2 Die natürlichen Zahlen

2.A Vollständige Induktion

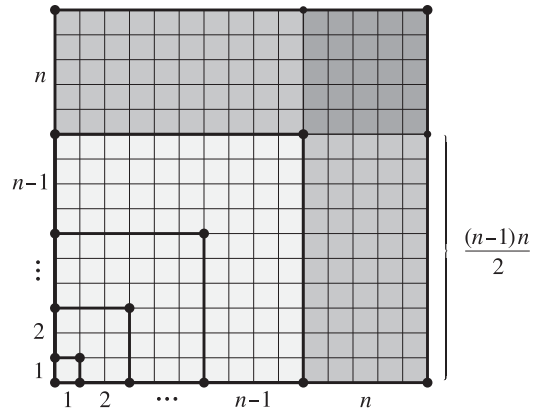
Aufgabe 1 (2.A, Teil von Aufg. 1) *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Lösung *Induktionsanfang*: Für $n = 0$ steht auf der linken Seite die leere Summe $\sum_{k=1}^{0} k^3$, also 0. Dies ist auch der Wert der rechten Seite für $n = 0$. (Für $n = 1$ ist die Aussage ebenfalls trivialerweise richtig, da die linke Seite $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3$ und die rechte Seite $\left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2}\right)^2$ beide gleich 1 sind.)

Induktionsschluss (von $n-1$ auf $n \geq 1$): Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2$. Daraus ergibt sich die Induktionsbehauptung, d.h. die Aussage mit n statt $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^3 + \sum_{k=0}^{n-1} k^3 = n^3 + \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 = n^2\left(n + \frac{(n-1)^2}{4}\right) = n^2\,\frac{(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \quad \bullet$$

Bemerkungen (1) Man beachte, dass $\frac{n(n+1)}{2}$ die Summe $\sum_{k=1}^{n} k$ der ersten n positiven natürlichen Zahlen ist, vgl. Beispiel 2.A.2. Es ist also $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$. Dies ergibt sich wegen $2 \cdot n \cdot \frac{(n-1)n}{2} + n^2 = n^3$ auch direkt aus folgendem Bild:



(2) Man kann die Formel aus der Aufgabe auch folgendermaßen gewinnen: Zunächst berechnet man $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Dazu summiert man beide Seiten der Identität $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ von $k = 1$ bis $k = n$ und erhält nach Subtraktion von $2^3 + \cdots + n^3$ die Gleichung

$$(n+1)^3 = 1 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

U. Storch, H. Wiebe, *Arbeitsbuch zur Analysis einer Veränderlichen,*
DOI 10.1007/978-3-642-45049-5_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014

Dann summiert man analog beide Seiten der Identität $(k+1)^4 = k^4+4k^3+6k^2+4k+1$ von $k=1$ bis $k=n$, lässt die vierten Potenzen $2^4, 3^4, \ldots, n^4$ weg und bekommt

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4 = \sum_{k=1}^{n}k^4 + 4\sum_{k=1}^{n}k^3 + 6\sum_{k=1}^{n}k^2 + 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}k^4 + 4\sum_{k=1}^{n}k^3 + \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4n(n+1)}{2} + n\ ,$$

$$(n+1)^4 = 1 + 4\sum_{k=1}^{n}k^3 + n(n+1)(2n+3) + n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3 = \frac{1}{4}\big((n+1)^4 - n(n+1)(2n+3) - (n+1)\big) = \frac{1}{4}\big((n+1)^4 - (n+1)^2(2n+1)\big)$$

$$= \frac{(n+1)^2\big((n+1)^2 - (2n+1)\big)}{4} = \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2 . \qquad \bullet$$

Dieses Verfahren systematisch durchgeführt, liefert Formeln für alle Summen $\sum_{k=1}^{n}k^m$, $m\in\mathbb{N}^*$, was in Beispiel 12.C.8 (3) kurz vor Beispiel 12.C.10 beschrieben ist.

Aufgabe 2 (2.A, Aufg. 2d)) *Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt* $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n}{3}(2n-1)(2n+1) = \frac{n}{3}(4n^2-1)$.

Lösung: *Induktionsanfang*: Für $n=0$ ist die Aussage richtig, da $\sum_{k=1}^{0}(2k-1)^2$ die leere Summe, also gleich 0 ist, und die rechte Seite ebenfalls 0 ist. Natürlich prüft man auch leicht, dass die Gleichung für $n=1$ stimmt. – *Induktionsschluss* (von n auf $n+1$): Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n}{3}(2n-1)(2n+1)$. Daraus ergibt sich die Induktionsbehauptung, d.h. die Aussage mit $n+1$ statt n. Man erhält nämlich

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2\Big) + (2n+1)^2 = \frac{n}{3}(2n-1)(2n+1) + (2n+1)^2$$

$$= \frac{1}{3}(2n+1)\big(n(2n-1) + 3(2n+1)\big) = \frac{1}{3}(2n+1)(2n^2+5n+3)$$

$$= \frac{n+1}{3}\big(2(n+1)-1\big)\big(2(n+1)+1\big) .$$

Mit Bemerkung (2) zu Aufgabe 1 erhält man direkt $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = 4\sum_{k=1}^{n}k^2 - 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1 =$ $\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$. $\bullet$

Analog löse man:

‡**Aufgabe 3** (2.A, Aufg. 2e)) *Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt* $\sum_{k=1}^{n}k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

Aufgabe 4 (2.A, Aufg. 3a)) *Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt* $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Lösung *Induktionsanfang*: Für $n=0$ gilt die Aussage trivialerweise (ebenso für $n=1$) .

