Kinematik des Massenpunkts

2

Teil I

2.1 Geradlinige Bewegung 18
2.2 Maßeinheiten und Dimensionen von physikalischen Größen . 19
2.3 Bewegung im Raum 19
2.4 Die Kreisbewegung 22
2.5 Wechsel des Koordinatensystems 24
2.6 Skalare und Vektoren 26
Übungsaufgaben 28

J. Heintze / P. Bock (Hrsg.), *Lehrbuch zur Experimentalphysik Band 1: Mechanik*, DOI 10.1007/978-3-642-41210-3_2,

Unter **Kinematik** versteht man die mathematische Beschreibung der Bewegung eines Körpers. Es wird die Frage beantwortet, *wie* sich ein Körper bewegt. *Warum* er sich bewegt – diese Frage wird in der Dynamik behandelt. Wir beschränken uns zunächst auf den einfachsten Fall, dass man von der räumlichen Ausdehnung des Körpers und von seinen eventuell auftretenden Deformationen absehen kann, d. h. wir untersuchen die Kinematik eines **Massenpunkts**. Neben den wichtigsten Bewegungstypen werden wir auch zwei neue Konzepte diskutieren: Die **Dimension** einer physikalischen Größe und die **Invarianz** oder **Transformation** physikalischer Größen bei einem Wechsel des Koordinatensystems.

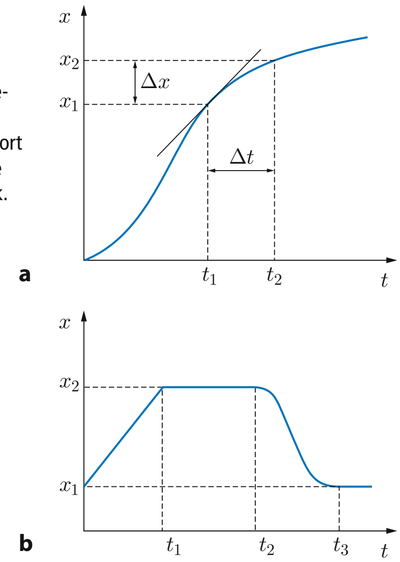


Abbildung 2.1 Weg-Zeit-Diagramme: a) zu (2.2) und (2.3), b) der Massenpunkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit in der Zeit von $t = 0$ bis t_1 von x_1 nach x_2. Dort bleibt er bis zur Zeit t_2 in Ruhe und kehrt dann nach x_1 zurück. Die zweite Bewegung erfolgt erst beschleunigt, dann wird abgebremst. Zur Zeit t_3 ist der Massenpunkt wieder in Ruhe

2.1 Geradlinige Bewegung

Wenn die Bewegung des Massenpunkts auf einer Geraden erfolgt, ist seine Lage zu jedem Zeitpunkt t gegeben durch eine entlang der Geraden gemessene Koordinate x. Die Bewegung wird vollständig beschrieben durch Angabe der Funktion

$$x = f(t) = x(t)\,, \tag{2.1}$$

die als **Bahngleichung** bezeichnet wird. Die Bahngleichung kann auch grafisch als Kurve in einem (x, t)-Diagramm dargestellt werden (Abb. 2.1). Bewegt sich der Massenpunkt im Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ von x_1 nach x_2, so bezeichnet man als **Durchschnittsgeschwindigkeit** den Quotienten:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\,. \tag{2.2}$$

Durch den Grenzübergang $\Delta t \to 0$ erhält man die **momentane Geschwindigkeit** $v(t)$:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f'(t)\,. \tag{2.3}$$

Diese Begriffsbildung und ihre mathematische Formulierung setzen die Infinitesimalrechnung voraus, die zu diesem Zweck in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts von Newton erfunden wurde (vgl. Anhang 21.3 und 21.4).

Die durch (2.3) definierte Geschwindigkeit kann positiv oder negativ sein, je nachdem, ob die Bewegung in der positiven x-Richtung erfolgt oder entgegengesetzt. Im Weg-Zeit-Diagramm ist die Geschwindigkeit im Punkt $x(t)$ durch die Steigung der Tangente an diesem Punkt gegeben. Eine Gerade im Weg-Zeit-Diagramm bedeutet also konstante Geschwindigkeit, die sogenannte **gleichförmige Bewegung**. Dem nach oben gekrümmten Teil der Kurve entspricht in Abb. 2.1a zunehmende, dem nach unten gekrümmten Teil abnehmende Geschwindigkeit.

Die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeitintervall wird als die **Beschleunigung** bezeichnet:

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = f''(t)\,. \tag{2.4}$$

Geschwindigkeit und Beschleunigung können also aus der Bahngleichung durch Differenzieren gewonnen werden. Dies wird am Beispiel des freien Falls erläutert.

Der freie Fall

Die Bahngleichung eines frei fallenden Körpers kann experimentell ermittelt werden, indem man die zu bestimmten Fallstrecken x gehörigen Fallzeiten t misst. Eine solche Messung zeigt, dass die Fallstrecke proportional zum Quadrat der Fallzeit ist, und zwar ergibt sich unabhängig vom Material und der sonstigen Beschaffenheit des fallenden Körpers die Bahngleichung

$$x(t) = 4{,}905\,t^2\,,$$

wenn x in Metern, t in Sekunden gemessen wird. Durch Differenzieren der Bahngleichung erhält man

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 9{,}81\,t \ \text{Meter/Sekunde}\,, \\ a(t) &= \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 9{,}81 \ \text{Meter/(Sekunde)}^2\,. \end{aligned}$$

Es handelt sich demnach beim freien Fall um eine geradlinige Bewegung mit einer konstanten, für alle Körper gleichen Beschleunigung. Diese fundamentale Erkenntnis geht auf Galilei und seine experimentellen Untersuchungen zurück.

