

2. Lineare Differenzengleichungen

1. Ordnung

Eine lineare Differenzengleichung 1. Ordnung hat die Form

$$f_1(k)y_{k+1} + f_0(k)y_k = g(k), \quad k \in S \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (2.1)$$

wobei die Funktionen f_0 und f_1 über der Menge S stets ungleich Null sind.

Dividieren wir die Gleichung (2.1) durch $f_1(k)$, so erhalten wir

$$y_{k+1} + \frac{f_0(k)}{f_1(k)} y_k = \frac{g(k)}{f_1(k)}, \quad k \in S. \quad (2.2)$$

Setzen wir noch $A_k = A(k) = -\frac{f_0(k)}{f_1(k)}$ und $B_k = B(k) = \frac{g(k)}{f_1(k)}$, so lässt sich eine

lineare Differenzengleichung 1. Ordnung schreiben in der Form

$$y_{k+1} - A_k \cdot y_k = B_k, \quad k \in S \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

2.1 Lineare homogene Differenzengleichungen 1. Ordnung

Eine *linear homogene Differenzengleichung 1. Ordnung* hat dann die Gestalt

$$y_{k+1} = A_k \cdot y_k, \quad k \in S. \quad (2.3)$$

Sei die Definitionsmenge $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ und nehme die Funktion y in $k = 0$ einen beliebigen Wert C an, dann lassen sich die Funktionswerte y_k der Lösungsfunktion y von (2.3) schrittweise berechnen:

$$y_1 = A_0 \cdot C$$

$$y_2 = A_1 \cdot y_1$$

$$y_3 = A_2 \cdot y_2$$

.....

$$y_k = A_{k-1} \cdot y_{k-1}$$

$$y_{k+1} = A_k \cdot y_k$$

.....

Durch sukzessive Substitution erhält man die Funktion

$$y_k = A_{k-1} \cdot A_{k-2} \cdot \dots \cdot A_2 \cdot A_1 \cdot A_0 \cdot C = C \cdot \prod_{i=0}^{k-1} A_i, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Sie ist die *allgemeine Lösung* der linear homogenen Differenzengleichung (2.3), denn für jede Wahl des Anfangswertes C führt (2.4) eingesetzt in die Gleichung (2.3) zur Identität.

< 2.1 > Die linear homogene Differenzengleichung 1. Ordnung

$$y_{k+1} = (k+1) \cdot y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

hat die allgemeine Lösung

$$y_k = k(k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot C = C \cdot k!.$$

- a. Soll zusätzlich die Anfangsbedingung $y_0 = 1$ erfüllt werden, so ergibt sich die partikuläre Lösung $y_k = k$.
- b. Soll zusätzlich die Lösungsfunktion y in $k = 5$ den Wert $y_5 = 30$ annehmen, so bestimmt sich die Konstante C aus

$$y_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot C = 30 \quad \text{zu} \quad C = \frac{30}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{4}$$

und die spezielle Lösung, die dieser zusätzlichen Bedingung genügt, ist

$$y_k^* = \frac{1}{4} k!.$$



2.1.1 Linear homogene Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

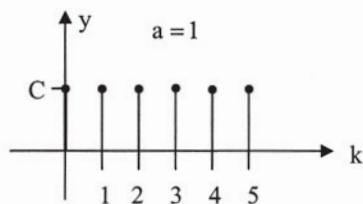
Dies ist der für die praktische Anwendung wichtige Spezialfall von (2.3) mit konstanter Funktion $a_k = a = \text{konstant}$; die Differenzengleichung hat dann die Gestalt

$$y_{k+1} = a \cdot y_k, \quad k \in S = \{0, 1, 2, \dots\} \quad (2.5)$$

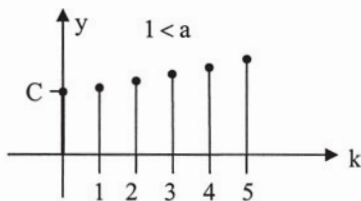
und die allgemeine Lösung vereinfacht sich zu

$$y_k = C \cdot a^k. \quad (2.6)$$

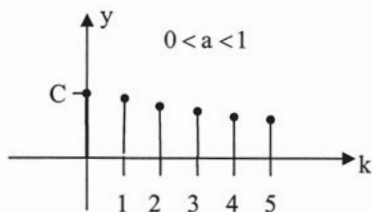
Untersuchen wir den Einfluss des Koeffizienten a auf den Verlauf der abhängigen Variablen y_k , so können wir sechs Bewegungsformen unterscheiden, die wir in Abb. 2.1 veranschaulicht haben. Dabei wird C als positiv angenommen; für negative C ändern sich die wesentlichen Verhaltenseigenschaften der Lösung nicht, die Zeichnungen sind nur an der k -Achse zu spiegeln.