Induktionsschluss (von n auf $n+1$): Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Daraus ergibt sich die Induktionsbehauptung, d.h. die Aussage mit $n+1$ statt n. Es ist nämlich

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + 1 - \frac{1}{n+1}$$
$$= 1 - \frac{(n+2)-1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}\,. \qquad \bullet$$

Aufgabe 5 *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}$.

Lösung *Induktionsanfang*: Für $n=0$ gilt die Aussage trivialerweise (ebenso für $n=1$).
Induktionsschluss (von n auf $n+1$): Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}\,.$$

Daraus ergibt sich die Induktionsbehauptung, d.h. die Aussage mit $n+1$ statt n, wegen

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{(3(n+1)-2)(3(n+1)+1)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$$
$$= \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} + \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{(3n+1)}\cdot\frac{1+(3n+4)\,n}{3n+4}$$
$$= \frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{(3n+1)(n+1)}{(3n+1)\big(3(n+1)+1\big)} = \frac{n+1}{3(n+1)+1}\,. \qquad \bullet$$

Man kann die Formel auch durch eine so genannte Partialbruchzerlegung gewinnen, indem man rationale Zahlen a, b mit $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{a}{3k-2} + \frac{b}{3k+1} = \frac{(3a+3b)k + a - 2b}{(3k-2)(3k+1)}$ bestimmt. Dies gilt sicher für alle k, wenn die Bedingungen $3a+3b=0$ und $a-2b=1$ erfüllt sind. Die erste dieser Gleichungen liefert $b=-a$; eingesetzt in die zweite ergibt das $a+2a=1$, d. h. $a=\frac{1}{3}$ und $b=-\frac{1}{3}$. Nun verwendet man einen so genannten Teleskoptrick, d.h. die Tatsache, dass sich die meisten Summanden wegheben in der Summe

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\Big) =$$
$$\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{3n-5} - \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\Big) = \frac{1}{3}\Big(1 - \frac{1}{3n+1}\Big) = \frac{n}{3n+1}. \qquad \bullet$$

Aufgabe 6 (2.A, Aufg. 4a)) *Für alle* $n \geq 1$ *gilt* $\prod\limits_{k=2}^{n}\Big(1-\frac{1}{k^2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)$.

Lösung *Induktionsanfang*: Für $n=1$ ist die Aussage richtig, da das leere Produkt $\prod\limits_{k=2}^{1}\Big(1-\frac{1}{k^2}\Big)$ und die rechte Seite $\frac{1}{2}\big(1+\frac{1}{1}\big)$ beide gleich 1 sind. – *Induktionsschluss* (von n auf $n+1$): Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\prod\limits_{k=2}^{n}\Big(1-\frac{1}{k^2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)$. Daraus ergibt sich die Induktionsbehauptung, d.h. die Aussage mit $n+1$ statt n, wegen

$$\prod_{k=2}^{n+1}\Big(1-\frac{1}{k^2}\Big) = \Big(1-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)\prod_{k=2}^{n}\Big(1-\frac{1}{k^2}\Big) = \Big(1-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)\,\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)$$
$$= \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\cdot\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{n+1}\Big). \qquad \bullet$$

Analog beweise man die folgenden beiden Formeln:

‡**Aufgabe 7** (2.A, Aufg. 4b)) *Für alle* $n \geq 1$ *ist* $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right)$.

‡**Aufgabe 8** (2.A, Aufg. 4c)) *Für alle* $n \geq 1$ *gilt* $\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

Aufgabe 9 (2.A, Aufg. 5a)) *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und alle* $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, *gilt* $\prod_{k=0}^{n}\left(q^{2^k}+1\right)=\frac{q^{2^{n+1}}-1}{q-1}$.

Lösung Wir verwenden Induktion über n. Bei $n=0$ ergibt sich in der Tat $q^{2^0}+1=q+1=(q^2-1)/(q-1)$. Beim Schluss von n auf $n+1$ erhält man

$$\prod_{k=0}^{n+1}\left(q^{2^k}+1\right)=\left(q^{2^{n+1}}+1\right)\prod_{k=0}^{n}\left(q^{2^k}+1\right)=\left(q^{2^{n+1}}+1\right)\cdot\frac{q^{2^{n+1}}-1}{q-1}=\frac{q^{2^{n+2}}-1}{q-1}. \qquad \bullet$$

Aufgabe 10 (2.A, Aufg. 6f)) *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *ist* 3 *ein Teiler von* $2^{2n}-1=4^n-1$ (*d.h. es gibt ein* $a \in \mathbb{Z}$ *mit* $4^n-1=3a$).

