

2. Laplace-Transformation

2.1 Eigenfunktionen von LTI-Systemen

In Abschn. 1.5 war gezeigt worden, dass ein LTI-System, dessen Impulsantwort $h(t)$ ist, auf das Eingangssignal $s(t)$ mit

$$s(t) * h(t) = g(t)$$

antwortet. Es gibt nun Funktionen $s_E(t)$, für die bei Übertragung über beliebige LTI-Systeme gilt

$$s_E(t) * h(t) = H \cdot s_E(t) . \quad (2.1)$$

Solche Funktionen werden also bei der Übertragung über LTI-Systeme nicht in ihrer Form geändert, sondern nur mit einem vom System abhängigen komplexwertigen Amplitudenfaktor H multipliziert; sie sind wegen dieses sehr einfachen Zusammenhangs zur Beschreibung von Signalen und LTI-Systemen besonders geeignet. Ein Grundtyp derartiger Funktionen, die in der Theorie der linearen Differentialgleichungen *Eigenfunktionen* genannt werden, lautet

$$s_E(t) = e^{pt} \text{ mit } p = \sigma + j2\pi f \Rightarrow s_E(t) = e^{\sigma t} [\cos(2\pi f t) + j \sin(2\pi f t)] . \quad (2.2)$$

Setzt man diese spezielle Eigenfunktion in (2.1) ein, so ergibt das für beliebige komplexe Werte p

$$h(t) * e^{pt} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{p(t-\tau)} d\tau = e^{pt} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-p\tau} d\tau}_{H(p)} . \quad (2.3)$$

Vergleicht man (2.3) mit (2.1), so zeigt sich, dass $s_E(t)$ die durch (2.1) gegebene Bedingung erfüllt, solange das $H(p)$ definierende Integral existiert. Ein weiteres Resultat der Rechnung ist die Formel zur Berechnung des Eigenwertes $H(p)$ als Funktion des Parameters p aus der Impulsantwort des Systems; der Ausdruck

$$H(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-pt} dt \quad (2.4)$$

wird in der Systemtheorie *Laplace-Übertragungsfunktion* genannt.

Schaltet man zwei LTI-Systeme, deren Impulsantworten $h_1(t)$ bzw. $h_2(t)$ sind, rückwirkungsfrei in Kette, so ergibt sich entsprechend (2.1) als Reaktion auf die Eigenfunktion $s_E(t)$

$$\begin{aligned} [s_E(t) * h_1(t)] * h_2(t) &= [H_1(p) \cdot s_E(t)] * h_2(t) \\ &= H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot s_E(t) . \end{aligned} \quad (2.5)$$

An Stelle des Faltungsproduktes von Impulsantworten genügt es also bei Anregung mit $s_E(t)$, das Produkt der Übertragungsfunktionen zu bilden. Dieses einfache Berechnungsverfahren ist allerdings zunächst auf die Übertragung von Signalen in Form der Eigenfunktionen beschränkt. Die Anwendung auf beliebige Signale ist jedoch ebenfalls möglich, sofern das (2.4) entsprechende Integral konvergiert. Die hier beschriebene Ausführung entspricht der *zweiseitigen Laplace-Transformierten*:

$$S(p) = \mathcal{L}_2\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-pt} dt . \quad (2.6)$$

Für Signale, die nicht vor $t = 0$ beginnen, genügt auch die *einseitige Laplace-Transformation*

$$S(p) = \mathcal{L}_1\{s(t)\} = \int_0^{+\infty} s(t) e^{-pt} dt , \quad (2.7)$$

die in der Praxis der Analyse kausaler Signale und Systeme häufig angewandt wird. Bezüglich der grundlegenden Eigenschaften besteht kein konzeptioneller Unterschied zwischen einseitiger und zweiseitiger Transformation. Eine weitere einseitige Transformation lässt sich für linksseitige („antikausale“) Signale definieren, die lediglich für $t < 0$ Werte ungleich Null besitzen. Wie in einigen der folgenden Beispiele deutlich wird, kann es ohnehin notwendig sein, Signale in linksseitige und rechtsseitige Teilkomponenten zu zerlegen und diese getrennt der Laplace-Transformation zu unterziehen.

