siehe 1.1 und 1.2). Der Bewegungszustand von Punkt P relativ zu $\underline{e}^1$ wird durch den Ortsvektor $\underline{\varrho}$, die Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ und die Relativbeschleunigung $\mathbf{a}_{\text{rel}}$ beschrieben. Wenn diese Relativbewegung $f_2 \leq 3$ Freiheitsgrade hat, dann können die drei Größen als Funktionen von f_2 generalisierten Koordinaten q_i ($i = f_1 + 1, \dots, f_1 + f_2$) und von deren Ableitungen dargestellt werden. Der Ortsvektor $\mathbf{r}_P$, die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_P$ und die Beschleunigung $\mathbf{a}_P$ von P relativ zu $\underline{e}^0$ sind die Größen (siehe (1-30) und (1-34) sowie (1-5))

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_A + \underline{\varrho}, \quad \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \omega \times \underline{\varrho} + \mathbf{v}_{\text{rel}}, \quad (1-35a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P &= \mathbf{a}_A + \dot{\omega} \times \underline{\varrho} + \omega \times (\omega \times \underline{\varrho}) \\ &\quad + 2\omega \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}. \end{aligned} \quad (1-35b)$$

Darin sind $\mathbf{v}_A + \omega \times \underline{\varrho} = \mathbf{v}_{\text{KP}}$ und $\mathbf{a}_A + \dot{\omega} \times \underline{\varrho} + \omega \times (\omega \times \underline{\varrho}) = \mathbf{a}_{\text{KP}}$ die Geschwindigkeit bzw. die Beschleunigung des mit P zusammenfallenden körperfesten Punktes; $2\omega \times \mathbf{v}_{\text{rel}}$ heißt *Coriolisbeschleunigung*. Welche Größen in (1-35a) und (1-35b) gegeben und welche unbekannt sind, hängt von der Problemstellung ab. Durch Zerlegung aller Vektoren in einer gemeinsamen Basis (z. B. in $\underline{e}^1$) werden skalare Gleichungen gebildet.

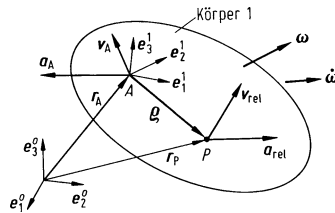


Bild 1-14. Darstellung aller Größen von (1-35)

1.4 Freiheitsgrade der Bewegung. Kinematische Bindungen

Die Anzahl f der *Freiheitsgrade* der Bewegung eines mechanischen Systems ist gleich der Anzahl unabhängiger generalisierter Lagekoordinaten $q_1, \dots, q_f$, die zur eindeutigen Beschreibung der Lage des Systems nötig sind. Verwendet man $n > f$ Lagekoordinaten $q_1, \dots, q_n$, dann wird die Abhängigkeit von $\nu = n - f$ überzähligen Koordinaten durch ν voneinander unabhängige, sog. *holonome Bindungsgleichungen*

$$f_i(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad (i = 1, \dots, \nu) \quad (1-36)$$

ausgedrückt. Die Bindungen und das mechanische System heißen *holonom-skleronom*, wenn die Zeit t nicht explizit erscheint, sonst – bei Vorgabe von Systemparametern als Funktionen der Zeit – *holonom-rheonom*. Totale Differenziation von (1-36) nach t liefert lineare Bindungsgleichungen für generalisierte Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ und Beschleunigungen $\ddot{q}_i$. Mit $J_{ij} = \partial f_i / \partial q_j$ lauten sie

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n J_{ij} \dot{q}_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} &= 0, \\ \sum_{j=1}^n J_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial J_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial J_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial q_j} \right] \dot{q}_j \\ &+ \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1, \dots, \nu). \end{aligned} \right\} \quad (1-37)$$

Für virtuelle Änderungen δq_j der Koordinaten gilt im skleronomen wie im rheonomen Fall

$$\sum_{j=1}^n J_{ij} \delta q_j = 0 \quad (i = 1, \dots, \nu). \quad (1-38)$$

Beispiel 1-7: Ein ebenes Punktpendel der vorgegebenen veränderlichen Länge $l(t)$ hat einen Freiheitsgrad. Die kartesischen Koordinaten x, y des Punktkörpers unterliegen der holonom-rheonomen Bindungsgleichung $x^2 + y^2 - l^2(t) = 0$. Daraus folgen für (1-37) und (1-38)

$$\begin{aligned} x\dot{x} + y\dot{y} - \dot{l} &= 0, \\ x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \ddot{l} - \dot{l}^2 &= 0, \\ x\delta x + y\delta y &= 0. \end{aligned}$$

Ein mechanisches System heißt *nichtholonom*, wenn seine generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ Bindungsgleichungen unterliegen, die sich nicht durch Integration in die Form (1-36) überführen lassen. Nichtholonome Bindungen haben keinen Einfluss auf die Anzahl f der unabhängigen Lagekoordinaten, d. h. der Freiheitsgrade. Sie stellen aber Bindungen zwischen den virtuellen Verschiebungen $\delta q_1, \dots, \delta q_n$ her, sodass im unendlich Kleinen die Anzahl der Freiheitsgrade mit jeder unabhängigen nichtholonomen Bindung um Eins abnimmt. Mechanisch verursachte nichtholonome Bindungsgleichungen sind linear in $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$, also von der Form

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_j + a_{i0} = 0 \quad (i = 1, \dots, \nu). \quad (1-39)$$

Die a_{ij} ($j = 0, \dots, n$) sind Funktionen von $q_1, \dots, q_n$ im skleronomen Fall und von $q_1, \dots, q_n$ und t im rheonomen Fall. Differenziation nach t liefert für Beschleunigungen und für virtuelle Verschiebungen Bindungsgleichungen, die mit (1-37) bzw. (1-38) identisch sind, wenn man J_{ij} durch a_{ij} und $\partial f_i / \partial t$ durch a_{i0} ersetzt.

Beispiel 1-8: Der vertikal stehende Schlittschuh in Bild 1-15 mit punktueller Berührung der gekrümmten Kufe hat drei unabhängige Lagekoordinaten x, y und φ . Die nichtholonome Bindung „die Geschwindigkeit hat die Richtung der Kufe“ wird durch $\dot{y} - \dot{x} \tan \varphi = 0$ ausgedrückt. Daraus folgt $\delta y - \delta x \tan \varphi = 0$, $\ddot{y} - \ddot{x} \tan \varphi - \dot{x} \dot{\varphi} / \cos^2 \varphi = 0$.

1.5 Virtuelle Verschiebungen

Virtuelle Verschiebungen eines Systems sind infinitesimal kleine, mit allen Bindungen des Systems verträgliche, im Übrigen aber beliebige Verschiebungen.

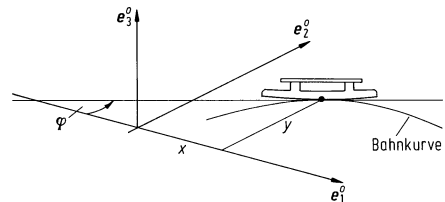


Bild 1-15. Nichtholonomes System

Das Ingenieurwissen: Technische Mechanik
Wittenburg, J.; Richard, H.A.; Zierep, J.; Bühler, K.
2014, X, 225 S. 120 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-41121-2