Lösung Wir verwenden Induktion über n. Bei $n=0$ ist in der Tat $4^0-1=0$ durch 3 teilbar. Beim Schluss von n auf $n+1$ können wir voraussetzen, dass es ein $a \in \mathbb{Z}$ gibt mit $4^n-1=3a$. Dann ist aber $4^{n+1}-1=4^{n+1}-4^n+4^n-1=(4-1)4^n+3a=3(4^n+a)$ ebenfalls durch 3 teilbar. (Man hätte auch direkt mit der geometrischen Reihe schließen können: $4^n-1=(4-1)(4^{n-1}+4^{n-2}+\cdots+4+1)$. *Für alle* $g \in \mathbb{Z}$ *und alle* $n \in \mathbb{N}$ *ist* g^n-1 *durch* $g-1$ *teilbar.*) $\bullet$

Aufgabe 11 *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *ist* 6 *ein Teiler von* n^3+5n.

Lösung Wir verwenden Induktion über n. *Induktionsanfang*: Für $n=0$ ist $n^3+5n=0^3+5\cdot 0=0$ durch 6 teilbar. – *Induktionsschluss* (von n auf $n+1$): Nach Induktionsvoraussetzung ist n^3+5n durch 6 teilbar, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n^3+5n=6k$. Daraus ergibt sich die Induktionsbehauptung: Der Ausdruck $(n+1)^3+5(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+5n+5=n^3+5n+3n^2+3n+6=6(k+1)+3n(n+1)$ für $n+1$ statt n ist nämlich auch durch 6 teilbar, da von den beiden aufeinanderfolgenden Zahlen n und $n+1$ eine noch durch 2 teilbar ist. $\bullet$

Aufgabe 12 *Die Folge* (a_n) *sei rekursiv durch* $a_0=0$, $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$, $n \geq 2$, *definiert. Dann gilt* $a_n=\frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Lösung Die Formel gilt sowohl für $n=0$ als auch für $n=1$: Es ist $\frac{1}{3}\left(2^0-(-1)^0\right)=\frac{1}{3}(1-1)=0=a_0$ und $\frac{1}{3}\left(2^1-(-1)^1\right)=1=a_1$. – Sei nun $n \geq 2$, und die Formel gelte für alle $m<n$. Dann ist $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}=\frac{1}{3}\left(2^{n-1}-(-1)^{n-1}\right)+\frac{2}{3}\left(2^{n-2}-(-1)^{n-2}\right)=\frac{1}{3}2^n-\frac{1}{3}(-1)^n$. $\bullet$

In gleicher Weise zeige man:

‡**Aufgabe 13** *Die Folge* (a_n) *sei rekursiv durch* $a_0=0$, $a_1=1$, $a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$, $n \geq 2$, *definiert. Dann ist* $a_n=\left((1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\right)/2\sqrt{2}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung In 12.C, Aufg. 5a) wird ein systematisches Verfahren beschrieben, um lineare Rekursionen zweiter Ordnung wie in den Aufgaben 12 und 13 zu lösen (ohne die Formel schon zu kennen).

2.B Endliche Mengen

Aufgabe 1 (2.B, Aufg. 1c)) *Man zeige* $3^n \le (n+1)!$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1, 2, 3$.

Lösung Offenbar ist $3^0 = 1 \le (0+1)! = 1$. *Induktionsanfang* (bei $n = 4$): Für $n = 4$ ist $3^4 = 81 \le 120 = (4+1)!$ richtig. – Beim *Induktionsschluss* von n auf $n+1$ liefert die Induktionsvoraussetzung $3^n \le (n+1)!$. Daraus folgt die Induktionsbehauptung: Für $n \ge 4$ (sogar für alle $n \ge 1$) ist nämlich $3 \le n+2$ und somit $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \le 3 \cdot (n+1)! \le (n+2) \cdot (n+1)! = (n+2)!$. •

Bemerkung Der Induktionsschluss von n auf $n+1$ ist hier bereits für $n \ge 1$ möglich. Dies zeigt, wie wichtig das Prüfen des Induktionsanfangs ist. Für $n = 1, 2, 3$ gilt die Ungleichung der Aufgabe nicht.