Der experimentell bestimmte Wert der Beschleunigung wird als die **Fallbeschleunigung** g bezeichnet. Die Gleichungen des freien Falls lauten also:

$$x = \frac{g}{2} t^2 \quad \to \quad v = g\,t \quad \to \quad a = g\,, \tag{2.5}$$

wobei der Zahlenwert von g etwas von der geografischen Breite abhängt, wie wir später noch diskutieren werden; $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ gilt für geografische Breiten zwischen 45° und 55°, also z. B. in Mitteleuropa.

Ist die Beschleunigung $a(t)$ als Funktion der Zeit bekannt, so kann man die Geschwindigkeit $v(t)$ und die Bahngleichung $x(t)$ durch Integration ermitteln. Dazu schreiben wir (2.4) in der Form

$$\mathrm{d}v = a(t)\,\mathrm{d}t$$

und integrieren rechts von $t = 0$ bis t und links von $v_0 = v(0)$ bis $v = v(t)$:

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^{v(t)} \mathrm{d}u &= v(t) - v_0 = \int_0^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ \to\ v(t) &= v_0 + \int_0^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dabei haben wir die Bezeichnung der Variablen unter dem Integral in u und τ abgeändert, um eine Verwechslung mit der oberen Grenze des Integrals auszuschließen (vgl. Anhang 21.4, (21.88)). Analog erhält man durch Integration von $\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t$:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{2.7}$$

Für eine konstante Beschleunigung a erhält man aus (2.6) und (2.7) die allgemeine Form von (2.5) für beliebige **Anfangsbedingungen**[1]:

$$\begin{aligned} a(t) &= \mathrm{const} \\ \to\ v(t) &= v_0 + at \\ \to\ x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

x_0 ist die Anfangslage des Massenpunkts, v_0 seine Anfangsgeschwindigkeit. Für die Anwendung sind auch Umformungen von (2.5) praktisch, in denen die Endgeschwindigkeit v und die Fallzeit t als Funktion der Fallhöhe $x = h$ ausgedrückt werden:

$$v = \sqrt{2gh}\,, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,. \tag{2.9}$$

[1] Der Begriff Anfangsbedingungen spielt in der Mechanik eine große Rolle. Man versteht darunter die Angabe von Ort und Geschwindigkeit zu einem beliebig gewählten Zeitpunkt t_0. Oft wird $t_0 = 0$ gewählt.

2.2 Maßeinheiten und Dimensionen von physikalischen Größen

Im Internationalen Einheitensystem (Abschn. 1.3) werden Geschwindigkeit und Beschleunigung gemäß ihrer Definition (2.3) und (2.4) in Metern/Sekunde bzw. in Metern/(Sekunde)^2 gemessen. Abgekürzt schreibt man diese Maßeinheiten m/s und m/s^2. Unabhängig von einem speziellen Maßsystem kann man die **Dimension** einer physikalischen Größe angeben, und zwar gewöhnlich durch eckige Klammern um das Formelzeichen:

$$\begin{aligned} &\text{Dimension der Geschwindigkeit}: &[v] &= \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}\,, \\ &\text{Dimension der Beschleunigung}: &[a] &= \frac{\text{Länge}}{(\text{Zeit})^2}\,. \end{aligned}$$

In physikalischen Gleichungen muss die Dimension sämtlicher Terme, d. h. sämtlicher Ausdrücke, die durch Addition, Subtraktion oder Gleichheitszeichen verbunden sind, dieselbe sein. Dies nachzuprüfen ist eine wichtige Kontrolle bei allen Rechnungen und Ansätzen. (Man überzeuge sich, dass z. B. in (2.8) die Terme dimensionsgleich sind). Mitunter kann man auch die Form physikalischer Gleichungen durch eine **Dimensionsanalyse** erraten. Ein Beispiel folgt sogleich bei der Diskussion der Kreisbewegung.

2.3 Bewegung im Raum

Im Raum ist die Lage eines Massenpunkts in einem kartesischen Koordinatensystem durch seine Koordinaten x, y, z bzw. durch den **Ortsvektor** $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ festgelegt (Abb. 2.2). Die vektorielle Schreibweise hat in der Physik generell große Vorteile. Für die hier verwendeten Regeln und Bezeichnungen der Vektorrechnung wird auf Anhang 21.6 verwiesen. Die Bahngleichung ist gegeben durch den zeitlich veränderlichen Ortsvektor

$$\boldsymbol{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)\,. \tag{2.10}$$

