

# Inhaltsverzeichnis

|           |                                                                                                               |           |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>A.</b> | <b>Differenzengleichungen und ihre Anwendung in den Wirtschaftswissenschaften</b>                             | <b>1</b>  |
| <b>1.</b> | <b>Grundlegende Definitionen und Aussagen über Differenzengleichungen</b>                                     | <b>3</b>  |
| 1.1       | Der Differenzenoperator                                                                                       | 3         |
| 1.2       | Zweite und höhere Differenzen                                                                                 | 6         |
| 1.3       | Eigenschaften des Differenzenoperators                                                                        | 8         |
| 1.4       | Definition und Klassifikation von Differenzengleichungen                                                      | 10        |
| 1.5       | Der Lösungsbegriff                                                                                            | 14        |
| 1.6       | Grundlegende Eigenschaften der Lösungen linearer Differenzengleichungen                                       | 17        |
| 1.7       | Aufgaben                                                                                                      | 19        |
| <b>2.</b> | <b>Lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung</b>                                                              | <b>20</b> |
| 2.1       | Lineare homogene Differenzengleichungen 1. Ordnung                                                            | 20        |
| 2.1.1     | Linear homogene Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten                                | 21        |
| 2.2       | Linear inhomogene Differenzengleichungen 1. Ordnung                                                           | 23        |
| 2.2.1     | Linear inhomogene Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten                              | 25        |
| 2.2.2     | Linear inhomogene Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstanter Inhomogenität | 26        |
| 2.3       | Einige Anwendungen von linearen Differenzengleichungen 1. Ordnung                                             | 27        |
| 2.3.1     | Das Wachstumsmodell von HARROD                                                                                | 27        |
| 2.3.2     | Die nachschüssige Rentenformel                                                                                | 28        |
| 2.3.3     | Das Spinnwebmodell (Cobwebmodell)                                                                             | 30        |
| 2.3.4     | Ein Modell der Einkommensverteilung                                                                           | 33        |
| 2.3.5     | Geometrisches Wachstum von isolierten Populationen                                                            | 34        |
| 2.3.6     | Logistisches Wachstum von isolierten Populationen                                                             | 35        |
| 2.4       | Aufgaben                                                                                                      | 37        |

|           |                                                                                            |           |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>3.</b> | <b>Lineare Differenzengleichungen 2. Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)</b>            | <b>39</b> |
| 3.1       | Linear homogene Differenzengleichung 2. Ordnung                                            | 39        |
| 3.1.1     | Geometrische Deutung der Parameter von<br>$y_k = A r^k \cos(k \phi + B)$                   | 49        |
| 3.2       | Linear inhomogene Differenzengleichungen 2. Ordnung                                        | 53        |
| 3.3       | Qualitative Analyse der Lösungen<br>Konvergenzverhalten, Gleichgewicht, Stabilität)        | 60        |
| 3.4       | Einige Anwendungen von linearen Differenzengleichungen<br>2. Ordnung                       | 67        |
| 3.4.1     | Das Multiplikator-Akzelerator-Modell von SAMUELSON                                         | 67        |
| 3.4.2     | Das Multiplikatormodell von HICKS                                                          | 70        |
| 3.4.3     | Logistisches Wachstum von isolierten Populationen                                          | 71        |
| 3.4.4     | Die Vermehrung der Kaninchen nach FIBONACCI                                                | 73        |
| 3.5       | Aufgaben                                                                                   | 74        |
| <b>4.</b> | <b>Lineare Differenzengleichungen n-ter Ordnung<br/>(mit konstanten Koeffizienten)</b>     | <b>76</b> |
| 4.1       | Linear homogene Differenzengleichungen n-ter Ordnung                                       | 76        |
| 4.2       | Linear inhomogene Differenzengleichungen n-ter Ordnung                                     | 78        |
| 4.3       | Stabilitätsbedingungen                                                                     | 81        |
| 4.4       | Einige Anwendungen von linearen Differenzengleichungen<br>höherer Ordnung                  | 86        |
| 4.4.1     | Das Multiplikator-Akzelerator-Modell von HICKS mit<br>verteilten induzierten Investitionen | 86        |
| 4.4.2     | Das Lagerungsmodell von METZLER                                                            | 88        |
| 4.5       | Aufgaben                                                                                   | 92        |
| <b>5.</b> | <b>Systeme linearer Differenzengleichungen (mit konstanten Koeffizienten)</b>              | <b>93</b> |
| 5.1       | Homogene Systeme linearer Differenzengleichungen<br>1. Ordnung                             | 96        |
| 5.2       | Inhomogene Systeme linearer Differenzengleichungen<br>1. Ordnung                           | 110       |
| 5.3       | Eliminationsverfahren zu Lösung linearer<br>Differenzengleichungssysteme                   | 113       |