Aufgabe 2 (2.B, Aufg. 2b)) *Man begründe für* $n \in \mathbb{N}$ *die Formel*

$$\binom{-1/2}{n} = (-1)^n \, \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} = \left(\frac{-1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}.$$

Lösung Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}\binom{\frac{-1}{2}}{n} &= \frac{(\frac{-1}{2}) \cdot (\frac{-1}{2} - 1) \cdots (\frac{-1}{2} - n + 1)}{1 \cdot 2 \cdots n} = \frac{(\frac{-1}{2}) \cdot (\frac{-3}{2}) \cdots (\frac{-2n+1}{2})}{1 \cdot 2 \cdots n} = \frac{(-1)^n}{2^n} \, \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n} \\ &= (-1)^n \, \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} = (-1)^n \, \frac{(2n)!}{(2 \cdot 4 \cdots (2n))^2} = \left(\frac{-1}{4}\right)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \left(\frac{-1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}. \bullet\end{aligned}$$

‡**Aufgabe 3** (2.B, Aufg. 2c)) *Für* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\binom{1/2}{n} = \frac{1}{2n} \binom{-1/2}{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \, \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} = \frac{-1}{2n-1} \binom{2n}{n}.$$

Aufgabe 4 (2.B, Aufg. 3b)) *Für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$ (*oder* $\mathbb{C}$) *und* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$n \binom{\alpha}{n} + (n+1) \binom{\alpha}{n+1} = \alpha \binom{\alpha}{n}.$$

Lösung In der Tat ist

$$\begin{aligned}n \binom{\alpha}{n} + (n+1) \binom{\alpha}{n+1} &= n \, \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} + (n+1) \, \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!} \\ &= \left(n + (n+1) \, \frac{\alpha-n}{n+1}\right) \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} = (n + \alpha - n) \binom{\alpha}{n} = \alpha \binom{\alpha}{n}. \quad \bullet\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (2.B, Aufg. 4c)) *Man beweise durch vollständige Induktion über* $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Lösung Für $n < m$ verschwinden beide Seiten der Gleichung. *Wir beginnen* daher *die Induktion* mit $n = m$: Es ist $\sum_{k=m}^{m} \binom{k}{m} = \binom{m}{m} = 1 = \binom{m+1}{m+1}$. – Beim *Induktionsschluss* von n auf $n+1$ können wir die Aussage für n voraussetzen und erhalten damit unter Verwendung der Formel 2.B.9 (4) vom Pascalschen Dreieck die Aussage für $n+1$ statt n:

$$\sum_{k=m}^{n+1} \binom{k}{m} = \left(\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}\right) + \binom{n+1}{m} = \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} = \binom{n+2}{m+1}. \quad \bullet$$

Aufgabe 6 (2.B, Aufg. 4d)) *Man beweise durch vollständige Induktion für alle* $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha}{k} = (-1)^n\binom{\alpha-1}{n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Lösung *Induktionsanfang* ($n=0$): $\sum\limits_{k=0}^{0}(-1)^j\binom{\alpha}{k} = (-1)^0\binom{\alpha}{0} = 1$ und $(-1)^0\binom{\alpha-1}{0} = 1$ sind gleich. Beim *Induktionsschluss* von n auf $n+1$ können wir die Aussage für n voraussetzen und erhalten mit der Formel $\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n+1} = \binom{\alpha}{n+1}$ aus 2.B.9 (4) die Aussage für $n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{\alpha}{k} &= \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha}{k}\right) + (-1)^{n+1}\binom{\alpha}{n+1} = (-1)^n\binom{\alpha-1}{n} + (-1)^{n+1}\binom{\alpha}{n+1}\\ &= (-1)^{n+1}\left(-\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha}{n+1}\right) = (-1)^{n+1}\binom{\alpha-1}{n+1}.\end{aligned}$$

•

Aufgabe 7 (2.B, Aufg. 5a)) *Sei A eine endliche nichtleere Menge. Die Anzahl der Teilmengen von A mit gerader Elementezahl ist gleich der Anzahl der Teilmengen von A mit ungerader Elementezahl.*

Lösung Sei $\mathcal{P}_0$ die Menge der Teilmengen von A mit gerader Elementezahl und $\mathcal{P}_1$ die Menge der Teilmengen von A mit ungerader Elementezahl. Wir fixieren ein Element $a \in A$ und betrachten die Abbildung f der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ von A in sich, die jeder Teilmenge B von A die Menge $B \cup \{a\}$ zuordnet, falls $a \notin A$, und die Menge $B - \{a\}$, falls $a \in A$. Nach Konstruktion ist dann $f \circ f$ die Identität von $\mathcal{P}(A)$ und f insbesondere bijektiv mit $f^{-1} = f$. Dabei ordnet f jedem Element von $\mathcal{P}_0$ eines aus $\mathcal{P}_1$ zu und umgekehrt. Daher definiert f (durch Beschränken des Argumentbereichs) auch eine bijektive Abbildung der Menge $\mathcal{P}_0$ auf die Menge $\mathcal{P}_1$. •

Bemerkung Man kann die Aussage auch so formulieren: Bei endlichem $A \neq \emptyset$ ist $\sum\limits_{H \subseteq A}(-1)^{|H|} = 0$.