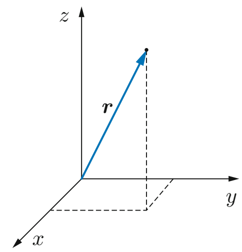


Abbildung 2.2 Der Ortsvektor

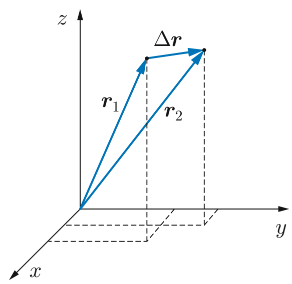


Abbildung 2.3 Bewegung eines Massenpunktes im Raum

Verschiebt sich der Massenpunkt, wie in Abb. 2.3 gezeigt, während des Zeitintervalls $\Delta t = t_2 - t_1$ um $\Delta \boldsymbol{r}$:

$$\begin{aligned} t_1: \quad \boldsymbol{r}_1 &= (x_1, y_1, z_1) \\ t_2: \quad \boldsymbol{r}_2 &= (x_2, y_2, z_2) \\ \Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)\ , \end{aligned}$$

so ist die **Durchschnittsgeschwindigkeit** gegeben durch den Vektor

$$\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}, \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} \right) .$$

Die Momentangeschwindigkeit erhält man durch den Grenzübergang $\Delta t \to 0$:

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right) . \tag{2.11}$$

Den Vektor der Beschleunigung erhält man entsprechend durch Differenzieren von $\boldsymbol{v}(t)$ nach der Zeit:

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} . \tag{2.12}$$

Er hat die Koordinaten

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\ , \\ a_y &= \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\ , \\ a_z &= \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\ . \end{aligned} \tag{2.13}$$

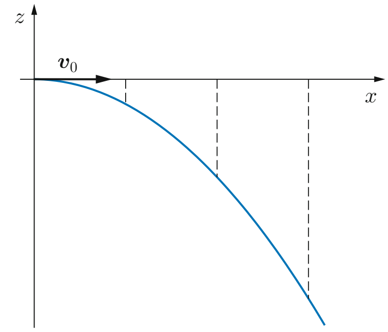


Abbildung 2.4 Horizontaler Wurf

Die Bewegung im Raum wird also ganz ähnlich wie die geradlinige Bewegung beschrieben. Es ist jedoch zu beachten, dass der Vektor der Geschwindigkeit und der Vektor der Beschleunigung im Allgemeinen *nicht die gleiche Richtung* haben. Wir betrachten einige Beispiele.

Horizontaler und schiefer Wurf

Beim horizontalen Wurf sind mit dem in Abb. 2.4 gewählten Koordinatensystem die Anfangsbedingungen

$$\boldsymbol{r}(0) = (0, 0, 0)\ , \quad \boldsymbol{v}(0) = (v_0, 0, 0)\ . \tag{2.14}$$

Die Beschleunigung ist

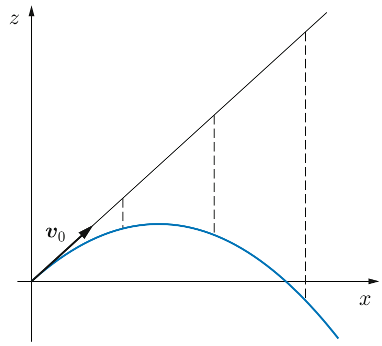
$$\boldsymbol{a}(t) = (0, 0, -g) = \boldsymbol{g}\ . \tag{2.15}$$

Man erhält die Komponenten von $\boldsymbol{v}(t)$ und $\boldsymbol{r}(t)$ durch Integration wie in (2.6) und (2.7), also:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_x(0) + \int_0^t a_x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = v_0\ , \\ v_y(t) &= v_y(0) + \int_0^t a_y(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0\ , \\ v_z(t) &= v_z(0) + \int_0^t a_z(\tau)\,\mathrm{d}\tau = -gt\ , \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t v_x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = v_0\,t\ , \\ y(t) &= y(0) + \int_0^t v_y(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0\ , \\ z(t) &= z(0) + \int_0^t v_z(\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\frac{g}{2}t^2\ . \end{aligned} \tag{2.17}$$

Abbildung 2.5 Schiefer Wurf



$x(t)$ und $z(t)$ stellen die Überlagerung von einer gleichförmigen Horizontalbewegung und einer senkrechten Fallbewegung dar. Als Bahnkurve erhält man, indem man t aus (2.17) eliminiert, eine nach unten geöffnete Parabel:

$$z(x) = -\frac{g}{2v_0^2}\,x^2\,. \tag{2.18}$$

Ganz analog kann man die Bahngleichung für den schiefen Wurf (Abb. 2.5) mit $\boldsymbol{r}(0) = (0,0,0)$ und $\boldsymbol{v}(0) = (v_{0x}, 0, v_{0z})$ berechnen:

$$x(t) = v_{0x}\,t\,, \quad y(t) = 0\,, \quad z(t) = v_{0z}\,t - \frac{g}{2}t^2 \tag{2.19}$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{v}_0\,t + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{g}\,t^2\,. \tag{2.20}$$

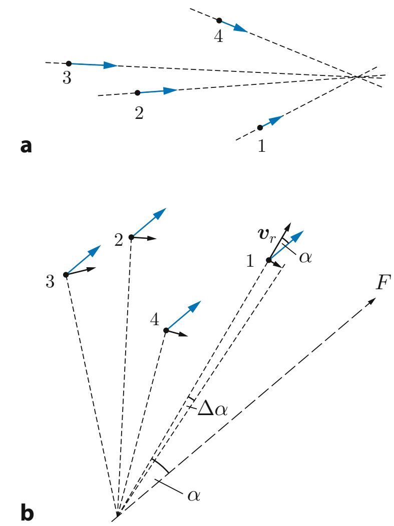
Auch hier entsteht eine Wurfparabel aus der Überlagerung einer gleichförmigen Bewegung in der Richtung von $\boldsymbol{v}_0$ und einer konstant beschleunigten Bewegung (Abb. 2.5). In den Abbildungen 2.4 und 2.5 verhalten sich die Längen der gepunkteten Linien wie 1 : 4 : 9, was dem Fallgesetz (2.5) entspricht.