|           |                                                                                    |            |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.4       | Qualitative Analyse der Lösungen                                                   | 115        |
| 5.5       | Einige Anwendungen linearer Differenzgleichungssysteme                             | 118        |
| 5.5.1     | Dynamisches Input-Output-Modell                                                    | 118        |
| 5.5.2     | Wachstum einer Population unter Berücksichtigung des Altersaufbaus                 | 120        |
| 5.6       | Aufgaben                                                                           | 122        |
| <b>B.</b> | <b>Differentialgleichungen und ihre Anwendung in den Wirtschaftswissenschaften</b> | <b>125</b> |
| <b>6.</b> | <b>Grundlegende Definitionen und Aussagen über Differentialgleichungen</b>         | <b>127</b> |
| 6.1       | Der Differentialoperator                                                           | 127        |
| 6.2       | Definition und Klassifikation von Differentialgleichungen                          | 128        |
| 6.3       | Lösungen von Differentialgleichungen                                               | 129        |
| 6.4       | Grundlegende Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichungen           | 133        |
| <b>7.</b> | <b>Differentialgleichungen 1. Ordnung und 1. Grades</b>                            | <b>135</b> |
| 7.1       | Differentialgleichungen der Form $y' = f(x)$                                       | 135        |
| 7.2       | Exakte Differentialgleichungen                                                     | 137        |
| 7.3       | Der integrierende Faktor                                                           | 139        |
| 7.4       | Differentialgleichungen mit getrennten Variablen                                   | 140        |
| 7.5       | Linear homogene Differentialgleichungen 1. Ordnung                                 | 141        |
| 7.6       | Linear inhomogene Differentialgleichungen 1. Ordnung                               | 143        |
| 7.7       | BERNOULLISCHE Differentialgleichungen                                              | 146        |
| 7.8       | Weitere ökonomische Anwendungen von Differentialgleichungen 1. Ordnung             | 148        |
| 7.8.1     | Die Schuldenlast                                                                   | 148        |
| 7.8.2     | Das Preisfestsetzungsmodell von EVANS                                              | 150        |
| 7.9       | Aufgaben                                                                           | 151        |

|            |                                                                                  |     |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>8.</b>  | <b>Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)</b> | 153 |
| 8.1        | Linear homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung                               | 153 |
| 8.2        | Linear inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung                             | 158 |
| 8.3        | Qualitative Analyse der Lösungen                                                 | 162 |
| 8.4        | Einige ökonomische Anwendungen von Differentialgleichungen 2. Ordnung            | 164 |
| 8.4.1      | Das Multiplikatormodell von LITTLER                                              | 164 |
| 8.4.2      | Multiplikator-Akzelerator-Modell von PHILLIPS                                    | 166 |
| 8.5        | Aufgaben                                                                         | 167 |
| <b>9.</b>  | <b>Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung</b>                             | 168 |
| 9.1        | Linear homogene Differentialgleichungen n-ter Ordnung                            | 168 |
| 9.2        | Linear inhomogene Differentialgleichungen n-ter Ordnung                          | 171 |
| 9.3        | Stabilitätskriterien                                                             | 172 |
| 9.4        | Das Stabilisierungsmodell von PHILLIPS für eine geschlossene Volkswirtschaft     | 174 |
| 9.5        | Aufgaben                                                                         | 176 |
| <b>10.</b> | <b>Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten</b>     | 177 |
| 10.1       | Homogene Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung                     | 179 |
| 10.2       | Inhomogene Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung                   | 185 |
| 10.3       | Eliminationsverfahren zur Lösung linearer Differentialgleichungssysteme          | 186 |
| 10.4       | Qualitative Analyse der Lösungen                                                 | 189 |
| 10.5       | Ökonomische Anwendungen von Systemen linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung | 191 |
| 10.5.1     | Das dynamische Input-Output-Modell von LEONTIEF                                  | 191 |
| 10.5.2     | Das Zwei-Sektoren-Wachstumsmodell von SHINKAI                                    | 193 |
| 10.6       | Aufgaben                                                                         | 196 |