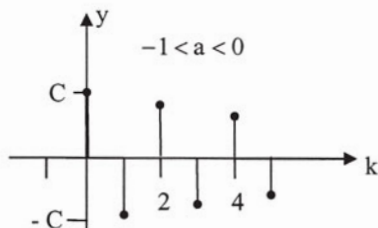
a. Stationärer Verlauf von Ca^k , konstant.



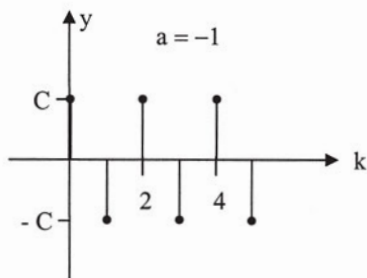
b. Monotones Ansteigen von Ca^k , monoton und divergent



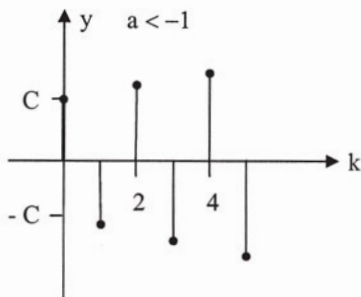
c. Monotones Sinken von Ca^k , monoton und konvergent



d. Gedämpfte Schwingungen von Ca^k , oszillierend und konvergent



e. Gleichförmige Schwingungen von Ca^k , oszillierend mit konstanter Amplitude



f. Zunehmende Schwingungen von Ca^k , oszillierend und divergent

Abb. 2.1: Lösungen $y_k = C \cdot a^k$, $C > 0$ in Abhängigkeit von a

Der Verlauf von y_k hängt im Wesentlichen vom Vorzeichen von a und vom absoluten Betrag von a ab.

Ist a positiv, so ist die Bewegung monoton; ist a negativ, so alternieren die Werte von y_k im Vorzeichen und beschreiben eine oszillierende Bewegung.

Ist der absolute Betrag von a größer (kleiner) als 1, dann ist die Bewegung divergent (konvergent). Ist $|a| = 1$, so bleibt y_k konstant gleich C (wenn $a = 1$) oder oszilliert mit gleich bleibender Amplitude (wenn $a = -1$).

In den Abbildungen 2.1 sind nur die Punkte (k, y_k) von Bedeutung; die "Stiele" dienen nur der besseren Übersicht der Darstellung. Da die Differenzengleichungen über einer diskreten Punktmenge S definiert wurden, suchen wir auch nur *diskrete Lösungsfunktionen* y_k . Es genügt, wenn sie für alle $k \in S$ definiert sind und die Differenzengleichung zur Identität führt.

2.2 Linear inhomogene Differenzengleichungen 1. Ordnung

Eine *linear inhomogene Differenzengleichung 1. Ordnung* lässt sich schreiben in der Form

$$y_{k+1} = A_k \cdot y_k + B_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Nach Satz 1.8 erhalten wir die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Gleichung, wenn wir zu der allgemeinen Lösung der dazugehörigen homogenen Gleichung irgendeine partikuläre Lösung von $\bar{y}_k$ von (2.2) addieren.

Da nach obiger Überlegung

$$y_k = C \cdot \prod_{i=0}^{k-1} A_i \quad (2.4)$$

die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$y_{k+1} = A_k \cdot y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

ist, lässt sich die allgemeine Lösung von (2.2) schreiben als

$$y_k = C \cdot \prod_{i=0}^{k-1} A_i + \bar{y}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Um eine partikuläre Lösung von (2.2) zu finden, wollen wir einen Ansatz von LAGRANGE verwenden, die so genannte *Methode der Variation der Konstanten*:

Die Konstante C in der allgemeinen Lösung (2.4) der zugehörigen homogenen Differenzgleichung wird durch eine Funktion $C_k = C(k)$ ersetzt.