Gleichförmige Bewegung im Raum

Bei der gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ zeitlich konstant und die Bewegung erfolgt geradlinig. Wir betrachten ein Beispiel, das zeigt, dass selbst in diesem einfachen Fall für die Analyse von Bewegungen im Raum ein gewisses räumliches Vorstellungsvermögen nützlich ist. Die Bestimmung von sogenannten **Haufenparallaxen** dient, wie in Abschn. 1.1 erwähnt, den Astronomen zur Messung von Entfernungen bis zu ca. 10^{20} m. Bei der über Jahre hin wiederholten Vermessung von Sternpositionen stellt man fest, dass manche Fixsterne eine messbare Eigenbewegung[2] zeigen.

[2] Das heißt eine Veränderung der Position an der Himmelskugel, die nicht, wie die Parallaxe und die Aberration des Lichts, auf die Bewegung der Erde zurückgeführt werden kann.

Abbildung 2.6 Zur Bestimmung von Haufenparallaxen. F: Richtung zum Fluchtpunkt



Dabei findet man mitunter folgendes Bild: Eine Gruppe von Sternen bewegt sich auf der Himmelskugel auf ein und denselben Punkt zu, wobei die Eigenbewegung jedes Sterns proportional zu seinem Abstand von diesem **Fluchtpunkt** ist (Abb. 2.6a). Dieses Bild entsteht dadurch, dass sich im dreidimensionalen Raum relativ zu unserem Standort sämtliche Sterne der Gruppe mit derselben Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ bewegen, und zwar in einer Richtung parallel zur Linie Erde–Fluchtpunkt (Abb. 2.6b). Betrachten wir den Stern 1 des Sternhaufens. Wenn der Betrag von v bekannt wäre, könnte man aus der im Zeitintervall Δt beobachteten Änderung $\Delta\alpha$ des Winkels zwischen Sternposition und Fluchtpunkt den Abstand r des Sterns bestimmen: Es ist (im Bogenmaß) $\Delta\alpha = v \sin\alpha \Delta t / r$. Wir erhalten

$$r = \frac{v\,\Delta t \sin\alpha}{\Delta\alpha}\,.$$

Der Absolutwert von v kann aber durch Messung der Rotverschiebung von Spektrallinien im Sternenlicht (Abschn. 1.1) bestimmt werden. Diese liefert unmittelbar die Radialkomponente v_r und damit erhält man $v = v_r / \cos\alpha$. Nun sind alle Größen zur Bestimmung von r bekannt. Die anderen Sterne des Haufens müssen ähnliche Messwerte für die Entfernung ergeben, wenn die Sterne tatsächlich, wie angenommen, zu einer zusammengehörigen Gruppierung gehören.

Bewegung auf einer Kurve im Raum

Erfolgt die Bewegung eines Massenpunkts auf einer vorgegebenen Kurve im Raum, so ist es manchmal praktisch, die Bewegung durch solche Größen zu beschreiben, die auch in der Mathematik zur geometrischen Beschreibung von Kurven verwendet werden.

Abbildung 2.7 Bewegung auf einer Raumkurve

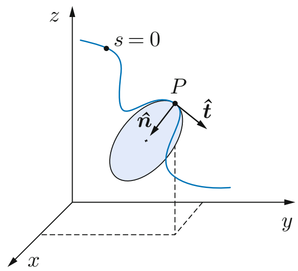
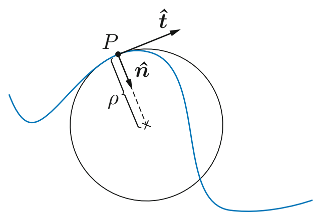


Abbildung 2.8 Der Krümmungskreis und die Vektoren $\hat{\boldsymbol{t}}$ und $\hat{\boldsymbol{n}}$



Zunächst wird dort die **Bogenlänge** s eingeführt (Abb. 2.7). Das ist die Länge der Kurve, gemessen von einem Anfangspunkt, der beliebig festgesetzt werden kann. Durch die Funktion $s(t)$ kann man dann angeben, an welchem Punkt der Kurve sich der Messpunkt zur Zeit t befindet. Seine Geschwindigkeit ist

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} . \tag{2.21}$$

Diese Größe ist nur dann der Betrag des Vektors $\boldsymbol{v}$, wenn $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t > 0$ ist, d. h. wenn sich der Massenpunkt in Richtung zunehmender Bogenlänge bewegt.

