

Was eigentlich ist ein Beweis und welches Verständnis liegt diesem Begriff zugrunde? Im ersten Teil dieses Kapitels wird der Versuch einer Begriffsklärung vorgenommen. Anschließend werden verschiedene Aspekte eines Beweises aufgegriffen und in den Fokus gestellt. Es folgen sodann Ausführungen zur Bedeutung von Beweisen sowie zu deren vielfältigen Funktionen, bevor unterschiedliche Typen von Beweisen und Typologien dargestellt werden.

---

## 2.1 Begriffsklärung

Beim Beweisen wird „eine Behauptung in gültiger Weise Schritt für Schritt formal deduktiv aus als bekannt vorausgesetzten Sätzen und Definitionen gefolgert“ (Meyer 2007, S. 21). Es handelt sich also um einen Prozess, der nicht auf Erfahrung beruht, sondern der ausgehend vom Allgemeinen zum Speziellen hin streng logischen Regeln folgt. Ein mathematischer Satz gilt dann als wahre Aussage, wenn er aus anderen wahren Aussagen gefolgert werden kann. Bei diesem Vorgang wird unterschieden zwischen Behauptung und Voraussetzung. Das Ziel des Beweises liegt darin, zu zeigen, dass die aufgestellte Behauptung notwendig aus der Voraussetzung folgt bzw. daraus ableitbar ist. Gelingt dies, wird auch die Behauptung als eine wahre Aussage betrachtet. Allerdings gelten die weiteren Aussagen, die auf dieser Basis aufgestellt werden, nur dann als wahr, wenn sie auf andere wahre (bereits bewiesene) Aussagen oder Axiome (einfachste Aussagen, die als wahr betrachtet werden und selbst nicht auf noch einfachere Aussagen zurückgeführt werden können) zurückgreifen. Das zentrale Kriterium dabei ist die Widerspruchsfreiheit der einzelnen Aussagen, die auf einander bezogen werden.

Um auch intersubjektiv Geltung beanspruchen zu können, muss eine solche Herleitung von anderen wahren Aussagen dokumentiert werden, d. h. die Vorgehensweise wird verschriftlicht, damit die Kette von Argumenten bzw. die lückenlose Rückführung auf Axiome von den Mitgliedern der fachlichen Gemeinschaft nachvollzogen und

geprüft werden kann. Der sogenannten „Community“ obliegt damit eine Evaluations- und Validierungsfunktion, da sie einen (neuen) Beweis auf den damit erhobenen Geltungsanspruch prüft. Ein Beweis stellt somit einen Begründungszusammenhang her, der – wenn er sich als gültig herausstellt – allgemeine Akzeptanz erfährt. Dies muss allerdings nicht zwingend in einem deduktiven Vorgang erfolgen, auch ein induktives Vorgehen – und damit rückt die Denkbewegung vom Speziellen ausgehend hin zum Allgemeinen (vgl. Dewey 2002) in den Fokus – ist insbesondere in einer ersten Phase des Beweisens eine angemessene und sinnvolle Strategie.

Folgt man der Argumentation Wittmanns und Müllers (1988, S. 254) liegt die Zielsetzung des (schulischen) Beweisens insbesondere darin, „zu verstehen, *warum* der betreffende Satz gilt“. Dabei treten festgelegte Vorgehens- und Denkweisen eher in den Hintergrund. Im Mittelpunkt des Bemühens steht das kohärente Begründen eines Zusammenhangs.

---

## 2.2 Einzelne Aspekte im Fokus

Im Zusammenhang mit dem Beweisen sind verschiedene Aspekte von besonderer Bedeutung. Diese werden teilweise auch mit unterschiedlicher Akzentuierung, gleichwohl aber nicht völlig kontrovers diskutiert. Es sind dies die folgenden Aspekte: 1) Produkt- und Prozesscharakter, 2) formale Strenge, 3) Wahrheit und Gültigkeit, 4) Art des Arguments und 5) Semantik und Syntaktik. Diese fünf Aspekte werden im Folgenden genauer beleuchtet.

### 2.2.1 Produkt- und Prozesscharakter

Mathematik kann nicht nur als Ansammlung von wahren Aussagen verstanden werden, wie dies die Ideengeschichte berühmter Beweise vermuten ließe (z. B. Winter 1991). Nebst der Produktseite weist die Mathematik auch einen Prozesscharakter auf und entwickelt sich gerade durch Beweise und die sich dadurch neu eröffnenden Möglichkeiten weiter (vgl. Kap. 1). Pólya (1949, S. 9) spricht in diesem Zusammenhang von der „werdenden“ Mathematik und unterscheidet sie von der „fertigen“, die er gemäß Euklid als eine systematische, deduktive Wissenschaft beschreibt. Die „werdende“ Mathematik – oder in den Worten Pólyas (1949, S. 9) „Mathematik in statu nascendi“ – hingegen weist einen stark experimentellen Charakter auf und geht zumindest in einem ersten Schritt induktiv vor.

Die Produkte- wie die Prozessseite sind für die Mathematik selbst bedeutsam und ergänzen einander sinnvoll. Gerade angesichts der zahlreichen eleganten Beweise der Ideengeschichte der Mathematik darf aber nicht vergessen gehen, dass der experimentelle, induktive Zugang eine wichtige Voraussetzung zum Entstehen eines fertigen Beweises ist. In der Literatur findet man diese beiden Seiten der Mathematik teilweise

unterschiedlich gewichtet, was auf ein anders akzentuiertes Fachverständnis schließen lässt. Die beiden extremen Positionen sind die A-priori-Sicht auf der einen Seite und der Quasi-Empirismus auf der anderen. In der A-priori-Sicht wird Mathematik als etwas verstanden, was auf reinem Denken und nicht auf Erfahrung beruht. Demnach ist Wissen aus der Mathematik immer absolutes und sicheres Wissen, das nicht empirisch validiert wird, sondern über Beweise: „Was einmal bewiesen ist, ist wahr für *immer* und wahr für *alle*“ (Heintz 2000, S. 18). In der Position des Quasi-Empirismus (vgl. Lakatos 1979) hingegen wird Mathematik als empirische Wissenschaft, analog beispielsweise zur Physik, verstanden. Damit hat Wissen immer vorläufige Gültigkeit und ist nicht als absolut zu verstehen. Diese beiden extremen Positionen unterscheiden sich somit bezüglich ihrer Fokussierung auf die Produkt- bzw. die Prozessseite der Mathematik: Der Quasi-Empirismus fokussiert (einseitig) den Prozesscharakter und vernachlässigt das Produkt, während die A-priori-Sicht den Prozess zu stark ausblendet.

Mit Pólya (1949), der beide Seiten betont, ist hier eine Mittelposition gefunden, die auch von anderen Mathematikdidaktikern (z. B. Freudenthal 1977) geteilt wird: Mathematik weist sowohl einen Prozess- als auch einen Produktcharakter auf. Das Beweisen betont die Tätigkeit und damit den Prozess, der fertige Beweis hingegen fokussiert das Produkt und damit die kulturelle Leistung, die ihrerseits aber auch aus einem Prozess des Beweisens hervorgegangen ist.

### 2.2.2 Formale Strenge

Ein zweiter Aspekt von Beweisen betrifft die formale Strenge. In dieser Akzentuierung geht es um die Frage, wie streng ein Beweis sein muss, um von der Community akzeptiert zu werden: Muss ein Beweis in jedem Fall formal-deduktiv und damit absolut streng sein oder ist auch eine hinreichende Strenge, gesichert durch andere Begründungsverfahren, möglich?