Wir machen somit den Ansatz: $\bar{y}_k = C_k \cdot \prod_{i=0}^{k-1} A_i$.

Eingesetzt in (2.2) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} C_{k+1} \cdot \prod_{i=0}^k A_i &= A_k \cdot C_k \cdot \prod_{i=0}^{k-1} A_i + B_k && \text{oder} \\ (C_{k+1} - C_k) \cdot \prod_{i=0}^k A_i &= B_k && \text{oder} \\ \Delta C_k &= \frac{B_k}{\prod_{i=0}^k A_i}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Beachtet man außerdem, dass – mittels sukzessiver Substitution –

$$\text{aus } \Delta C_0 = C_1 - C_0 \quad \text{folgt} \quad C_1 = C_0 + \Delta C_0,$$

$$\text{aus } \Delta C_1 = C_2 - C_1 \quad \text{folgt} \quad C_2 = C_1 + \Delta C_1 = C_0 + \Delta C_0 + \Delta C_1,$$

.....

$$\text{aus } \Delta C_{k-1} = C_k - C_{k-1} \quad \text{folgt} \quad C_k = C_{k-1} + \Delta C_{k-1} = C_0 + \sum_{m=0}^{k-1} \Delta C_m,$$

dann erkennt man, dass der Ansatz $y_k = C_k \cdot \prod_{i=0}^{k-1} A_i$ nur dann eine Lösung von (2.2) ist, wenn

$$y_k = C_0 + \sum_{m=0}^{k-1} \frac{B_m}{\prod_{i=0}^m A_i}, \quad C_0 \text{ ist eine beliebige Konstante,} \quad (2.9)$$

gewählt wird.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzgleichung (2.2) ist somit gleich

$$y_k = \left(C_0 + \sum_{m=0}^{k-1} \frac{B_m}{\prod_{i=0}^m A_i} \right) \cdot \prod_{i=0}^{k-1} A_i + C_1 \cdot \prod_{i=0}^{k-1} A_i$$

oder – nach Zusammenfassung der Konstanten $C + C_0$ zu C – gleich

$$y_k = \left(C + \sum_{m=0}^{k-1} \frac{B_m}{\prod_{j=0}^m A_j} \right) \cdot \prod_{i=0}^{k-1} A_i, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

$$< 2.2 > \quad y_{k+1} - (k+1)y_k = (k+1)!, \quad k = 0, 1, \dots$$

Hier ist $A_k = k+1$, $B_k = (k+1)!$

$$\prod_{i=0}^{k-1} A_i = k(k-1) \cdots 1 = k!, \quad \prod_{j=0}^k A_j = (k+1)!$$

$$\frac{B_m}{\prod_{j=0}^m A_j} = \frac{(m+1)!}{(m+1)!} = 1, \quad \sum_{m=0}^{k-1} \frac{B_m}{\prod_{j=0}^m A_j} = \sum_{m=0}^{k-1} 1 = k$$

und somit ist nach (2.10) die allgemeine Lösung gleich

$$y_k = (C+k) \cdot k!, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Soll zusätzlich die Lösungsfunktion y_k in $k=3$ den Wert $y_3 = 30$ annehmen, so bestimmt sich die Konstante C aus $y_3 = 30 = (C+3) \cdot 3!$ zu $C = \frac{30}{6} - 3 = 2$ und die spezielle Lösung, die dieser Zusatzbedingung genügt, ist $y_k^* = (2+k) \cdot k!$. ♦

2.2.1 Linear inhomogene Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Dies ist der Spezialfall der inhomogenen Differenzengleichung (2.2) mit konstanter Funktion $A_k = a = \text{konstant}$:

$$y_{k+1} = a y_k + B_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Da $\prod_{i=0}^{k-1} A_i = a^k$ ist, vereinfacht sich die Gestalt der allgemeinen Lösung (2.10) zu

$$y_k = \left(C + \sum_{m=0}^{k-1} \frac{B_m}{a^{m+1}} \right) a^k \quad \text{oder} \quad (2.11)$$

$$y_k = C a^k + \sum_{m=0}^{k-1} B_m a^{k-m-1}. \quad (2.11')$$

$$< 2.3 > \Delta y_k + 2y_k + k + 1 = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Da $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, hat diese lineare Differenzengleichung 1. Ordnung die Normalform