Aufgabe 8 (2.B, Aufg. 5b) *Man berechne für* $n \in \mathbb{N}$ *die Summen*

$$\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}, \quad \sum_{m=0}^{n}2^m\binom{n}{m}, \quad \sum_{m=0}^{n}(-2)^{n-m}\binom{n}{m}.$$

Lösung Der Binomische Lehrsatz 2.B.15 liefert für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m} = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}1^{n-m}(-1)^m = \big(1+(-1)\big)^n = 0^n = \begin{cases}0, & \text{falls } n>0,\\ 1, & \text{falls } n=0.\end{cases}$$

(Man beachte, dass dies eine Umformulierung des Ergebnisses von Aufgabe 7 ist.) Analog: $\sum\limits_{m=0}^{n}2^m\binom{n}{m} = (1+2)^n = 3^n$ und $\sum\limits_{m=0}^{n}(-2)^{n-m}\binom{n}{m} = (-2+1)^n = (-1)^n$. •

Aufgabe 9 (2.B, Aufg. 5d)) *Es ist* $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k} = \dfrac{4^n}{2} = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}$ *für* $n \in \mathbb{N}^*$.

Lösung Nach Aufgabe 7 ist bei $n>0$ die Anzahl $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}$ der Teilmengen einer $2n$-elementigen Menge mit gerader Elementezahl gleich der Anzahl $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}$ der Teilmengen dieser Menge mit ungerader Elementezahl. Insgesamt hat die Potenzmenge einer $2n$-elementigen Menge genau $2^{2n} = 4^n$ Elemente. Jede der beiden Summen ist also gleich der Hälfte davon. •

Aufgabe 10 (2.B, Aufg. 7) *Sei A eine endliche Menge mit n Elementen und B eine Teilmenge von A mit k Elementen. Man zeige, dass die Anzahl der m-elementigen Teilmengen von A, die B umfassen, gleich $\binom{n-k}{m-k}$ ist.*

Lösung Wir suchen die Anzahl derjenigen Teilmengen von A, die B zu einer m-elementigen Teilmenge ergänzen. Es handelt sich also um die Anzahl der $(m-k)$-elementigen Teilmengen der $(n-k)$-elementigen Menge $A-B$. Diese ist aber gleich $\binom{n-k}{m-k}$. •

Aufgabe 11 (2.B, Aufg. 8) *Für natürliche Zahlen m, n mit $m \leq n$ zeige man*

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 2^m \binom{n}{m} .$$

1. Lösung Wir bestimmen die Anzahl der Paare (B, C) von Teilmengen B, C einer n-elementigen Menge A mit $B \subseteq C$ und $|C| = m$ auf zweierlei Weise: Zählen wir einerseits zunächst zu jeder k-elementigen Teilmenge B von A die Anzahl der B umfassenden Teilmengen C von A mit m Elementen, so erhalten wir nach der vorstehenden Aufgabe $\binom{n-k}{m-k}$. Da es $\binom{n}{k}$ solcher Teilmengen B von A gibt und ihre Elementezahl k beliebig zwischen 0 und m variieren kann, erhalten wir so insgesamt $\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$ Möglichkeiten für die Anzahl der Paare (B, C).
Andererseits bestimmen wir zunächst zu jeder m-elementigen Teilmenge C von A die Anzahl 2^m ihrer Teilmengen B und berücksichtigen dann, dass es genau $\binom{n}{m}$ solcher Teilmengen C von A gibt. So erhalten wir insgesamt $2^m\binom{n}{m}$ Möglichkeiten für die Anzahl der Paare (B, C). Da wir beide Male dieselbe Menge abgezählt haben, ergibt sich die obige Formel. •

Bemerkung *Seien S, T endliche Mengen, $R \subseteq S \times T$ und $p : R \to S$ bzw. $q : R \to T$ die natürlichen Projektionen. Dann gilt $|R| = \sum_{s\in S} |p^{-1}(s)| = \sum_{t\in T} |q^{-1}(t)|$.* Dieses in obiger Lösung benutzte Prinzip des doppelten Abzählens liefert viele interessante Anzahlformeln (und ist Modell für verwandte Schlussweisen in anderen Bereichen der Mathematik).

2. Lösung Zunächst gilt

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{(n-k)!}{(m-k)!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,\frac{m!}{k!\,(m-k)!} = \binom{n}{m}\binom{m}{k} .$$

Wegen $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} = (1+1)^m = 2^m$ folgt

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} = 2^m\binom{n}{m} . \qquad \bullet$$

Aufgabe 12 (2.B, Aufg. 9a)) *Für $m, n, k \in \mathbb{N}$ beweise man* $\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}$.

1. Lösung Man zählt die k-elementigen Teilmengen einer Menge $\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$ mit $m+n$ Elementen auf zweierlei Weise ab. Es gibt $\binom{m+n}{k}$ Möglichkeiten aus den vorhandenen $m+n$ Elementen genau k auszuwählen. Berücksichtigt man dabei, ob es sich um Elemente von $\{x_1, \ldots, x_n\}$ bzw. von $\{y_1, \ldots, y_n\}$ handelt, so gibt es für jedes $j \leq k$ zunächst genau $\binom{m}{j}$ Möglichkeiten, j der Elemente $x_1, \ldots, x_m$ auszuwählen, und dann genau $\binom{n}{k-j}$ aus