In der Disziplin wird von absoluter Strenge ausgegangen. Die berühmten Beweise liegen selbstverständlich (auch) in einer formal-deduktiven Darstellung vor und weisen damit die geforderte absolute Strenge auf. In der Mathematikdidaktik hingegen hat gerade dank des quasi-empirischen Verständnisses von Mathematik (vgl. Lakatos 1979) mit der stärkeren Betonung des Prozesses die Erkenntnis Einzug gehalten, dass nicht einzig formal-deduktive Verfahren zugelassen werden sollten, sondern dass insbesondere im schulischen Kontext auch eine hinreichende Strenge akzeptabel ist. Diese hinreichende Strenge bezieht sich allerdings nicht auf die Korrektheit oder auf das logische Denken, sondern einzig auf die Strenge bezüglich der Formalisierung. Im Zusammenhang mit der werdenden Mathematik ist eine hinreichende Strenge in der Formulierung Teil des Arbeitens und ein wichtiger Etappenschritt. Ein Zusammenhang kann auch verstanden und logisch kohärent begründet werden, ohne dass dies bereits in einer formal-deduktiven Weise zu erfolgen hat (vgl. Kap. 4). Dieser Zwischenschritt ist insbesondere für Schülerinnen und Schüler sehr bedeutsam, weil sie meist nicht in der Lage sind,

einen Zusammenhang von Anfang an formal-deduktiv und damit formal-symbolisch und algebraisch zu begründen, und dies zudem ihrer Vorgehensweise des schrittweisen Suchens und Erkennens von Zusammenhängen nicht entsprechen würde. Das betonen Wittmann und Müller (1988, S. 240), wenn sie schreiben, dass eine Fokussierung auf absolute formale Strenge „für die Entwicklung eines für den jeweiligen sozialen Kontext angemessenen Beweisverständnisses“ hinderlich sein könne.

Formale Strenge ist deshalb immer eine Frage des Maßes und somit kontextabhängig: „Rigour is a question of degree in any case. In the classroom one need provide not absolute rigour, but enough rigour to achieve understanding and to convince“ (Hanna 1997, S. 183). Rückt man das Verstehen von Zusammenhängen von Schülerinnen und Schülern in den Mittelpunkt, werden formale Aspekte schwächer gewichtet. Es geht also weniger um die Frage der absoluten oder der hinreichenden formalen Strenge, sondern darum, dass formale Strenge der Situation und den Voraussetzungen der Beteiligten angemessen ist. Die Strenge im Denken und die Korrektheit in der Argumentation hingegen sind immer notwendig und damit auch nicht kontextabhängig. Begründet werden muss über logisches Schließen.

### 2.2.3 Wahrheit und Gültigkeit

Ein weiterer Aspekt bezieht sich auf die Kriterien der Wahrheit und Gültigkeit. Nur Aussagen können wahr (oder falsch) sein, eine Argumentation hingegen ist nicht wahr, sondern gültig (oder ungültig), und zwar dann, wenn die Konklusion logisch aus den Prämissen folgt (vgl. Abschn. 3.5.1). Ob die Prämissen selbst wahre Aussagen sind, ist eine andere Frage. Gültigkeit ist im Gegensatz zur Wahrheit ein syntaktisches, d. h. ein formal-logisches Kriterium, während sich Wahrheit auf den Inhalt der Aussage bezieht. Der Inhalt einer Aussage liegt auf der semantischen Ebene und bedarf einer inhaltlichen Prüfung der betreffenden Aussage. Man kann also nicht von einer „gültigen Aussage“ oder einer „wahren Argumentation“ sprechen, sondern nur von „wahren Aussagen“ und „gültigen Argumentationen“. Die Unterscheidung dieser beiden Kriterien fällt allerdings schwer. Wohl auch deshalb wird sie im Mathematikunterricht tendenziell vernachlässigt (vgl. Durand-Guerrier 2008), was zu weiteren Schwierigkeiten im Verstehen und Führen von Beweisen führt. Die Gültigkeit einer Argumentation und damit das syntaktische Kriterium wird von der fachlichen Gemeinschaft geprüft. Die Wahrheit einer Aussage hingegen wird auf inhaltlicher Ebene geklärt.

### 2.2.4 Art des Arguments

Beim Beweisen wird in der Regel zwischen deduktiven und induktiven Argumenten unterschieden. Erstere vollziehen sich vom Allgemeinen zum Speziellen, Letztere hingegen vom Speziellen zum Allgemeinen. Induktion und Deduktion können somit in Übereinstimmung mit Dewey (2002) quasi als Richtungen des Denkens und des Schlussfolgerns betrachtet werden. Diese werden im Zusammenhang mit den Denkprozessen beim Beweisen in ihrer

Funktion als Begründungsarten nochmals gesondert betrachtet werden (vgl. [Abschn. 3.6](#)). Induktive Argumente sind im Gegensatz zu korrekten deduktiven Argumenten jedoch problematisch, weil stets die Gefahr besteht, dass vom Speziellen zu schnell oder fälschlicherweise auf das Allgemeine geschlossen wird. Statistische Argumente können diesen Umstand entschärfen, indem von einer begrenzten Stichprobe vorsichtig auf die Gesamtheit der Elemente geschlossen wird. Man spricht dann meist nicht von einem gültigen Argument, sondern – eben vorsichtig – nur von einem korrekten (vgl. Bayer 2007).

Jahnke (2008, 2010) differenziert zwischen offenen und geschlossenen Argumenten, was einen erhellenden Beitrag zur Art der Argumente darstellt. Offene Argumente sind nach Jahnke (2008, 2010) empirische Argumente, die auf Erfahrung und Beobachtung basieren und die im Alltag dominieren. Geschlossene Argumente hingegen sind theoretische Argumente, wie sie in der Mathematik vorherrschen. Theoretische Argumente sind dadurch gekennzeichnet, dass sie die Bedingungen, unter denen sie gelten, genau aufführen. Sie sind „geschlossen“, weil genau definiert ist, unter welchen Bedingungen etwas ausnahmslos gilt, und das Argument damit strikt gültig ist. Im Gegensatz dazu führen Argumente aus dem Alltag üblicherweise nicht auf, unter welchen Bedingungen etwas gilt. Ändern sich die Bedingungen, entstehen Ausnahmen, und die Gültigkeit ist für diese Fälle nicht mehr gegeben. Hier handelt es sich deshalb um offene Argumente. Beweisen beruht auf theoretischen Argumenten, die im Gegensatz zu offenen Argumenten aus dem Alltag ein Auseinanderhalten von Voraussetzung und Behauptung erfordern. Beim Beweisen ist deshalb ein Überwinden alltäglichen Argumentierens nötig: „To understand the essence of mathematical proof we need to overcome the limits of everyday thinking“ (Jahnke 2008, S. 371).

### 2.2.5 Semantik und Syntaktik

Der letzte Aspekt, die hier fokussiert wird, bezieht sich auf die Ebene des Verständnisses. Grundsätzlich unterschieden werden die inhaltlich-semantische Ebene und die algorithmisch-syntaktische Ebene (vgl. Wartha und Wittmann 2009). Vereinfacht gesagt bezieht sich die inhaltlich-semantische Ebene auf inhaltliches Verständnis, während sich die algorithmisch-syntaktische Ebene auf die formale Struktur und die Vorgehensweise bezieht.

Im Zusammenhang mit Wahrheit und Gültigkeit (vgl. [Abschn. 2.2.3](#)) wurden diese beiden Ebenen bereits kurz angesprochen: Die Gültigkeit einer Argumentation wird auf syntaktischer Ebene geklärt, während die Wahrheit von Aussagen auf semantischer Ebene geprüft wird. Für die Bearbeitung der inhaltlich-semantischen Ebene ist gerade im Mathematikunterricht eine alltagsnahe Sprache durchaus ausreichend. Für das Verstehen und Formulieren auf syntaktischer Ebene sind hingegen eine formale Sprache und das Berücksichtigen eines genauen Vorgehens (die Konklusion folgt mittels Schlussfolgerung aus mindestens zwei Prämissen) unabdingbar (vgl. [Abschn. 3.5.1](#)).