$$y_{k+1} = -y_k - k - 1,$$

$$\text{d. h. } A_k = a = -1 \text{ und } B_k = -(k+1)$$

Die allgemeine Lösung ist nach (2.11') gleich

$$\begin{aligned} y_k &= C(-1)^k + \sum_{m=0}^{k-1} [-(m+1)(-1)^{k-m-1}] \\ &= \begin{cases} C + (1 - 2 + 3 - \dots - k) & \text{für } k \text{ gerade} \\ -C + (-1 + 2 - 3 + \dots - k) & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases} \\ y_k &= \begin{cases} C - \frac{k}{2} & \text{für } k = 2, 4, 6 \\ -C - \frac{k+1}{2} & \text{für } k = 1, 3, 5 \end{cases} \end{aligned}$$

2.2.2 Linear inhomogene Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstanter Inhomogenität

Diese linear inhomogenen Differenzengleichungen haben die Eigenschaft, dass neben $A_k = a$ auch $B_k = b$ eine konstante Funktion ist, die inhomogene Differenzengleichung (2.2) vereinfacht sich dann zu

$$y_{k+1} = a y_k + b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

$$\text{und da } \sum_{m=0}^{k-1} b a^{(k-1)-m} = b \cdot \sum_{j=0}^{k-1} a^j = \begin{cases} b \frac{1-a^k}{1-a} & \text{für } a \neq 1 \\ b \cdot k & \text{für } a = 1 \end{cases},$$

vereinfacht sich die allgemeine Lösung (2.11) zu

$$y_k = \begin{cases} C \cdot a^k + b \frac{1-a^k}{1-a} & \text{für } a \neq 1 \\ C + b k & \text{für } a = 1 \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

$$< 2.4 > y_{k+1} = 2y_k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Hier ist $a = 2$ und $b = 1$; die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung ist nach (2.13) demnach

$$y_k = C \cdot 2^k + 1 \frac{1-2^k}{1-2} = (C+1) \cdot 2^k - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Soll die Lösungsfunktion zusätzlich der Bedingung $y_3 = 15$ genügen, so muss C so gewählt werden, dass gilt

$$15 = (C+1)2^3 - 1 \quad \text{oder} \quad (C+1) = \frac{16}{8} = 2 \quad \text{oder} \quad C = 1.$$

Die gesuchte partikuläre Lösung ist somit

$$y_k^* = 2^{k+1} - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

♦

2.3 Einige Anwendungen von linearen Differenzengleichungen 1. Ordnung

2.3.1 Das Wachstumsmodell von HARROD

Betrachten wir das auf R. F. HARROD [1948] zurückgehende ökonomische Wachstumsmodell in der formalen Darstellung von BAUMOL [1970, S. 37-55, 165f.]:

Bezeichnen wir mit Y_t das Volkseinkommen, mit S_t die (Netto-)Sparsumme und mit I_t die gewünschte Nettoinvestition während der Periode t , so soll gelten:

1. These: $S_t = s \cdot Y_t$

2. These: $I_t = g(Y_t - Y_{t-1})$

Dabei seien sowohl die *Sparrate* s als auch der *Akzelerator* g konstant und positiv.

Im Gleichgewicht muss die realisierte Investition S_t gleich der gewünschten Investition I_t sein und somit

$$s Y_t = g(Y_t - Y_{t-1}) \quad \text{oder}$$

$$Y_t = \frac{-g}{s-g} \cdot Y_{t-1}. \quad (2.14)$$

Die allgemeine Lösung dieser homogenen Differenzengleichung mit dem konstanten Koeffizienten $a = \frac{-g}{s-g} = \frac{g}{g-s} = 1 + \frac{s}{g-s}$ ist nach (2.6)

$$Y_t = C \left(\frac{-g}{s-g} \right)^t = C \left(1 + \frac{s}{g-s} \right)^t. \quad (2.15)$$

Das Volkseinkommen wächst also mit der konstanten Rate $\frac{s}{g-s}$ und, da für $t = 0$ folgt $C = Y_0$, kann die Konstante C als das Volkseinkommen in der Periode 0 interpretiert werden.

Die Entwicklung des Einkommens hängt bei positivem Anfangszustand $Y_0 > 0$ vom Verhältnis zwischen s und g ab:

Fall 1: $g > s$

Dann ist die Wachstumsrate $\frac{s}{g-s}$ positiv und somit $1 + \frac{s}{g-s} > 1$. Das Volkseinkommen ist stets positiv und nimmt monoton zu.