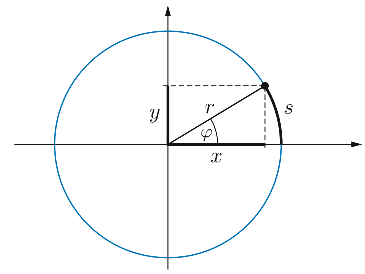
Weiterhin wird in der Geometrie der Raumkurven gezeigt, dass sich an eine solche Kurve überall (von Ecken, Sprüngen und dergleichen wollen wir absehen) ein Kreis anpassen lässt, dem die Kurve auf einem kurzen Stück genau folgt. Dieser Kreis wird **Krümmungskreis** genannt. Er ist an einem Punkt P in Abb. 2.7 eingezeichnet, sein Radius ist ρ. Am Punkt P definieren wir zwei Vektoren: Der **Tangenteneinheitsvektor** $\hat{\boldsymbol{t}}$ zeigt von P aus entlang der Kurve in Richtung zunehmender Bogenlänge s, der **Normaleneinheitsvektor** $\hat{\boldsymbol{n}}$ zeigt von P aus zum Mittelpunkt des Krümmungskreises. Die Beschleunigung am Punkt P hat nun zwei Komponenten. Die **Tangentialbeschleunigung** $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$ gibt an, wie sich die Größe $v(t) = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ ändert:

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\hat{\boldsymbol{t}} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\,\hat{\boldsymbol{t}} . \tag{2.22}$$

Die **Normalbeschleunigung** $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ gibt an, wie sich die Richtung von $\boldsymbol{v}$ ändert. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, ist

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{n} = \frac{v^2}{\rho}\,\hat{\boldsymbol{n}} . \tag{2.23}$$

Abbildung 2.9 Koordinaten der Kreisbewegung



Die Beschleunigung des Massenpunktes, der sich auf einer Raumkurve bewegt, ist also

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\mathrm{t} + \boldsymbol{a}_\mathrm{n} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\hat{\boldsymbol{t}} + \frac{v^2}{\rho}\,\hat{\boldsymbol{n}} . \tag{2.24}$$

Dieser Vektor liegt in der Ebene, in der sich auch der bei P an die Kurve angepasste Krümmungskreis befindet, der in Abb. 2.8 noch einmal gesondert dargestellt ist.

2.4 Die Kreisbewegung

Ein wichtiger Spezialfall einer nicht-geradlinigen Bewegung ist die Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn. Für ihre Diskussion führt man zweckmäßig ebene Polarkoordinaten r, φ ein (Abb. 2.9), die mit den kartesischen Koordinaten x, y verknüpft sind durch die Gleichungen

$$x = r\cos\varphi , \quad y = r\sin\varphi . \tag{2.25}$$

Bei der Kreisbewegung ist r konstant und φ eine Funktion der Zeit. Die Bahngleichung hat also die Form

$$r = \text{const} \qquad \varphi = \varphi(t) . \tag{2.26}$$

Misst man den Winkel φ im Bogenmaß (Anhang 21.1), so besteht zwischen φ und der Bogenlänge s der Zusammenhang

$$\varphi = \frac{s}{r} . \tag{2.27}$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeit des Massenpunktes:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} . \tag{2.28}$$

Die Größe $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ wird als die **Winkelgeschwindigkeit** ω bezeichnet:

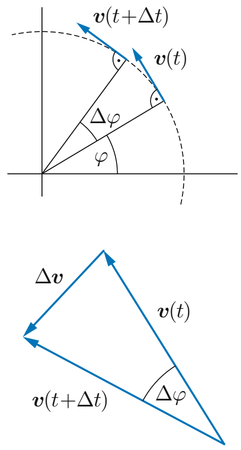
$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{r} . \tag{2.29}$$

ω und v können positiv oder negativ sein, je nachdem, ob φ bzw. s im Zeitintervall $\mathrm{d}t$ zunimmt oder abnimmt.

Abbildung 2.10 Zu (2.32)

a

b



Gleichförmige Kreisbewegung

Im Fall der gleichförmigen Kreisbewegung ($v = \text{const}$) kann die Winkelgeschwindigkeit auch durch die Umlaufzeit T ausgedrückt werden:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \,. \tag{2.30}$$

Die Dimension von ω ist

$$[\omega] = \text{Zeit}^{-1} \,,$$

da nach (2.27) ein Winkel als Verhältnis zweier Längen eine *dimensionslose Größe* ist. Die Maßeinheit im SI-System ist dementsprechend $(\text{Sekunde})^{-1}$. Beispielsweise ist die Winkelgeschwindigkeit eines auf der Erdoberfläche ruhenden Punkts

$$\omega_\text{E} = 2\pi/(24 \cdot 60 \cdot 60)\,\text{s} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\,\text{s}^{-1} \,. \tag{2.31}$$

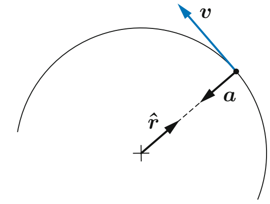
Wir wollen nun die Beschleunigung bei der gleichförmigen Kreisbewegung untersuchen. v und ω sind zwar konstant, es ändert sich jedoch ständig die Richtung des Vektors $\boldsymbol{v}$. Mithin ist $\Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$ nicht Null. Aus Abb. 2.10 a entnehmen wir, dass der Winkel zwischen $\boldsymbol{v}(t)$ und $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$ gerade $\Delta\varphi$ ist, weil $\boldsymbol{v}$ stets senkrecht auf dem Radiusvektor steht. Der Betrag des Differenz-Vektors $\Delta\boldsymbol{v}$ ergibt sich aus Abb. 2.10 b, in der grafisch die Vektorgleichung $\boldsymbol{v}(t) + \Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t+\Delta t)$ dargestellt ist:

$$|\Delta\boldsymbol{v}| \approx v\,\Delta\varphi \,. \tag{2.32}$$

$\Delta\varphi$ ist wieder im Bogenmaß gemessen. Im Grenzfall $\Delta\varphi \to 0$ steht $\Delta\boldsymbol{v}$ senkrecht auf $\boldsymbol{v}$ und zeigt nach innen auf den Kreismittelpunkt. Die gleiche Richtung hat die Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ (Abb. 2.11). Indem wir (2.32) durch Δt dividieren und Δt gegen Null streben lassen, erhalten wir den Betrag der Beschleunigung

$$a = v\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = v\,\omega = \frac{v^2}{r} = r\,\omega^2 \,. \tag{2.33}$$