Beweisen verlangt demnach, sich sowohl auf inhaltlich-semantischer Ebene wie auf algorithmisch-syntaktischer Ebene bewegen zu können. Sowohl eine ausschließliche

Fokussierung der inhaltlichen Ebene wie eine solche der syntaktischen Ebene im Zusammenhang mit formaler Strenge eines Beweises sind kaum angemessen für den Prozess des Beweisens, insbesondere dann nicht, wenn es sich um schulisches Beweisen handelt. Generell gilt zwar in einem verstehensorientierten Mathematikunterricht, dass Semantik vor Syntaktik kommt, was durchaus auch als Entwicklung verstanden werden kann, aber es wäre falsch, in einer bestimmten Entwicklungsphase lediglich die eine oder andere Ebene zu berücksichtigen, weil diese beiden Ebenen miteinander verbunden werden müssen, um ein umfassendes Verständnis erlangen zu können.

---

## 2.3 Die kommunikative Bedeutung von Beweisen

Für die Mathematik sind Beweise essenziell, weil sie als Träger mathematischen Wissens (Hanna und Barbeau 2008) „identitätskonstitutiv“ (Heintz 2000, S. 14) wirken (vgl. Kap. 1). Sie haben sowohl eine kulturumspannende wie eine kommunikative Bedeutung. Die kulturumspannende Bedeutung von Beweisen ist durch die Verwendung eines einheitlichen axiomatischen Regelwerks gegeben. Das macht das Verstehen von Beweisen universell. Die formal-symbolische Sprache, die dabei verwendet wird, ist ihrerseits kulturunabhängig und gleichzeitig durch den einheitlichen Gebrauch kulturverbindend.

Ein Beweis klärt einen Zusammenhang und schafft Gewissheit darüber, ob und warum eine Behauptung notwendigerweise gilt. Ein solcher Zusammenhang wird dargestellt, in schriftlicher oder mündlicher Form, und dadurch kommuniziert. Deshalb haben Beweise auch eine kommunikative Bedeutung. Neue Aussagen müssen immer mittels logischer Regeln mit den Axiomen verbunden werden, um von der mathematischen Community als wahre Aussagen akzeptiert zu werden. Ein schriftlich festgehaltener Beweis stellt einerseits einen vorläufigen Abschluss einer inhaltlichen Auseinandersetzung dar, andererseits erhebt er einen Geltungsanspruch. Die mathematische Gemeinschaft prüft die neue Aussage oder den Beweis bezüglich der Widerspruchsfreiheit mit alten Beweisen. Dadurch wird mathematisches Wissen als sicher garantiert. Ein Beweis ist somit auch stets „ein hochgradig normiertes Kommunikationsverfahren“ (Heintz 2000, S. 219).

Während der Tätigkeit des Beweisens müssen universell gültige Regeln eingehalten werden. So müssen beispielsweise Begriffe zunächst definiert, Notationen geklärt und sämtliche Argumentationsschritte belegt werden.

Heintz (2000, S. 227ff.) beschreibt die kommunikative Funktion von Beweisen als kulturelle Ressource mit folgenden drei Thesen:

1. „Die Institution des Beweises dient dazu, die privaten Gedanken in eine intersubjektive Sprache zu übersetzen.“
2. „Gleichzeitig verhelfen Gespräche dazu, explizit zu machen, was in einem publizierten Beweis implizit vorausgesetzt wird.“
3. „Gespräche sind schließlich auch deshalb wichtig, weil längst nicht alles mathematische Wissen in schriftlicher Form vorliegt.“

Mit der kommunikativen Funktion von Beweisen wird auch der soziale Kontext des fachlichen Diskurses angesprochen, der im Zusammenhang mit Beweisen unabdingbar ist (vgl. [Abschn. 4.1](#)).

---

## 2.4 Die Funktionen von Beweisen

In der Literatur herrscht Einigkeit bezüglich der beiden Hauptfunktionen von Beweisen, die im folgenden Abschnitt vorgestellt werden. Diese beiden Funktionen sind von verschiedenen Autorinnen und Autoren ergänzt worden. Darauf gehen die beiden weiteren Abschnitte ein.

### 2.4.1 Zwei Hauptfunktionen von Beweisen

Hersh (1993) unterscheidet eine überzeugende und eine erklärende Funktion von Beweisen. Erstere gilt insbesondere für die Disziplin selbst als sehr bedeutsam und kommt immer dann zum Ausdruck, wenn in einem Beweis mittels logischer Schlussfolgerungen ein Geltungsanspruch dargelegt wird, der von der fachlichen Community geprüft wird und im Falle einer Annahme zur Bestätigung seiner Gültigkeit führt. Es geht dabei also um die Überzeugungskraft der dargelegten Argumente. Die erklärende Funktion hingegen ist dann angesprochen, wenn man einen fertigen Beweis betrachtet und die darin formulierte Allgemeingültigkeit eines Zusammenhangs nachzuvollziehen versucht. Hier wird die Argumentation nicht infrage gestellt, sondern der Beweis als sicheres Wissen interpretiert, der einen Zusammenhang erklärt.

Die überzeugende Funktion von Beweisen ist zwar auch im Mathematikunterricht wichtig. Gleichwohl muss dabei berücksichtigt werden, dass Schülerinnen und Schüler – im Gegensatz zu einer fachlichen Community – relativ leicht überzeugt werden können, weil Beweisen eine hochkomplexe und äußerst anspruchsvolle Tätigkeit ist, die Lernenden schwerfällt. Hinzu kommt, dass es sich beim schulischen Diskurs um eine spezielle kommunikative Situation handelt, bei der ein hierarchisches Ungleichgewicht besteht. Dies erklärt, warum Schülerinnen und Schüler selbst nicht bewiesene Theoreme akzeptieren und tendenziell einen mathematischen Satz eher selten infrage stellen. Deshalb ist für den Mathematikunterricht die zweite Funktion, die erklärende, wichtiger als die überzeugende, denn ein Beweis als Träger mathematischen Wissens (vgl. [Kap. 1](#)) erklärt einen Zusammenhang vollständig: „Proof is complete explanation“ (Hersh 1993, S. 397). Eine solche Erklärung liegt in einem Beweis in einer komprimierten Form vor. Für Schülerinnen und Schüler ist deshalb diese Funktion eines Beweises besonders bedeutsam, weil ihnen im Beweis ein mathematischer Zusammenhang überzeugend aufgezeigt und begründet wird und diesen erklärt.

### 2.4.2 Fünf Funktionen von Beweisen in der Übersicht

Diese beiden Hauptfunktionen von Beweisen gemäß Hersh (1993) – Überzeugen und Erklären – können weiter ausdifferenziert und ergänzt werden. De Villiers (1990) beispielsweise führt fünf Funktionen von Beweisen auf (vgl. Meyer 2007, S. 28): 1) Verifikation, 2) Erklärung, 3) Kommunikation, 4) Entdecken und 5) Systematisierung. Die ersten beiden Funktionen betreffen die kognitive Rolle, die Beweise spielen, während sich die dritte und die vierte Funktion auf die soziale Rolle beziehen und die letzte Funktion auf die epistemologische (vgl. Schwarz et al. 2010).

Bei der *Verifikation* handelt es um ein Verfahren, die gemachten Aussagen bezüglich ihres Wahrheitsgehaltes zu überprüfen und gegebenenfalls zu bestätigen.

Die Funktion der *Erklärung* entspricht derjenigen von Hersh (1993). Beweise als Träger von mathematischem Wissen dienen dem Verstehen. Sie vermitteln Einsicht darüber, warum ein bestimmter Zusammenhang gilt oder eine Aussage wahr ist.