|            |                                                                           |     |
|------------|---------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>C.</b>  | <b>Wahrscheinlichkeitstheorie</b>                                         | 199 |
| <b>11.</b> | <b>Zufallsvorgänge, Ereignisse, Algebren</b>                              | 200 |
| 11.1       | Aufgaben                                                                  | 209 |
| <b>12.</b> | <b>Wahrscheinlichkeiten</b>                                               | 210 |
| 12.1       | Definition und Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten                        | 210 |
| 12.1.1     | Statistische Wahrscheinlichkeit                                           | 213 |
| 12.1.2     | LAPLACESche Wahrscheinlichkeit                                            | 213 |
| 12.1.3     | Subjektive Wahrscheinlichkeit                                             | 214 |
| 12.2       | Bedingte Wahrscheinlichkeiten                                             | 215 |
| 12.3       | Aufgaben                                                                  | 222 |
| <b>13.</b> | <b>Zufallsvariablen und ihre Verteilungen</b>                             | 225 |
| 13.1       | Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsverteilung                            | 225 |
| 13.2       | Mehrdimensionale Zufallsvariablen                                         | 235 |
| 13.3       | Verteilungsparameter                                                      | 240 |
| 13.4       | Aufgaben                                                                  | 243 |
| <b>D.</b>  | <b>Stochastische Prozesse</b>                                             | 245 |
| <b>14.</b> | <b>Grundlegende Definitionen und Aussagen über stochastische Prozesse</b> | 247 |
| 14.1       | Klassifikation stochastischer Prozesse                                    | 248 |
| 14.2       | Existenzsatz von KOLMOGOROV                                               | 256 |
| 14.3       | Aufgaben                                                                  | 257 |
| <b>15.</b> | <b>MARKOVsche Prozesse</b>                                                | 258 |
| 15.1       | MARKOV-Ketten und Übergangswahrscheinlichkeiten                           | 258 |
| 15.2       | Klassifikation von Zuständen                                              | 269 |
| 15.3       | Spezielle MARKOV-Prozesse                                                 | 274 |
| 15.3.1     | Geburts- oder Todesprozesse                                               | 275 |
| 15.3.2     | Warteschlangenprozesse                                                    | 278 |
| 15.4       | Aufgaben                                                                  | 280 |

|            |                                                        |     |
|------------|--------------------------------------------------------|-----|
| <b>16.</b> | <b>WIENER-Prozesse</b>                                 | 283 |
| 16.1       | Definition und Eigenschaften des WIENER- Prozesses     | 283 |
| 16.2       | Aktienkurs als BROWNSche Bewegung mit Drift            | 286 |
| 16.3       | Die Optionspreisformel von BLACK und SCHOLES           | 290 |
| 16.3.1     | Optionen                                               | 290 |
| 16.3.2     | Das BLACK-SCHOLES-Modell                               | 296 |
| 16.3.3     | Einfluss der Eingabeparameter auf den Optionswert      | 300 |
|            | <b>Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben</b>           | 302 |
|            | <b>Anhang</b>                                          |     |
|            | <b>Komplexe Zahlen und trigonometrische Funktionen</b> | 318 |
|            | <b>Ausgewählte Literatur</b>                           | 323 |
|            | <b>Sachverzeichnis</b>                                 | 330 |

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler III

Band 3: Differenzengleichungen -

Differentialgleichungen - Wahrscheinlichkeitstheorie -

Stochastische Prozesse

Rommelfanger, H.

2014, XII, 335 S. 15 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-45304-5