Abbildung 2.11 Richtung der Vektoren bei der gleichförmigen Kreisbewegung



Die Radialkomponente a_r des Beschleunigungsvektors ist negativ, da die radiale Richtung nach außen weist:

$$a_r = -v\,\omega = -\frac{v^2}{r} = -r\,\omega^2 \,. \tag{2.34}$$

Vektoriell kann die Beschleunigung mit dem Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{r}}$ in radialer Richtung oder mit dem in Abb. 2.8 definierten Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{n}} = -\hat{\boldsymbol{r}}$ geschrieben werden:

$$\boldsymbol{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{v^2}{r}\hat{\boldsymbol{n}} \,. \tag{2.35}$$

Da diese **Radialbeschleunigung** auf das Zentrum des Kreises gerichtet ist, wird sie auch **Zentripetalbeschleunigung**[3] genannt, oder auch Normalbeschleunigung, wie bei (2.23) erklärt wurde.

Die allgemeine Form von (2.35) kann auch mit einer **Dimensionsbetrachtung** ermittelt werden. Zunächst macht man sich klar, dass bei der gleichförmigen Kreisbewegung die Radialbeschleunigung nur vom Radius r des Kreises und von der Geschwindigkeit v bzw. von der Winkelgeschwindigkeit ω abhängen kann. Andere Parameter sind nicht vorhanden. Die Dimension einer Beschleunigung ist nach (2.12)

$$[a] = \text{Länge}/(\text{Zeit})^2 \,.$$

Aus den Dimensionen von r, v und ω ergibt sich, dass diese Größen für die Berechnung von a nur wie in (2.33) angegeben kombiniert werden können. In gleicher Weise kann man auch (2.29) ableiten (bzw. jederzeit rekonstruieren, wenn man sie vergessen hat) – bis auf einen dimensionslosen Faktor (z. B. 2 oder π), den nur die ausführliche Berechnung liefern kann.

Bei der gleichförmigen Kreisbewegung nimmt die Bahngleichung (2.26) die Form

$$r = \text{const} \,, \quad \varphi(t) = \omega t \tag{2.36}$$

an, oder nach (2.25) in kartesischen Koordinaten

$$x(t) = r\cos\omega t \,, \quad y(t) = r\sin\omega t \,. \tag{2.37}$$

[3] Diese Begriffsbildung und die Formel (2.34) gehen auf den holländischen Physiker Christiaan Huygens zurück. Das Wort kommt von (lat.) centrum und petere = nach etwas greifen, ziehen.

Ungleichförmige Kreisbewegung

In diesem Fall sind $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ und $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ zeitlich nicht konstant. Es tritt zusätzlich zur Radialbeschleunigung noch eine tangential gerichtete Beschleunigung $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ bzw. eine **Winkelbeschleunigung** $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ auf:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \,. \tag{2.38}$$

Insgesamt ist die Beschleunigung des Massenpunkts durch (2.24) gegeben. Die Bahngleichung (2.26) kann man in der Form

$$r = \text{const}\,, \quad \varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \omega(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{2.39}$$

mit einem vorgegebenen Anfangswinkel $\varphi(0)$ schreiben. Ein Beispiel hierzu findet man bei den Aufgaben.

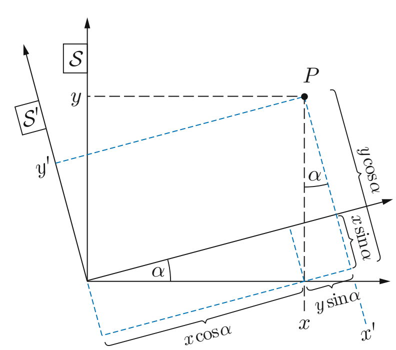
2.5 Wechsel des Koordinatensystems

Verdrehung und Verschiebung des Koordinatensystems

In vektorieller Schreibweise sind kinematische Gleichungen unabhängig von der Orientierung der Koordinatenachsen. Bei einer **Verdrehung des Koordinatensystems** ändern sich lediglich die Koordinaten der Vektoren. Wir wollen dies zunächst am Verhalten des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ untersuchen. Dessen Koordinaten ändern sich wie die Koordinaten eines Punktes P; beide Begriffe bezeichnen ja dasselbe. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass wir das Koordinatensystem um die z-Achse drehen, dann ändern sich nur die x, y-Koordinaten. Wie man in Abb. 2.12 ablesen kann, ergeben sich folgende Formeln für die Umrechnung (**Transformation**) der Koordinaten x, y in x', y':

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha\,, \\ y' &= y\cos\alpha - x\sin\alpha\,, \\ z' &= z\,. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Abbildung 2.12 Drehung des Koordinatensystems