Die Funktion der *Kommunikation* ergibt sich aus den ersten beiden Funktionen. Sowohl Erklärungen wie Überzeugungen spielen sich in einem sozialen Kontext ab. Im Zusammenhang mit der Überzeugungskraft eines Beweises ist die fachliche Community die prüfende Instanz, die darüber entscheidet, ob ein neuer Beweis angenommen oder abgelehnt wird: „In mathematical practice, in the real living mathematicians, proof is convincing argument, as judged by qualified judges“ (Hersh 1993, S. 389). Das verleiht dem Akt des Beweisen nebst der formal-logischen Dimension zusätzlich auch eine soziologische und kommunikative Dimension, die von Schwarz (2009, S. 106) wie folgt beschrieben wird: „The role of proof is not to convince but to provide a way to communicate mathematical ideas.“ Beweise stellen damit auch einen Anlass für die mathematische Kommunikation dar. Dabei werden einerseits die im Geltungsanspruch eines Beweises formulierten Aussagen geprüft. Andererseits wird das im Beweis enthaltene mathematische Wissen im Diskurs rekontextualisiert.

Die Funktion des *Entdeckens* bedeutet, dass neue Zusammenhänge gefunden und in einem Beweis dargelegt werden können.

Beweise dienen aber auch der *Systematisierung*. Als Träger mathematischen Wissens sind sie dazu geeignet, Ergebnisse ordnend und systematisierend in einen theoretischen Zusammenhang zu stellen und Beziehungen innerhalb der Mathematik zu fassen.

### 2.4.3 Ergänzende Funktionen

Hanna (2005) ergänzt die fünf von De Villiers (1990) genannten Funktionen von Beweisen durch drei weitere. Es sind dies: 1) Konstruktion, 2) Exploration und 3) Inkorporation. Diese drei weiteren Funktionen von Beweisen sind aber für den Mathematikunterricht nicht im gleichen Maße bedeutsam wie die erklärende Funktion.

Bei der Funktion der *Konstruktion* geht es darum, dass auf der Grundlage eines Beweises eine neue Theorie entwickelt werden kann. Auf diesen Umstand weist auch Rav



(1999, S. 6) hin (vgl. [Kap. 1](#)), wenn er deutlich macht, dass ein Beweis neue Werkzeuge zur Verfügung stellt, die der Weiterentwicklung der Mathematik dienen. Genau darum geht es bei dieser Funktion von Beweisen.

Die Funktion der *Exploration*, die Hanna (2005) aufführt, bezieht sich auf das Erforschen eines postulierten Zusammenhangs oder einer Definition im Hinblick auf mögliche Konsequenzen, die deren Annahme hätte.

Die letzte von Hanna (2005) genannte Funktion, diejenige der *Inkorporation*, bezieht sich auf das Aufnehmen von Neuem in ein kohärentes Ganzes. Bekannte Tatsachen werden in einen neuen Rahmenzusammenhang gestellt und Neues wird in einem Gesamtzusammenhang verortet.

Didaktisch können auch diese beiden letzten ergänzenden Funktionen genutzt werden: Schülerinnen und Schüler können auf der Basis eines vorgestellten Beweises angeregt werden, zu untersuchen, welche Konsequenzen die Annahme einer bestimmten Theorie oder eines Beweises hätte. Den Lehrpersonen obliegt es sodann, Ideen und bewiesene Tatsachen in einem Rahmenzusammenhang sicht- und erkennbar zu machen und damit einen Beitrag dazu zu leisten, Neues zu inkorporieren. Hingegen werden Lernende kaum in der Lage sein, eine neue Theorie mittels eines Beweises zu konstruieren. Deshalb tritt diese Funktion im schulischen Kontext in den Hintergrund.

---

## 2.5 Verschiedene Typen von Beweisen

Beweise können je nach gewählter Perspektive unterschiedlich kategorisiert werden. Aus Sicht der Mathematik wird eine andere Klassifizierung gewählt als aus derjenigen der Mathematikdidaktik. Deshalb wird zunächst eine Kategorisierung aus der fachlichen Sicht heraus vorgestellt, bevor verschiedene didaktische Ansätze präsentiert werden.

### 2.5.1 Unterschiedliche Beweise aus der Sicht des Faches

Aus Sicht der Disziplin Mathematik wird zwischen *direkten* und *indirekten* Beweisen unterschieden. Direkte Beweise bezeichnen solche, bei denen eine Behauptung bewiesen wird, indem bereits bewiesene Aussagen angewandt werden oder indem logisch gefolgert wird. Indirekte Beweise hingegen beschäftigen sich zunächst mit dem Gegenteil, indem sie zuerst davon ausgehen, dass die formulierte Behauptung nicht zutreffe. Im Verlauf des nachfolgenden Beweisprozesses entsteht ein Widerspruch, der nur dadurch erklärt werden kann, dass die getroffene Annahme, wonach die Behauptung falsch sei, selbst falsch ist. Die Behauptung wird dadurch indirekt bewiesen.

Ein Beispiel für einen solchen indirekten Beweis ist derjenige von Euklid (2003) zur Behauptung, dass es unendlich viele Primzahlen gebe. Dabei wird zunächst angenommen, dass es eine endliche Menge von Primzahlen gibt:

Für eine beliebige endliche Menge  $\{p_1, \dots, p_r\}$  von Primzahlen sei  $n := p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r + 1$  und  $p$  ein Primteiler von  $n$ . Wir sehen, dass  $p$  von allen  $p_i$  verschieden ist, da  $p$  sonst sowohl die Zahl  $n$  als auch das Produkt  $p_1 p_2 \dots p_r$  teilen würde und somit auch die 1, was nicht sein kann. Eine endliche Menge  $\{p_1, \dots, p_r\}$  kann also niemals die Menge *aller* Primzahlen sein. (Aigner und Ziegler 2002, S. 3)

Diese Argumentation kann auch an einem konkreten Zahlenbeispiel nachvollzogen werden: Wenn  $\{2, 3, 5\}$  alle Primzahlen wären, dann müsste  $31 = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$  durch 2, 3 oder 5 teilbar sein, weil 31 sonst eine weitere Primzahl wäre. Ist sie das nicht, müsste 1 durch 2, 3 oder 5 teilbar sein, was auch nicht der Fall ist. Damit ist die Annahme, dass es eine endliche Anzahl von Primzahlen gibt, widerlegt und ein indirekter Beweis erbracht.

Als weiteres wichtiges Beweisverfahren gilt die vollständige Induktion, die selbst ein Axiom darstellt. Die vollständige Induktion zeigt in zwei Teilen, der Verankerung und dem Induktionsschritt, dass etwas, das für  $n$  gilt, auch für  $n + 1$  Gültigkeit hat. Für Pólya (1995, S. 133) ist Induktion „die Methode, allgemeine Gesetze durch Beobachtung und Kombination besonderer Fälle zu entdecken“. Damit rückt er die Induktion in die Nähe der quasi-empirischen Wissenschaften (vgl. Abschn. 2.2.1). Induktion wird in verschiedenen Wissenschaften, nicht nur in der Mathematik verwendet. Die vollständige Induktion hingegen gilt als eine Besonderheit des Fachs Mathematik und ist geeignet, „um Lehrsätze einer gewissen Art zu beweisen“ (Pólya 1995, S. 133). Poincaré (1914, S. 10) bezeichnet die vollständige Induktion sogar als „mathematische Schlussweise in ihrer reinsten Form“.

Diese drei Beweistypen – der direkte Beweis, der indirekte Beweis und die vollständige Induktion – beziehen sich auf vollständig ausgeführte Beweise von Expertinnen und Experten. Sie beschreiben drei grundsätzlich unterschiedliche Vorgehensweisen zum Erlangen eines gültigen, vollständigen mathematischen Beweises aus der Sicht der fachlichen Disziplin. Wenngleich diese drei Beweistypen auch für beweisende Tätigkeiten von Schülerinnen und Schülern bedeutsam sind, so differenziert die Mathematikdidaktik doch noch weitere, didaktisch relevante Typen von Beweisen aus. Diese sind insbesondere dazu geeignet, um das noch nicht routinisierte Ausführen eines vollständigen mathematischen Beweises von Lernenden zu beschreiben.