$\{y_1, \dots, y_n\}$ die restlichen $k-j$ Elemente auszuwählen. Dies sind insgesamt $\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$ Möglichkeiten, womit die angegebene Formel bewiesen ist. •

2. Lösung Wir verwenden vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Die zu beweisende Behauptung über n ist, dass die Formel für *dieses* n und *jede* Wahl von $m, k \in \mathbb{N}$ richtig ist. *Induktionsanfang* $n=0$: Die Summe auf der linken Seite hat dann als einzigen Summanden $\neq 0$ den Summanden $\binom{m}{k}\binom{0}{0} = \binom{m}{k}$ für $j = k$. Auf der rechten Seite der Gleichung steht bei $n = 0$ aber ebenfalls $\binom{m+0}{k} = \binom{m}{k}$. – Beim *Schluss von n auf* $n+1$ können wir die zu beweisende Formel für n und alle k, also insbesondere auch für k und $k-1$ voraussetzen, d.h. wir dürfen $\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}$ und $\sum_{j=0}^{k-1} \binom{m}{j}\binom{n}{k-1-j} = \binom{m+n}{k-1}$ benutzen. Verwenden wir noch die Formel $\binom{n+1}{k'} = \binom{n}{k'} + \binom{n}{k'-1}$ vom Pascalschen Dreieck, vgl. 2.B.9 (4), zunächst für $k' := k-j$ und später für $k' = k$, so erhalten wir für $n+1$ statt n

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n+1}{k-j} = \binom{m}{k} + \sum_{j=0}^{k-1}\binom{m}{j}\binom{n+1}{k-j} = \binom{m}{k} + \sum_{j=0}^{k-1}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j} + \sum_{j=0}^{k-1}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j-1}$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j} + \sum_{j=0}^{k-1}\binom{m}{j}\binom{n}{k-1-j} = \binom{m+n}{k} + \binom{m+n}{k-1} = \binom{m+n+1}{k}. \quad \bullet$$

Aufgabe 13 (2.B, Aufg. 9b)) *Für* $n \in \mathbb{N}$ *ist* $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$.

Lösung Wegen der Symmetrie $\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$ des Pascalschen Dreiecks, vgl. Bemerkung 2.B.10 (3), ist dies der Spezialfall $m = k = n$ von Aufgabe 12. •

Aufgabe 14 (2.B, Aufg. 10a)) *Sei V ein Verein mit n Mitgliedern. Die Anzahl der Möglichkeiten, einen Vorstand aus m Vereinsmitgliedern und daraus einen* 1., 2., . . . , *k-ten Vorsitzenden zu wählen, ist* $\binom{n}{m} \cdot [m]_k$.

Lösung Es gibt zunächst $\binom{n}{m}$ Möglichkeiten für die Auswahl des m-elementigen Vorstands, sodann m Möglichkeiten für die Auswahl des 1. Vorsitzenden aus der Mitte dieses Vorstands, dann noch $m-1$ Möglichkeiten für die Auswahl des 2. Vorsitzenden aus den restlichen Vorstandsmitgliedern usw., schließlich noch $m-k+1$ Möglichkeiten den k-ten Vorsitzenden auszuwählen. Dies ergibt $m(m-1)\cdots(m-k+1) = [m]_k$ Möglichkeiten, eine Folge von k Personen als 1., 2., . . . , k-te Vorsitzende zu bestimmen. Insgesamt hat man so $\binom{n}{m} \cdot [m]_k$ Möglichkeiten. Bei $k \le m \le n$ ist $\binom{n}{m} \cdot [m]_k = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \cdot \frac{m!}{(m-k)!} = \frac{n!}{(n-m)!\,(m-k)!}$. •

Aufgabe 15 (2.B, Aufg. 10b)) *Sei V ein Verein mit n Mitgliedern. Die Anzahl der Möglichkeiten, einen* 1., 2., . . . , *k-ten Vorsitzenden zu wählen und die Menge dieser Vorsitzenden zu einem Vorstand mit einer Mitgliederzahl* $\le n$ *zu ergänzen, ist* $[n]_k\, 2^{n-k}$.

Lösung Wie in der vorstehenden Aufgabe sieht man, dass es $n(n-1)\cdots(n-k+1) = [n]_k$ Möglichkeiten gibt für die Auswahl der 1., 2., . . . , k-ten Vorsitzenden. Ergänzt man die so ausgewählten k Personen durch weitere der restlichen $n-k$ Personen aus V zu einem Vorstand, so hat man dafür jeweils noch 2^{n-k} Möglichkeiten, insgesamt also $[n]_k\, 2^{n-k}$ Möglichkeiten. •

Mit den Aufgaben 14 und 15 beweise man:

‡**Aufgabe 16** (2.B, Aufg. 11) *Es ist* $\sum_{m=k}^{n} [m]_k \binom{n}{m} = [n]_k \, 2^{n-k}$ *für* $k, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 17 (2.B, Aufg. 4b)) *Man beweise durch vollständige Induktion über n die Formel*

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} \binom{n+k}{k} = 4^n.$$

Lösung *Induktionsanfang*: Für $n = 0$ sind beide Seiten der zu beweisenden Formel gleich 1.