Geschwindigkeit und Beschleunigung entstehen aus dem Ortsvektor durch Differenzbildung bzw. durch Differenzieren. Daher transformieren sich die Koordinaten dieser Größen wie Koordinatendifferenzen. Für diese folgt aus (2.40)

$$\begin{aligned} x_2' &= x_2\cos\alpha + y_2\sin\alpha \\ x_1' &= x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha \\ x_2' - x_1' &= (x_2 - x_1)\cos\alpha + (y_2 - y_1)\sin\alpha \end{aligned}$$

und ein entsprechender Ausdruck für $y_2' - y_1'$. Wir erhalten also mit (2.11) und (2.12) folgende Transformationsgleichungen beim Übergang vom Koordinatensystem $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}'$ in Abb. 2.12:

$$\begin{aligned} v_x' &= v_x\cos\alpha + v_y\sin\alpha\,, & a_x' &= a_x\cos\alpha + a_y\sin\alpha\,, \\ v_y' &= v_y\cos\alpha - v_x\sin\alpha\,, & a_y' &= a_y\cos\alpha - a_x\sin\alpha\,, \\ v_z' &= v_z\,, & a_z' &= a_z\,. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Ganz allgemein müssen sich die Koordinaten jedes Vektors bei Drehung des Koordinatensystems nach diesem Schema transformieren. Man kann dies als Definition des in der Physik verwendeten Vektorbegriffs betrachten.

Bei einer **Parallelverschiebung des Koordinatensystems** um einen Vektor $\boldsymbol{A}$ (Abb. 2.13) ändert sich der Ortsvektor:

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{A}\,. \tag{2.42}$$

Die Vektoren der Geschwindigkeit und Beschleunigung ändern sich dagegen nicht:

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}\,, \quad \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}\,. \tag{2.43}$$

Der konstante Vektor $\boldsymbol{A}$ ergibt beim Differenzieren Null. Man sagt, dass $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{a}$ unter der Koordinatentransformation (2.42) *invariant* seien.

Abbildung 2.13 Verschiebung des Koordinatensystems

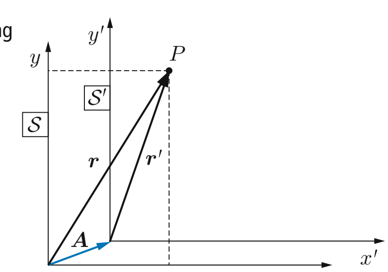
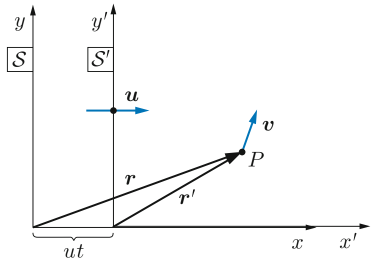


Abbildung 2.14 Ruhendes und bewegtes Koordinatensystem



Bewegte Koordinatensysteme

Wir wollen nun untersuchen, was passiert, wenn wir von einem Koordinatensystem $\mathcal{S}$ auf ein relativ dazu mit konstanter Geschwindigkeit bewegtes Koordinatensystem $\mathcal{S}'$ übergehen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass sich das System $\mathcal{S}'$ mit der Geschwindigkeit u entlang der x-Achse bewegt (Abb. 2.14), und dass beide Koordinatensysteme zur Zeit $t = 0$ zusammenfallen. Ganz entsprechend zu (2.42) erhalten wir die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x' &= x - ut\,,\\ y' &= y\,,\\ z' &= z\,. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Die Geschwindigkeit des Punktes P bezüglich $\mathcal{S}$ ist $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$, bezüglich $\mathcal{S}'$ ist sie $\boldsymbol{v}' = \mathrm{d}\boldsymbol{r}'/\mathrm{d}t$. Damit und mit der Definition der Beschleunigung $\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ bzw. $\boldsymbol{a}' = \mathrm{d}\boldsymbol{v}'/\mathrm{d}t$ erhalten wir durch Differenzieren von (2.44)

$$\begin{aligned} v'_x &= v_x - u\,, & a'_x &= a_x\,,\\ v'_y &= v_y\,, & a'_y &= a_y\,,\\ v'_z &= v_z\,, & a'_z &= a_z\,. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Die Beschleunigung ist also unter der Transformation (2.44) invariant, während das für die Geschwindigkeit natürlich nicht gilt: Die Geschwindigkeit eines Radfahrers ist, vom fahrenden Auto aus beurteilt, anders als von einer stehenden Person gemessen. Der Abstand zweier in $\mathcal{S}$ ruhender Punkte P und Q ist dagegen invariant unter der Transformation (2.44):

$$\begin{aligned} x'_P &= x_P - ut\\ x'_Q &= x_Q - ut\\ x'_P - x'_Q &= x_P - x_Q\,. \end{aligned}$$

Es gilt also allgemein:

$$\boldsymbol{r}'_P - \boldsymbol{r}'_Q = \boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_Q\,. \tag{2.46}$$

Die Gleichungen (2.44) werden auch die **Galilei-Transformation** genannt. Um Einwänden gegen das heliozentrische Weltbild zu begegnen, hat Galilei die Ansicht geäußert, dass alle Naturgesetze unter dieser Transformation invariant seien.[4]

Dadurch erklärt sich, warum wir von der „rasenden Geschwindigkeit“ mit der sich die Erde um die Sonne bewegt, nichts bemerken. Galileis Erkenntnis, die man auch als **Relativitätsprinzip** bezeichnet, gehört jedoch nicht mehr in den Bereich der Kinematik. Es handelt sich um ein Grundprinzip der Physik, auf das wir mehrfach zurückkommen werden. Wir wollen uns zunächst nur merken:

> Die Beschleunigung eines Massenpunktes und der Abstand zweier Punkte sind unter der Galilei-Transformation invariant, nicht aber die Geschwindigkeit.