### 2.5.2 Pragmatisches und intellektuelles Beweisen

In der fachdidaktischen Literatur existieren zahlreiche, didaktisch relevante Klassifizierungen von Beweisen. So unterscheidet beispielsweise Balacheff (1988) zwischen *pragmatischen* und *intellektuellen* Beweisen. Die pragmatischen Beweise erfolgen durch Verifizieren an Beispielen und durch Experimentieren, während die intellektuellen Beweise entweder mit einem spezifischen Fall oder mit einer mentalen Operation arbeiten.

Eine Zweiteilung nehmen auch Fischer und Malle (2004) vor, wenn sie von *Handlungs-* und von *Beziehungsbeweisen* sprechen, die sich komplementär zueinander verhalten. Die Handlungsbeweise stützen auf eine Handlung oder eine Operation ab, während die Beziehungsbeweise die Strukturen vorwiegend mit symbolischen und formalen Mitteln klären. In dieser Unterscheidung angelegt ist einerseits eine Progression im Sinne einer didaktischen Stufung fortschreitender Abstraktion:

Je strenger die Mathematik aufgebaut wird, desto mehr wird im Allgemeinen gefordert, Handlungselemente auszuschließen und möglichst alles in Form von formalen Beziehungen auszudrücken. (Fischer und Malle 2004, S. 186)

Andererseits weist diese Klassifizierung eine Nähe zu Balacheffs (1988) pragmatischen und intellektuellen Beweisen auf, da Handlungsbeweise eher den pragmatischen Beweisen zugeordnet werden können, die Beziehungsbeweise hingegen den intellektuellen Beweisen. Dass Handlungs- und Beziehungsbeweise komplementär zueinander konzipiert sind, wird auch im folgenden Zitat von Fischer und Malle (2004, S. 186) deutlich:

Umgekehrt spielen beim heuristischen Denken aber die Handlungen oft eine weit wichtigere Rolle als formale Beziehungen. Bei einer integrativen Sicht von Mathematik, wie wir sie anstreben, darf keiner dieser beiden Aspekte fehlen. (Fischer und Malle 2004, S. 186)

Sowohl in der Klassifizierung von Balacheff (1988) wie in derjenigen von Fischer und Malle (2004) wird der Prozess des Beweisens fokussiert, da jeweils geklärt wird, auf welche Weise ein Beweis erzeugt werden kann. Es wird also danach gefragt, wie ein bestimmter Beweis zustande gekommen ist, und darauf aufbauend die Klassifizierung vorgenommen.

Eine noch stärker kognitionspsychologisch fundierte Klassifizierung ist in der Unterscheidung zwischen *präformalen* und *formalen* Beweisen (Blum und Kirsch 1991) oder in der Klassifizierung von Wittmann und Müller (1988) erkennbar, die im folgenden Abschnitt genauer beleuchtet wird.

### 2.5.3 Drei Beweistypen nach Wittmann und Müller (1988)

Wittmann und Müller (1988) fokussieren in ihrer Klassifikation sowohl den Prozess und die Handlung des Beweisens sowie die Form des fertigen Beweises und die dabei verwendete Repräsentationsform des sich während des Prozesses abspielenden Denkens (vgl. Aebli 1981; Bruner 1974).

Als einfachste Form beschreiben Wittmann und Müller (1988) den *experimentellen* Beweis, der ausgehend von einzelnen Beispielen einen Sachverhalt prüft und auf dessen Verifikation oder Falsifikation abzielt. Allerdings ergibt sich durch dieses Handeln keine abschließende Gewissheit über die Gültigkeit der untersuchten Behauptung, da dieser Anspruch lediglich für die geprüften Beispiele erhoben werden kann. Es kann aber keine Aussage bezüglich der Allgemeingültigkeit getroffen werden. Weil experimentelle

Beweise mit konkreten Beispielen arbeiten, rücken sie formale Aspekte in den Hintergrund. Aus diesem Grund sind sie besonders geeignet für jüngere und weniger leistungsfähige Lernende, die sich mittels eines experimentellen Zugangs systematisch mit einer Behauptung oder Vermutung auseinandersetzen können.

Die experimentellen Beweise von Wittmann und Müller (1988) weisen unübersehbar eine Nähe zu den pragmatischen Beweisen von Balacheff (1988) auf und arbeiten an Beispielen. Dabei geht es aber um mehr als nur naives Ausprobieren, sondern vielmehr um „Veranschaulichungen, Plausibilitätsbetrachtungen, empirische Verifikationen und an Beispielen erläuterte Regeln, die bestimmte Aufgabenfelder erschließen“ (Wittmann und Müller 1988, S. 248). Experimentelle Beweise verlangen zwar weder logisches Schlussfolgern noch das formale Formulieren eines Zusammenhangs, bieten deshalb aber wie festgehalten auch keine abschließende Sicherheit bezüglich der Allgemeingültigkeit. Die Unsicherheit in Bezug auf die Frage, ob nicht doch noch ein Gegenbeispiel existieren könnte, das nicht geprüft worden ist oder werden kann, bleibt stets bestehen. Aus diesem Grund gilt ein experimenteller Beweis in der Disziplin auch nicht als Beweis.

Als zweiten Typ nennen Wittmann und Müller (1988) den *inhaltlich-anschaulichen* Beweis. Da diesem Beweistyp immer eine Operation zugrunde liegt, wird er auch als *operativer* Beweis bezeichnet, was seinen Charakter besser umschreibt als die Bezeichnung „inhaltlich-anschaulich“.

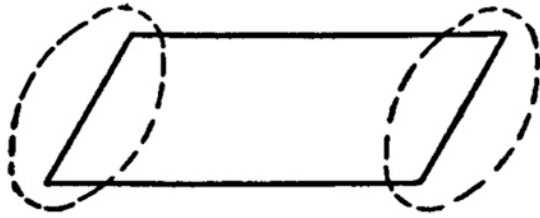
Inhaltlich-anschauliche oder operative Beweise beruhen nicht einzig auf dem Zeigen von plausiblen Beispielen, sondern stützen sich auf „Konstruktionen und Operationen, von denen intuitiv erkennbar ist, dass sie sich auf eine ganze Klasse von Beispielen anwenden lassen und bestimmte Folgerungen nach sich ziehen“ (Wittmann und Müller 1988, S. 249). Für Blum und Kirsch (1989, S. 202) stellen sie „eine Kette von korrekten Schlüssen ..., die auf nicht-formale Prämissen zurückgreifen“, dar. Im Gegensatz zu den experimentellen Beweisen leisten inhaltlich-anschauliche oder operative Beweise eine Verallgemeinerung, wobei diese möglichst intuitiv erkennbar oder „ablesbar“ (vgl. Dunker 1935) sein sollte. Die Prämissen des inhaltlich-anschaulichen Beweises liegen zwar nicht formal vor, müssen den korrekten, formal gefassten Argumenten aber entsprechen.

Inhaltlich-anschauliche oder operative Beweise korrespondieren mit den Handlungsbeweisen von Fischer und Malle (2004) und haben zudem eine lange Tradition. So beschreibt das berühmte Beispiel zur Flächenbestimmung eines Parallelogramms von Wertheimer (1964) einen solchen inhaltlich-anschaulichen oder operativen Beweis. In diesem Beispiel (vgl. Abb. 2.1) berichtet Wertheimer (1964, S. 55ff.) von einem fünfeinhalb-jährigen Mädchen, das bei diesem Problem mit den Worten „Das ist nicht gut hier“ auf die linke Seite (in der Abbildung eingezeichnet) des Parallelogramms zeigt und nach einer Schere verlangt: „Was hier schlecht ist, ist genau, was dort gebraucht wird. Es passt.“

Das Mädchen hat durch seine Überlegung in einem operativen Sinne bewiesen, dass die Fläche eines Parallelogramms gleich groß ist wie die Fläche des entsprechenden Rechtecks, das die gleiche Höhe und die gleiche Länge der Längsseite aufweist wie das Parallelogramm.