Fall 2: $g < s$

Dann ist stets $1 + \frac{s}{g-s} = \frac{-g}{s-g} < 0$ und der Verlauf des Volkseinkommens ist oszillierend mit stetigem Wechsel zwischen positiven und negativen Werten, und zwar

für $s > 2g$ mit gedämpften Schwingungen ($-1 < \frac{s}{g-s} < 0$),

für $s = 2g$ mit gleich bleibenden Schwingungen ($\frac{s}{g-s} = -1$),

für $s < 2g$ mit zunehmenden Schwingungen ($\frac{s}{g-s} < -1$).

Ökonomisch relevant ist nur der Fall $s > g$, vgl. hierzu z. B. [ROSE 1973, S. 40].

2.3.2 Die nachschüssige Rentenformel

Die *Tilgung* ist eine Form der Schuldenrückzahlung, die sowohl das Kapital als auch die Zinsen umfasst. Sie erfolgt durch Zahlungen in gleich bleibenden Zeitabständen (*Rentenzahlung*).

Nehmen wir an, dass die Verzinsung (Zinseszins) periodengerecht erfolge mit dem Zinssatz i und dass die Zahlungen R , die im Allgemeinen gleich groß sind, stets am Ende jeder Zinsperiode erfolgen. Weiterhin bezeichne K_n die abzutragende Schuld und K_n den geschuldeten Betrag nach der n -ten Zahlung; die Anfangsschuld K_0 ist also gleich K .

Bis zur Fälligkeit der nächsten Zahlung wächst die Schuld K_n um die Zinsen $i \cdot K_n$. Folglich beträgt die Schuld nach der Zahlung am Ende der n -ten Periode

$$K_{n+1} = K_n + i \cdot K_n - R, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ oder}$$

$$K_{n+1} = (1+i)K_n - R, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

Dies ist eine linear inhomogene Differenzengleichung 1. Ordnung mit den konstanten Koeffizienten $a = (1+i)$ und der konstanten Inhomogenität $b = -R$, deren allgemeine Lösung gemäß (2.13) gleich

$$K_n = C(1+i)^n - R \cdot \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} \text{ ist.}$$

Soll zusätzlich die Anfangsbedingung $K_0 = K$ erfüllt werden, so ergibt sich aus $K = K_0 = C \cdot 1 - R \frac{1-1}{-i} = C$ die eindeutige partikuläre Lösung

$$K_n = K(1+i)^n - R \cdot \frac{1-(1+i)^n}{i}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.17)$$

die als *nachschüssige Rentenformel* bekannt ist.

Dabei ist das 1. Glied auf der rechten Seite von (2.17) der Betrag, auf den die Anfangsschuld (bei Zinseszins mit dem Zinssatz i und periodengerechter Verzinsung) nach n Perioden anwächst, während das 2. Glied den Betrag darstellt, auf den die bisher geleisteten n periodischen Zahlungen in der gleichen Zeit anwachsen. Die Differenz dieser beiden Glieder ist die restliche Schuld.

Sind die periodischen Zahlungen nicht gleich groß, dann müssen wir von der Differenzengleichung

$$K_{n+1} = K_n + i \cdot K_n - R_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ausgehen, wobei R_{n+1} die $(n+1)$ -te Zahlung bezeichnet.

Nach (2.11') ist die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Gleichung mit konstanten Koeffizienten $a = (1+i)$ und nichtkonstanter Inhomogenität $B_n = -R_{n+1}$

$$K_n = (1+i)^n \cdot C - \sum_{j=0}^{n-1} R_{j+1} (1+i)^{n-j-1},$$

und die partikuläre Lösung, die der Anfangsbedingung $K_0 = K$ genügt, ist

$$K_n = K(1+i)^n - \sum_{j=1}^n R_j (1+i)^{n-j}, \quad (2.18)$$

die ebenfalls als *nachschüssige Rentenformel* bezeichnet wird.

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler III

Band 3: Differenzengleichungen -

Differentialgleichungen - Wahrscheinlichkeitstheorie -

Stochastische Prozesse

Rommelfanger, H.

2014, XII, 335 S. 15 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-45304-5