Beim *Induktionsschluss* von n auf $n+1$ verwenden wir neben der Aussage für n und der Formel 2.B.9 (4) vom Pascalschen Dreieck auch

$$\binom{2n+1}{n+1} = \frac{(2n+1)\cdots(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)\cdots(n+2)}{(n+1)!} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}.$$

Mit Hilfe eines Indexwechsels erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} 2^{n+1-k}\binom{n+1+k}{k} &= \sum_{k=0}^{n} 2^{n+1-k}\binom{n+1+k}{k} + \binom{2n+2}{n+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} 2^{n+1-k}\binom{n+k}{k} + \sum_{k=1}^{n} 2^{n+1-k}\binom{n+k}{k-1} + \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} \\
&= 2\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}\binom{n+k}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k}\binom{n+1+k}{k} + \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} \\
&= 2\cdot 4^n + \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}\binom{n+1+k}{k} + \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1} = 2\cdot 4^n + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+1} 2^{n+1-k}\binom{n+1+k}{k},
\end{aligned}$$

also $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+1} 2^{n+1-k}\binom{n+1+k}{k} = 2\cdot 4^n$ und somit $\sum_{k=0}^{n+1} 2^{n+1-k}\binom{n+1+k}{k} = 4^{n+1}$. •

Bemerkung Kombinatorische Beweise dieser Formel liefern die nächste Aufgabe und auch Bemerkung (2) zu 7.A, Aufgabe 2, wo man sogar eine Verallgemeinerung findet.

Aufgabe 18 (2.B, Aufg. 21)) *Sei* $n \in \mathbb{N}$. *M bezeichne die Menge der mindestens* $(n+1)$*-elementigen Teilmengen einer* $(2n+1)$*-elementigen Menge* $A := \{x_1, \ldots, x_{2n+1}\}$, *und für* $k = 0, \ldots, n$ *sei* $M_k \subseteq M$ *die Menge derjenigen Teilmengen von A, die genau n der Elemente* $x_1, \ldots, x_{n+k}$ *sowie das Element* x_{n+k+1} *enthalten.* (*Außerdem können in den Teilmengen von* M_k *also noch weitere der Elemente* $x_{n+k+2}, \ldots, x_{2n+1}$ *liegen.*) *Man löse die vorstehende Aufgabe noch einmal, indem man die Elemente von* $M = \biguplus_{k=0}^{n} M_k$ *auf zweierlei Weise zählt.*

Lösung M enthält nach Satz 2.B.8 genau $\sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j}$ Elemente. Die Symmetrie des Pascalschen Dreiecks $\binom{2n+1}{j} = \binom{2n+1}{2n+1-j}$ liefert, dass diese Summe gleich $\sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{j}$ ist. Beide Summen zusammen zählen alle Teilmengen von $\{x_1, \ldots, x_{2n+1}\}$ ab, ihre Summe ist also nach Korollar 2.B.2 gleich 2^{2n+1}. Daher ist die Elementezahl von M gleich $2^{2n+1}/2 = 4^n$. Man könnte auch so schließen: Die Anzahl der Teilmengen von A mit $\leq n$ Elementen ist gleich der Anzahl der Teilmengen von A mit $\geq n+1$ Elementen, da die Komplementbildung eine Bijektion liefert.

M_k ist definitionsgemäß die Menge derjenigen Teilmengen von A, die zu M gehören und deren $(n+1)$-tes Element gleich x_{n+k+1} ist. Es ist also $M = \biguplus_{k=0}^{n} M_k$, und eine zur Menge M_k gehörende Teilmenge von A muss genau n der $n+k$ Elemente $x_1, \dots, x_{n+k}$ enthalten. Dafür gibt es $\binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{k}$ Möglichkeiten, ferner enthält ein solche Teilmenge noch das Element x_{n+k+1} sowie eine beliebige Anzahl der $n-k$ Elemente $x_{n+k+2}, \dots, x_{2n+1}$, wofür es 2^{n-k} Möglichkeiten gibt. Die Elementezahl von M_k ist somit $2^{n-k}\binom{n+k}{k}$. Insgesamt ergibt sich so die Gleichung

$$4^n = |M| = \sum_{k=0}^{n} |M_k| = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}\binom{n+k}{k}. \qquad \bullet$$