Die Stichhaltigkeit eines operativen Beweises ergibt sich grundsätzlich aus der „intuitiven Kohärenz der im Beweis aufgezeigten begrifflichen Beziehungen“ (Wittmann und Müller

**Abb. 2.1** Parallelogramm-  
Problem von Wertheimer  
(1964, S. 56)



1988, S. 253). Gleichwohl ist ein operativer Beweis aber nicht sofort und in jedem Fall für alle anderen verständlich. Er muss deshalb mit der Handlung selbst gezeigt werden. Zudem muss die darin enthaltene Überlegung – weil sie nicht in einer formal konventionellen mathematischen Sprache vorliegt, in die ein operativer Beweis im Prinzip jedoch übertragen werden könnte – versprachlicht werden, um Überzeugungskraft entfalten zu können.

Als dritten Typ nennen Wittmann und Müller (1988) schließlich den *formal-deduktiven* Beweis, der dem wissenschaftlichen Beweis entspricht, der sich formaler Sprache und logischer Schlussfolgerungen bedient. Beim formal-deduktiven Beweis wird jede Aussage in einem logischen Prozess aus einer anderen Aussage abgeleitet. Ziel ist es, den Beweis nicht nur als logische Beweiskette darzustellen, sondern ihn auch in die kürzest mögliche Form zu bringen, was in der Mathematik bedeutet, ihn formal darzustellen. Formal-deduktive Beweise basieren deshalb nicht nur auf der Verwendung einer formalen, algebraischen Sprache, sondern sie verlangen auch ein streng logisches Vorgehen, sodass jede Aussage auf eine andere zurückgeführt werden kann. Aufgrund dieser anspruchsvollen Voraussetzungen ist dieser Beweistyp für Wittmann und Müller (1988, S. 240) im Hinblick auf die „Entwicklung eines für den jeweiligen sozialen Kontext angemessenen Beweisverständnisses“ hinderlich. Formal-deduktive Beweise können zwar als Ziel einer langfristigen Entwicklung betrachtet werden, nicht aber als angemessene Form, um diese Entwicklung einleiten und unterstützen zu können.

Mit der Klassifikation von Wittmann und Müller (1988) und ihrer Ausdifferenzierung von drei grundlegend unterschiedlichen Beweistypen ist eine Grundlage gegeben, die sowohl die Prozess- als auch die Produktebene erfasst und darüber hinaus auch unterschiedliche Repräsentationen des Denkens ausweist, da jedem der drei Beweistypen eine andere Handlungsart, eine andere Zugangsweise, eine andere Art der Darstellung des Denkprozesses und eine andere Sprache zugrunde liegen. Während experimentelle Beweise mit Alltagssprache erarbeitet werden können, beruhen die inhaltlich-anschaulichen oder operativen Beweise auf Begrifflichkeiten, welche die Beziehungen umschreiben. Die formal-deduktiven Beweise verlangen darüber hinaus die Verwendung formal-symbolischer Sprache. Aus diesem Grund kann das Verhältnis der drei Beweistypen als Progression aufgefasst werden: Sowohl der Abstraktionsgrad als auch der Formalisierungsgrad nehmen vom experimentellen Beweis über den inhaltlich-anschaulichen oder operativen Beweis bis hin zum formal-deduktiven Beweis kontinuierlich zu. Konkret bedeutet dies, dass die Notwendigkeit, Alltagssprache durch Fachsprache und Fachtermini zu ergänzen und symbolische Darstellungsweisen zu verwenden, von Beweistyp zu Beweistyp immer grösser wird.

### 2.5.4 Genetisches Beweisen

Beim genetischen Beweisen geht es nicht um eine weitere Klassifikation von Beweistypen, wie sie oben ausgeführt wurden. Vielmehr geht es darum, den Lernprozess beim Beweisen als ausgestalteten Aufbau bzw. als Entwicklung zu beschreiben. Betrachtet man den Beweisprozess bei Expertinnen und Experten, so suchen auch diese für eine (unbewiesene, noch zu beweisende oder zu widerlegende) Behauptung ausgehend von Beispielen nach einem Muster oder einer Struktur, die sie operativ durchschauen zu versuchen, um den erkannten Zusammenhang anschließend formal-symbolisch formulieren zu können.

Die drei Beweistypen von Wittmann und Müller (1988) kann man deshalb in einer Abfolge von drei verschiedenen Phasen oder Stufen auch als Beschreibung eines genetischen Vorgehens interpretieren: Ausgehend vom experimentellen Beweis, der keine Sicherheit bezüglich der Allgemeingültigkeit der untersuchten Behauptung bietet, wird durch den inhaltlich-anschaulichen oder operativen Zugang Einsicht in die Struktur erlangt, die anschließend noch formal-symbolisch ausgedrückt wird. Damit erlangen die drei Beweistypen von Wittmann und Müller (1988) eine besondere Bedeutung, weil sie nicht nur deutlich voneinander unterscheidbare Typen bezeichnen, sondern darüber hinaus die Beschreibung einer Entwicklung von Wissen ermöglichen.

### 2.5.5 Weitere Ansätze

Einen anderen Ansatz verfolgen Reid und Knipping (2010), indem sie auf der Basis der verschiedenen Klassifikationen von Beweisen eine solche für Argumente erarbeiten und sieben verschiedene Kategorien in weitere Unterkategorien ausdifferenzieren, die sie sowohl mit den Ansätzen von Wittmann und Müller (1988) und Blum und Kirsch (1991) wie auch mit demjenigen von Balacheff (1988) verbinden. Im wesentlichen unterscheiden Reid und Knipping (2010, S. 144) zwischen empirischen, generischen, symbolischen und formalen Argumenten sowie entsprechenden Zwischenformen („between empirical and generic“, „between generic and symbolic“, „between symbolic and formal“). Gegenüber dem Ansatz von Wittmann und Müller (1988) nehmen sie damit eine Präzisierung mit verschiedenen Zwischenformen vor und unterteilen den formal-deduktiven Beweis in einen symbolischen Beweis und einen formalen Beweis, jeweils mit entsprechenden Zwischenformen. Insofern unterscheiden sich diese Ansätze nicht grundsätzlich, sondern insbesondere im Präzisierungsgrad.

Ebenfalls eine Ausdifferenzierung findet man im Zusammenhang mit den deutschen Bildungsstandards (Kultusministerkonferenz 2003, 2005) bei Leiss und Blum (2006). Auch sie verweisen auf die unterschiedlichen Repräsentationsmöglichkeiten schließen- den bzw. schlussfolgernden Denkens, indem sie die drei Darstellungsebenen von Bruner (1974) heranziehen, auf denen Repräsentationen möglich sind. Es sind dies 1) die enaktive Ebene, 2) die ikonische Ebene und 3) die symbolische Ebene, die in eine

sprachlich-symbolische und eine formal-symbolische Ebene unterteilt werden kann. Leiss und Blum (2006) legen auf dieser Grundlage fünf unterschiedliche Beweisansätze vor, die sie nicht als Beweistypen bezeichnen, sondern lediglich als Ansätze ausweisen: 1) den paradigmatischen Ansatz, 2) den algebraischen Ansatz, 3) den zeichnerischen Ansatz, 4) den inhaltlichen Ansatz und 5) den iterativen Ansatz.