Diese Aussage ist rein kinematischer Natur, d. h. sie ergibt sich zwangsläufig aus den Definitionen der Geschwindigkeit, der Beschleunigung und des Abstands.

[4] Galilei drückt dies in einem seiner Hauptwerke, dem „Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme“, folgendermaßen aus (siehe auch Abb. 2.15): „Schließt Euch in Gesellschaft eines Freundes in einen möglichst großen Raum unter dem Deck eines großen Schiffes ein. Verschafft Euch dort Mücken, Schmetterlinge und ähnliches fliegendes Getier; sorgt auch für ein Gefäß mit Wasser und kleinen Fischen darin; hängt ferner oben einen kleinen Eimer auf, welcher tropfenweise Wasser in ein zweites enghalsiges darunter gestelltes Gefäß träufeln lässt. Beobachtet nun sorgfältig, solange das Schiff stille steht, wie die fliegenden Tierchen mit der nämlichen Geschwindigkeit nach allen Seiten des Zimmers fliegen. Man wird sehen, wie die Fische ohne irgend welchen Unterschied nach allen Richtungen schwimmen; die fallenden Tropfen werden alle in das untergestellte Gefäß fließen. Wenn Ihr Eurem Gefährten einen Gegenstand zuwerft, so braucht Ihr nicht kräftiger nach der einen als nach der anderen Richtung zu werfen, vorausgesetzt, dass es sich um gleiche Entfernungen handelt. Wenn Ihr, wie man sagt, mit gleichen Füßen einen Sprung macht, werdet Ihr nach jeder Richtung hin gleichweit gelangen. Achtet darauf, Euch aller dieser Dinge sorgfältig zu vergewissern, wiewohl kein Zweifel obwaltet, dass bei ruhendem Schiffe alles sich so verhält. Nun lasst das Schiff mit jeder beliebigen Geschwindigkeit sich bewegen: Ihr werdet – wenn nur die Bewegung gleichförmig ist und nicht hier- und dorthin schwankend – bei allen genannten Erscheinungen nicht die geringste Veränderung eintreten sehen. Aus keiner derselben werdet Ihr entnehmen können, ob das Schiff fährt oder stille steht. Beim Springen werdet Ihr auf den Dielen die nämlichen Strecken zurücklegen wie vorher, und wiewohl das Schiff aufs schnellste sich bewegt, könnt Ihr keine größeren Sprünge nach dem Hinterteile als nach dem Vorderteile zu machen: und doch gleitet der unter Euch befindliche Boden während der Zeit, wo Ihr Euch in der Luft befindet, in entgegengesetzter Richtung zu Eurem Sprunge vorwärts …“ Galilei spricht hier neben dem Relativitätsprinzip implizit noch ein anderes Grundprinzip der Physik aus, dass nämlich im Raum keine Richtung ausgezeichnet ist (**Isotropie des Raumes**).

Abbildung 2.15 Titelbild zu Galileis „Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme". Dargestellt sind die drei Gesprächspartner: Simplicio, der Vertreter des traditionellen Aristotelischen Weltbilds, Salviati, der Kopernikaner und Sagredo, ein interessierter Laie voller Witz und Verstand. Das Schiff im Hintergrund könnte das Relativitätsprinzip symbolisieren

2.6 Skalare und Vektoren

Wie wir gesehen haben, gibt es in der Physik Größen, die durch einen **Betrag** und eine **Richtung** gekennzeichnet werden, z. B. Geschwindigkeit und Beschleunigung. Diese Größen haben wir durch **Vektoren** dargestellt. Es gibt in der Physik aber auch Größen, die durch Angabe einer Zahl bereits vollständig beschrieben sind, z. B. die Masse eines Körpers, die Temperatur oder die Zahl der Moleküle in einem Gasvolumen. Diese Größen bezeichnet man als **Skalare**. Auch die Koordinaten eines Vektors sind skalare Größen.

Bei eindimensionalen Problemen, z. B. bei der geradlinigen Bewegung, hatten wir es nur mit *einer* Koordinate (x) und entsprechend nur mit einer Vektorkoordinate (v_x, a_x) zu tun. In diesem Fall wäre es unnötig kompliziert, den Index x oder Vektorpfeile mitzuschleppen, man schreibt einfach v und a, wie in Abschn. 2.1 geschehen. Diese Praxis wird fast allgemein bei eindimensionalen Problemen angewandt. Man muss jedoch beachten, dass hier zum Beispiel die Geschwindigkeit v positiv oder negativ sein kann, je nach Richtung entlang der x-Achse, während bei dreidimensionalen Problemen mit dem Buchstaben v (ohne Vektorpfeil) der Betrag des Vektors $\boldsymbol{v}$, also eine stets positive Größe gemeint ist.

Auch die Winkelgeschwindigkeit (2.30) kann als vektorielle Größe $\boldsymbol{\omega}$ aufgefasst werden. Sie wird grafisch durch einen Pfeil in Richtung der Drehachse dargestellt (Abb. 2.16 a). Die Orientierung des Pfeils wird dem Dreh-

http://www.springer.com/978-3-642-41209-7

Lehrbuch zur Experimentalphysik Band 1: Mechanik
Heintze, J. - Bock, P. (Hrsg.)
2014, XVI, 305 S. 342 Abb., 301 Abb. in Farbe. Book +
eBook., Softcover
ISBN: 978-3-642-41209-7