Aufgabe 19 *Eine Permutation $\iota : X \to X$ einer Menge X heißt eine* Involution *oder eine* Spiegelung, *wenn ι zu sich selbst invers ist, d.h. wenn $\iota = \iota^{-1}$ ist bzw. – äquivalent dazu – wenn $\iota^2 = \mathrm{id}_X$ ist. Die Menge $S = S(\iota) := \{x \in X \mid \iota(x) = x\}$ der Fixpunkte von ι heißt auch der* Spiegel *von ι und ι selbst eine* Spiegelung an S. ($S(\iota)$ darf leer sein! Ist $S(\iota)$ einelementig, spricht man von einer Punktspiegelung.) *Im Folgenden bezeichnet ι eine Spiegelung von X.*

a) *Die Menge $P(\iota) := \big\{\{x, \iota(x)\} \;\big|\; x \in X - S(\iota)\big\}$ ist eine Partition von $X - S(\iota)$ in Zweiermengen. Die Abbildung $\iota \mapsto \big(S(\iota), P(\iota)\big)$ ist eine Bijektion der Menge der Involutionen von X auf die Menge der Paare (S, P), wobei $S \subseteq X$ eine Teilmenge von X ist und P eine Partition von $X - S$ in Zweiermengen.*

b) *Sei X eine endliche Menge. Dann ist $|X| \equiv |S(\iota)| \bmod 2$, d.h. die Anzahl $|X|$ der Elemente von X und die Anzahl $|S(\iota)|$ der Fixpunkte von ι haben dieselbe Parität. Insbesondere hat jede Involution auf einer endlichen Menge mit ungerader Elementezahl (wenigstens) einen Fixpunkt.*

c) *Sei X endlich. Ist $|X| = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, gerade, so ist die Anzahl der fixpunktfreien Involutionen auf X gleich dem Produkt $\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) = (2n)!/2^n n!$ der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen. Ist die Anzahl $|X| = m \in \mathbb{N}$ beliebig, so ist die Anzahl der Involutionen auf X gleich $\sum_{k=0}^{[m/2]} \binom{m}{2k} \frac{(2k)!}{2^k k!}$.*

Lösung a) Für $x \in X - S(\iota)$ ist das Element $\{x, \iota(x)\} \in P(\iota)$ eine Zweiermenge, da x kein Fixpunkt von ι, d.h. $x \neq \iota(x)$ ist. Es bleibt zu zeigen, dass zwei Mengen $\{x, \iota(x)\}, \{y, \iota(y)\} \in P(\iota)$ übereinstimmen oder disjunkt sind. Sei aber $\{x, \iota(x)\} \cap \{y, \iota(y)\} \neq \emptyset$. Ist $x = y$ bzw. $x = \iota(y)$, so ist $\iota(x) = \iota(y)$ bzw. $\iota(x) = \iota(\iota(y)) = y$. Entsprechend ist bei $\iota(x) = y$ bzw. $\iota(x) = \iota(y)$ auch $x = \iota(\iota(x)) = \iota(y)$ bzw. $x = \iota(\iota(x) = \iota(\iota(y)) = y$. In jedem Fall gilt $\{x, \iota(x)\} = \{y, \iota(y)\}$. – Die Umkehrabbildung zu $\iota \mapsto \big(S(\iota), P(\iota)\big)$ ordnet einem Paar (S, P) die Involution $\iota : X \to X$ zu mit $\iota(x) := x$, falls $x \in S$, und $\iota(x) := y$, falls $\{x, y\} \in P$. $\bullet$

b) Sei $|P(\iota)| = k \in \mathbb{N}$. Da alle Elemente von P Zweiermengen sind, ist $|X - S(\iota)| = \big|\biguplus_{A \in P(\iota)} A\big| = 2k$ gerade und $|X| = |S(\iota)| + 2k$, d.h. $|X| \equiv |S(\iota)| \bmod 2$. $\bullet$

c) Sei s_n die Anzahl der fixpunktfreien Involutionen auf einer Menge X mit $2n$ Elementen. Dann gilt die Rekursion $s_{n+1} = (2n+1)s_n$, $n \in \mathbb{N}$, woraus sofort durch Induktion über n die Gleichung $s_n = \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$ folgt. Zum Beweis der Rekursion sei $|X| = 2n+2$ und $a \in X$ fest gewählt. $\mathfrak{I}_b$, $b \in X - \{a\}$, bezeichne die Menge der fixpunktfreien Involutionen ι auf X mit $\iota(a) = b$. Für $\iota \in \mathfrak{I}_b$ ist $\iota(b) = \iota(\iota(a)) = a$, und ι induziert eine fixpunktfreie Involution auf $X - \{a, b\}$. Wegen $|X - \{a, b\}| = 2n$ ist $|\mathfrak{I}_b| = s_n$ für jedes $b \in X - \{a\}$, und die Menge $\biguplus_{b \in X - \{a\}} \mathfrak{I}_b$ aller fixpunktfreien Involutionen auf X besitzt $(2n+1)s_n$ Elemente.

Man kann aber auch direkt schließen: Nach a) entsprechen die fixpunkfreien Involutionen auf einer Menge X mit $2n$ Elementen bijektiv den Partitionen von X in n Zweiermengen. Jeder solchen Partition $P = \{A_1, \dots, A_n\}$ entsprechen die $n!$ Zerlegungen $(A_{i_1}, \dots, A_{i_n})$ von X,

http://www.springer.com/978-3-642-45048-8

Arbeitsbuch zur Analysis einer Veränderlichen
Aufgaben und Lösungen
Storch, U.; Wiebe, H.
2014, VIII, 224 S. 10 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-45048-8