Diese fünf Ansätze sind nicht immer trennscharf voneinander abgrenzbar und greifen einerseits auf die erwähnten Darstellungsebenen zurück, nennen andererseits aber auch Prinzipien und Vorgehensweisen. Der iterative Ansatz beschreibt die Strategie, nicht aber die Form der Darstellung dieses Prozesses. Der algebraische Ansatz hingegen korrespondiert mit dem formal-deduktiven Beweis. Der zeichnerische, der inhaltliche und der paradigmatische Beweis wiederum beschreiben eine bestimmte Ausgestaltung eines inhaltlich-anschaulichen oder operativen Beweises. Beim paradigmatischen Ansatz soll durch Offenlegen der Strukturen ein Paradigma geschaffen werden, auf das im weiteren Verlauf zurückgegriffen werden kann. Damit steht hier nicht wie bei den anderen beiden Ansätzen – beim algebraischen und beim zeichnerischen – die Form, in welcher ein Beweis vorliegt, im Zentrum, sondern der Prozess bzw. die Handlung, die sich auf das Erarbeiten eines Paradigmas abstützt. Darüber hinaus wird diese Handlung sehr viel weiter definiert, als dies beim iterativen Ansatz der Fall ist, der ebenfalls ein bestimmtes Vorgehen beschreibt. Es handelt sich bei diesen fünf verschiedenen Beweisansätzen um Beschreibungen von unterschiedlichen Merkmalen und nicht um eine eigentliche Systematik.

### 2.5.6 Konkretisierung an einem Beispiel

Am Beispiel einer relativ einfachen Aufgabe aus dem Bereich Zahl und Variable, die auf unterschiedliche Arten bewiesen werden kann, sollen die drei verschiedenen Beweistypen von Wittmann und Müller (1988) nun konkretisiert werden (Details findet man bei Brunner 2013). Gleichzeitig wird in dieser Konkretisierung auch eine Umsetzung des genetischen Beweises erkennbar.

Die Aufgabe lautet wie folgt: „Die Summe  $13 + 15 + 17 + 19$  ist durch 8 teilbar. Gilt dies für jede Summe von vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen?“

In einem ersten Schritt werden zur Klärung dieser Frage einige Beispiele erzeugt und überprüft, ob sich dieses Muster auch bei weiteren Zahlenbeispielen zeigt oder ob es nur gerade für das im Aufgabentext enthaltene gilt:

$7 + 9 + 11 + 13 = 40$	$40 : 8 = 5$	Also gilt: $8 \mid 40$
$21 + 23 + 25 + 27 = 96$	$96 : 8 = 12$	Also gilt: $8 \mid 96$
$431 + 433 + 435 + 437 = 1736$	$1736 : 8 = 217$	Also gilt: $8 \mid 1736$

Damit liegt nun ein experimenteller Beweis vor. Doch selbst wenn noch weitere Beispiele generiert würden, bliebe der Beweis stets an die geprüften und für korrekt befundenen

**Abb. 2.2** Inhaltlich-  
anschaulicher/operativer Beweis

$$\begin{array}{r}
 13 + 15 + 17 + 19 = 64 \\
 +2 \downarrow +2 \downarrow +2 \downarrow +2 \downarrow +8 \downarrow \\
 15 + 17 + 19 + 21 = 72
 \end{array}$$

Beispiele gebunden. Die Gewissheit, dass tatsächlich jede Summe aus vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen durch 8 teilbar ist, fehlt, weil nicht alle möglichen Zahlenbeispiele durchgerechnet werden können und deshalb nicht völlig ausgeschlossen werden kann, dass nicht doch ein Beispiel existieren könnte, für das der behauptete Zusammenhang nicht gilt.

Wird hingegen vom Aufgabenbeispiel ausgehend systematisch nach dem Aufbau der Struktur gesucht und versucht, die Allgemeingültigkeit zu klären, liegt ein operativer Beweis vor. Das ist beispielsweise in Abb. 2.2 der Fall.

Ausgehend von einem ersten Beispiel, anhand dessen das erzeugte Muster der Summe von vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen auf seine Teilbarkeit durch 8 hin geprüft und die Behauptung für dieses Beispiel verifiziert wird, wird anschließend an einem weiteren Beispiel untersucht, wie sich die Muster der beiden Summen zueinander verhalten. Dabei wird festgestellt, dass zwischen dem ersten Summanden der ersten Summe und dem ersten Summanden der zweiten Summe die Differenz von 2 besteht. Dies gilt für jeden der vier Summanden. Insgesamt ergibt sich zwischen jedem der vier Summanden der ersten Summe und dem entsprechenden Summanden der zweiten Summe jeweils eine Differenz von 2. Die Summe der Differenzen ergibt 8. Und 8 ist teilbar durch 8. Auf diese Weise kann gezeigt werden, dass, wenn die erste Summe durch 8 teilbar ist, jede weitere Summe des gleichen Musters ebenfalls durch 8 teilbar sein *muss*, und zwar *notwendigerweise*. Die Struktur des Musters ist offengelegt, Einsicht in den Zusammenhang zwischen der ersten und jeder weiteren Summe von vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen ist erlangt, womit ein operativer Beweis erzeugt worden ist.

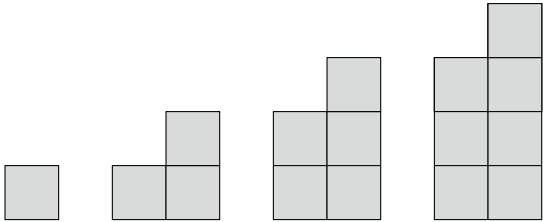
Im in Abb. 2.2 aufgeführten Beispiel wird das Denken mittels Markierungen anschaulich gemacht; Leiss und Blum (2006) würden von einem Paradigma sprechen. Eine formal-symbolische algebraische Notation hingegen ist nicht gegeben. Gleichwohl konnte mithilfe des inhaltlich-anschaulichen Vorgehens ein Beweis erzeugt werden, der Einsicht in die untersuchte Struktur ermöglicht. Zudem handelt es sich um ein iteratives Vorgehen, weil gezeigt wird, dass eine Behauptung notwendigerweise für jedes weitere mögliche Beispiel des gleichen Musters gilt.

Operatives Beweisen kann Denkprozesse aber auch anders repräsentieren, z. B. indem sie auf ikonischer Ebene sichtbar gemacht werden. Im Falle unseres Beispiels zur Teilbarkeit könnte das wie in Abb. 2.3 dargestellt aussehen:

Die ersten vier ungeraden Zahlen aus der Zahlenreihe werden zeichnerisch (oder enaktiv mit entsprechenden Quadraten oder Würfeln) dargestellt. Nun kann durch Verschieben der Quadrate gezeigt werden, dass lauter Achtergruppen von Quadraten erzeugt werden können: Das erste Quadrat ergänzt die sieben Quadrate ganz rechts zu



**Abb. 2.3** Ikonische  
Darstellung der Zahlen 1, 3, 5, 7



einer Achtergruppe und die drei Quadrate der zweiten und die fünf Quadrate der dritten Figur ergeben ebenfalls eine Achtergruppe. Damit wird klar, dass die Gesamtanzahl der Quadrate durch 8 teilbar ist.

In einem zweiten Schritt gilt es nun zu überlegen, was bei der nächsten Summe von vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen geschieht. Dazu wird jeder Summand um 2 zum nächstgrößeren ergänzt. Dadurch entsteht die Summe  $3 + 5 + 7 + 9 = 16$ , die ebenfalls teilbar durch 8 ist. Indem anschaulich gemacht wird, dass bei jedem Summanden zwei Quadrate dazukommen, um den nächstgrößeren Summanden zu erzeugen, und dass die Summe dieser zusätzlichen (in Abb. 2.4 dunkel schattierten) Quadrate stets 8 ist, wird die Struktur des Musters offengelegt, weil ersichtlich wird, dass auch die Summe der zusätzlichen Quadrate durch 8 teilbar ist.

