

Einleitung

Dieses Buch ist für Leser gedacht, welche mit den Grundzügen der elementaren Funktionentheorie, wie sie üblicherweise in einer einführenden Vorlesung über dieses Gebiet behandelt werden, vertraut sind. Darüberhinaus ist es nützlich, mit der Theorie der elliptischen Funktionen und der elliptischen Modulfunktionen vertraut zu sein. Diese Theorien sind beispielsweise in dem vom Autor und Koautor ROLF BUSAM verfassten Lehrbuch „Funktionentheorie“ —im folgenden mit [FB] zitiert— ausführlich behandelt worden. Viele Verweise werden sich auf dieses Buch beziehen.

Ziel dieses Bandes ist es, eine neue Epoche der klassischen Funktionentheorie darzustellen, welche entscheidend durch RIEMANN geprägt worden ist. Ungefähr die Hälfte dieses Bandes, Kapitel I bis IV, ist der Theorie der *Riemann'schen Flächen* gewidmet.

Die Theorie der RIEMANN'schen Flächen ist eine neue Grundlegung der Funktionentheorie auf höherer Ebene. Gegenstand des Interesses sind analytische Funktionen wie in der elementaren Funktionentheorie. Doch wird der Begriff der analytischen Funktion jetzt allgemeiner gefaßt. Definitionsbereiche analytischer Funktionen sind nun nicht mehr ausschließlich offene Teile der Ebene oder Zahlkugel, sondern allgemeinere Flächen. Solche Funktionen treten automatisch auf, wenn man den gesamten Funktionsverlauf einer a priori mehrdeutigen Funktion wie $f(z) = \sqrt{z^4 + 1}$ durch eine einzige eindeutige Funktion erfassen will. Der natürliche Definitionsbereich dieser Funktion f wird sich als eine zweiblättrige Überlagerung der Zahlkugel erweisen, welche die Gestalt eines Torus hat.

An diesem Beispiel wird andeutungsweise sichtbar, daß man in der Theorie der RIEMANN'schen Flächen mit topologischen Problemen zu kämpfen hat. Der Begriff „Topologie“ taucht hier in zweierlei Bedeutung auf:

Zum ersten ist Topologie in der heutigen mathematischen Welt ein *universelles sprachliches* Mittel, um Fragen der Konvergenz und Stetigkeit in möglichst breitem Rahmen ansprechen zu können. Diesem Zweck dient der Begriff des topologischen Raumes und der daraus abgeleiteten Begriffe wie „offene Menge“, „abgeschlossene Menge“, „Umgebung“, „Stetigkeit“, „Konvergenz“, „Kompaktheit“, um einige wichtige anzusprechen, so wie ja schon die *Mengenlehre* ein allgemeingültiges Verständigungsmittel in der Mathematik darstellt. Da der Leser unseres Buches mittlerweile weitergehende mathematische Erfahrungen gesammelt hat, kann davon ausgegangen werden, daß er mit der Topologie als sprachlichem Mittel vertraut geworden ist. Aus Gründen der Geschlossenheit wurden dennoch in einem einführenden Abschnitt (I.0) die Grundbegriffe dieser Sprache knapp aber vollständig zusammengestellt, wobei auf die einfachen Beweise meist verzichtet wurde.

Ein zweiter Aspekt der Topologie ist, daß sie eine mathematische Disziplin zur Untersuchung nichttrivialer *geometrischer Probleme* darstellt. Es ist beispielsweise ein wichtiger geometrischer Sachverhalt, daß jede kompakte und orientierbare Fläche homöomorph zu einer Kugel mit p Henkeln ist. Die Zahl p ist eine topologische Invariante der Fläche, welche ihren topologischen Typ bestimmt. Dieser Satz spielt in der Theorie der RIEMANN'schen Flächen eine wichtige Rolle. Topologische Sätze von echt mathematischer Substanz werden in diesem Buch vollständig bewiesen. Neben der erwähnten Klassifizierung kompakter orientierbarer Flächen gehört hierzu auch ein Abriss der Überlagerungstheorie, insbesondere die Theorie der universellen Überlagerung.

Die Entwicklung der Topologie hängt übrigens stark damit zusammen, daß sie bei der Theorie der RIEMANN'schen Flächen sowohl als sprachliches Mittel große Vorteile brachte, als auch echte geometrische Probleme in dieser Theorie auftreten.

Einer der Höhepunkte der Theorie der RIEMANN'schen Flächen ist, daß durch sie ein Beweis des *Jacobi'schen Umkehrproblems* ermöglicht wurde und ein tiefes Verständnis für das Umkehrtheorem erreicht wurde. Das Umkehrtheorem wird in diesem Band vollständig bewiesen.

In ähnlicher Weise, wie bei der Umkehrung elliptischer Integrale meromorphe Funktionen mit zwei unabhängigen Perioden auftreten —sogenannte elliptische— Funktionen, treten bei der Umkehrung von Integralen algebraischer Funktionen meromorphe Funktionen von mehreren komplexen Variablen $z_1, \dots, z_p$ auf, welche $2p$ unabhängige Perioden haben. Solche Funktionen nennt man *abelsche Funktionen*.

Das Umkehrtheorem leitet eine neue mathematische Entwicklung ein. Zu seinem Verständnis ist es zwingend erforderlich, den Begriff der meromorphen Funktion mehrerer komplexer Variabler einzuführen, und man benötigt hierzu eine Grundlegung der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlicher. Erst danach kann man den Begriff der *abelschen Funktion* einführen und eine Theorie abelscher Funktionen entwickeln, welche die Theorie der elliptischen Funktionen verallgemeinert. Ein Hauptresultat dieser Theorie wird sein, daß der Körper der abelschen Funktionen endlich erzeugt ist. Er ist ein algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad $m \leq p$. Anders als im Falle $p = 1$ ist der Transzendenzgrad im Falle $p > 1$ nur unter sehr einschränkenden Bedingungen gleich p . Die *Riemann'schen Periodenrelationen* müssen erfüllt sein. Diese Relationen sind für die bei der Umkehrung algebraischer Integrale auftretenden abelschen Funktionen erfüllt. Nicht nur aus diesem Grund ist der Fall $m = p$ der eigentlich interessante.

Beim Studium der *Mannigfaltigkeit* aller Gitter $L \subset \mathbb{C}$ stößt man auf die elliptischen Modulfunktionen. In derselben Weise geben die abelschen Funktionen den Anlaß zu einer Theorie der *Modulfunktionen mehrerer Veränderlicher*. Das letzte Kapitel dieses Buches enthält eine möglichst einfach gehaltene Einführung in diese Theorie.

Dieses Buch ist somit eine Wiederholung von [FB] auf höherer Ebene. Der gewöhnlichen CAUCHY-WEIERSTRASS'schen Funktionentheorie entsprechen die Theorie der RIEMANN'schen Flächen und gewisse Grundelemente der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher. Anstelle der Theorie der elliptischen Funktionen tritt die Theorie der abelschen Funktionen und an die der elliptischen Modulfunktionen die Theorie der SIEGEL'schen Modulfunktionen.

Es wurde versucht, jeweils möglichst elementar vorzugehen und alle Hilfsmittel vollständig zu entwickeln. Dies bedingt auch kleine Exkurse in die Algebra.

Dem Koautor des ersten Bandes, Herrn Busam, möchte ich für seine Hilfe bei der Erstellung von Abbildungen und den allgemeinen Grundlagen herzlich danken.

Funktionentheorie 2

Riemann'sche Flächen Mehrere komplexe Variable

Abel'sche Funktionen Höhere Modulformen

Freitag, E.

2014, XI, 526 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-45306-9