Weil auf diesem Muster aufbauend in der Folge jede weitere Summe von vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen pro Summand um zwei Quadrate ergänzt werden könnte, wird deutlich, dass die Teilbarkeit durch 8 zwingenderweise für jede so strukturierte Summe gilt. Aus diesem Grund handelt es sich auch in diesem Fall um einen operativen Beweis. Dessen Prämissen und die Konklusion liegen zwar nicht in formaler Notation vor, müssten aber – wie bereits erwähnt – grundsätzlich in einem korrekten formalen Argument gefasst werden können. Dass dies der Fall ist, lässt sich leicht mithilfe eines formal deduktiven Beweises zeigen, der das Denken formal-symbolisch in algebraischer Sprache repräsentiert:

Eine ungerade Zahl kann als  $2n \pm 1$  ausgedrückt werden. Das entspricht der ikonischen Darstellung mit den Quadraten. In der ersten Abbildung (vgl. Abb. 2.3) wird die erste ungerade Zahl 1 als  $2n - 1$  dargestellt, in der zweiten (vgl. Abb. 2.4) hingegen als  $2n + 1$ . Zwischen dem ersten und dem nächsten Summanden des Musters beträgt die Differenz 2, weil nur ungerade Zahlen einbezogen werden dürfen. Die Summe von vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen kann deshalb entweder als

---

$$(2n - 1) + (2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) = 8n + 8 \text{ (vgl. Abb. 2.3) oder als}$$

---

$$(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) + (2n + 7) = 8n + 16 \text{ (vgl. Abb. 2.4)}$$

---

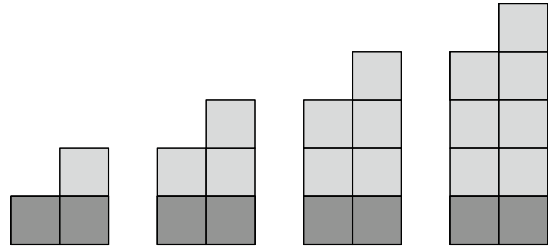
geschrieben werden. In beiden Fällen wird durch Ausklammern von 8 klar, dass diese Summen immer und notwendigerweise durch 8 teilbar sein müssen:

---

$8n + 8 = 8(n + 1)$	$\Rightarrow$	$8 \mid 8n + 8$
$8n + 16 = 8(n + 2)$	$\Rightarrow$	$8 \mid 8n + 16$

---

**Abb. 2.4** Ikonische  
Darstellung der ungeraden  
Zahlen 3, 5, 7, 9



Der Zusammenhang zwischen der Summe des in der Aufgabe formulierten Musters (vier aufeinanderfolgende ungerade Zahlen) und der Teilbarkeit durch 8 wird hier algebraisch formuliert. Dies entspricht den mathematischen Konventionen und hält die Prämissen und die Konklusion des operativen Beweises wie gefordert in formal-symbolischer algebraischer Notation fest.

## Literatur

- Aebli, H. (1981). *Denken. Das Ordnen des Tuns* (Bd. 2). Stuttgart: Klett-Cotta.
- Aigner, M., & Ziegler, G. M. (2002). *Das Buch der Beweise*. Berlin: Springer.
- Balacheff, N. (1988). *Etude des processus de preuve chez des élèves de Collège*. Grenoble: Université Joseph Fournier.
- Bayer, K. (2007). *Argument und Argumentation. Logische Grundlagen der Argumentationsanalyse*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Blum, W., & Kirsch, A. (1989). Warum haben nicht-triviale Lösungen von  $f' = f$  keine Nullstellen? Beobachtungen und Bemerkungen zum inhaltlich-anschaulichen Beweisen. In H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.), *Anschauliches Beweisen* (S. 199–209). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.
- Blum, W., & Kirsch, A. (1991). Preformal proving: Examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 183–203.
- Bruner, J. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin: Cornelsen.
- Brunner, E. (2013). *Innermathematisches Beweisen und Argumentieren in der Sekundarstufe I*. Münster: Waxmann.
- De Villiers, M. (1990). The role and the function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17–24.
- Dewey, J. (2002). *Wie wir denken*. Zürich: Pestalozzianum.
- Duncker, K. (1935). *Zur Psychologie des produktiven Denkens*. Berlin: Springer.
- Durand-Guerrier, V. (2008). Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM Mathematics Education*, 40, 373–384.
- Euklid (2003). *Die Elemente* (4. Aufl.). Frankfurt a.M.: Harri Deutsch.
- Fischer, H., & Malle, G. (2004). *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln* (Nachdruck). Wien: Profil.
- Freudenthal, H. (1977). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 1 & 2). Stuttgart: Klett.
- Hanna, G. (1997). The ongoing value of proof. *Journal für Mathematikdidaktik*, 18(2/3), 171–185.
- Hanna, G. (2005). A brief overview of proof, explanation, exploration and modelling. In H. W. Henn & G. Kaiser (Hrsg.), *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation. Festschrift für Werner Blum* (S. 139–151). Hildesheim: Franzbecker.

- Hanna, G., & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM Mathematics Education*, 40, 345–353.
- Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Wien: Springer.
- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 389–399.
- Jahnke, H. N. (2008). Theorems that admit exceptions, including a remark on Toulmin. *ZDM Mathematics Education*, 40, 363–371.
- Jahnke, H. N. (2010). Zur Genese des Beweisens. In A. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.), *Beiträge zur Mathematikdidaktik. Vorträge auf der 44. Tagung für Didaktik der Mathematik, 8.–12.3.2010 in München* (S. 51–59). Münster: WTM.
- Kultursministerkonferenz (KMK). (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003*. München: Luchterhand.
- Kultusministerkonferenz (KMK). (2005). *Bildungsstandards der Kultursministerkonferenz. Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung*. München: Luchterhand.
- Lakatos, I. (1979). *Beweise und Widerlegungen*. Braunschweig: Vieweg.
- Leiss, D., & Blum, W. (2006). Beschreibung zentraler mathematischer Kompetenzen. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen* (S. 33–50). Berlin: Cornelsen.
- Meyer, M. (2007). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht: von der Abduktion zum Argument*. Hildesheim: Franzbecker.
- Poincaré, H. (1914). *Wissenschaft und Hypothese* (3. Aufl.). Leipzig: Teubner.
- Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens*. Bern: Francke.
- Pólya, G. (1995). *Schule des Denkens* (4. Aufl.). Bern: Francke.
- Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, 7(1), 5–41.
- Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education. Research, learning and teaching*. Rotterdam: Sense Publisher.
- Schwarz, B. B. (2009). Argumentation and learning. In N. Muller Mirza & A.-N. Perret-Clermont (Hrsg.), *Argumentation and education* (S. 91–126). New York: Springer.
- Schwarz, B. B., Hershkowitz, R., & Prusak, N. (2010). Argumentation and mathematics. In K. Littleton & C. Howe (Hrsg.), *Educational dialogues: Understanding and promoting productive interaction* (S. 115–141). Oxon: Routledge.
- Wartha, S., & Wittmann, G. (2009). Lernschwierigkeiten im Bereich der Bruchrechnung und des Bruchzahlbegriffs. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S. 73–108). Weinheim: Beltz.
- Wertheimer, M. (1964). *Produktives Denken* (2. Aufl.). Frankfurt a.M.: Kramer.
- Winter, H. (1991). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik* (2. verb. Aufl.). Braunschweig: Vieweg.
- Wittmann, E. C., & Müller, N. G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237–258). Berlin: Cornelsen.

Mathematisches Argumentieren, Begründen und  
Beweisen

Grundlagen, Befunde und Konzepte

Brunner, E.

2014, XII, 126 S. 40 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-41863-1