2.2 Beispiele zur Laplace-Transformation

Beispiel 1: Transformation eines kausalen (rechtsseitigen) Exponentialimpulses (z. B. Impulsantwort des RC-Tiefpasses)

$$s_1(t) = e^{-bt} \cdot \varepsilon(t)$$

$$S_1(p) = \int_0^{+\infty} e^{-bt} e^{-pt} dt = \frac{1}{b+p} \text{ für } \sigma = \operatorname{Re}\{p\} > -\operatorname{Re}\{b\}. \quad (2.8)$$

Die Bedingung, unter der das Integral lösbar ist, $\operatorname{Re}\{p\} > -\operatorname{Re}\{b\}$, definiert gleichzeitig den *Konvergenzbereich* dieser Laplace-Transformation.

Beispiel 2: Transformation eines antikausalen (linksseitigen) Exponentialimpulses

$$s_2(t) = e^{-bt} \cdot \varepsilon(-t)$$

$$S_2(p) = \int_{-\infty}^0 e^{-bt} e^{-pt} dt = -\frac{1}{b+p} \text{ für } \sigma = \operatorname{Re}\{p\} < -\operatorname{Re}\{b\}. \quad (2.9)$$

Hier konvergiert die Integration nun unter der Bedingung $\operatorname{Re}\{p\} < -\operatorname{Re}\{b\}$.

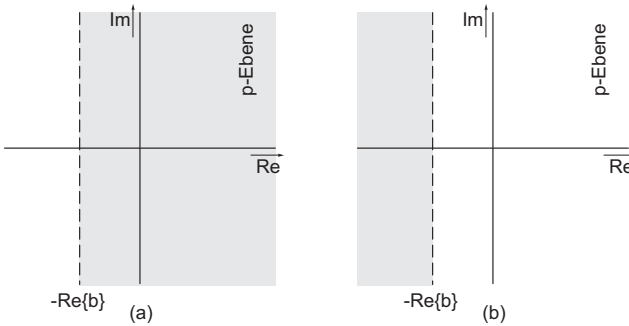


Abbildung 2.1. Konvergenzbereich in der p -Ebene für den rechtseitigen (a) und linksseitigen (b) Exponentialimpuls

Die Konvergenzbereiche in der komplexen p -Ebene sind für beide Beispiele in Abb. 2.1 dargestellt. Die komplexe Position $p = -b$ liegt irgendwo auf der gestrichelten Linie $-\operatorname{Re}\{b\}$, die die Grenze des Konvergenzbereichs darstellt.

Beispiel 3: Transformation des zweiseitigen Exponentialimpulses

$$s_3(t) = e^{-b|t|}. \quad (2.10)$$

Mit den Ergebnissen aus Beispiel 1 sowie Beispiel 2 in etwas modifizierter Form,

$$s_2(t) = e^{bt} \cdot \varepsilon(-t) \Rightarrow S_2(p) = \frac{-1}{-b+p} \text{ für } \sigma = \operatorname{Re}\{p\} < \operatorname{Re}\{b\}, \quad (2.11)$$

folgt

$$\begin{aligned}
 s_3(t) &= s_1(t) + s_2(t) \\
 \Rightarrow S_3(p) &= S_1(p) + S_2(p) = \frac{1}{b+p} - \frac{1}{p-b} = \frac{2b}{b^2 - p^2} \\
 &\text{für } -\operatorname{Re}\{b\} < \operatorname{Re}\{p\} < \operatorname{Re}\{b\} .
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Der Konvergenzbereich ist nun also nach links und rechts begrenzt, eine Laplace-Transformierte existiert nur, wenn $\operatorname{Re}\{b\} > 0$. Der Grenzfall der Konvergenz ist erreicht, wenn das Nennerpolynom $b^2 - p^2$ den Wert Null annimmt; dies ist für $p = \pm b$ der Fall. Diese Positionen der Singularitäten der Laplace-Transformierten werden als „Polstellen“ bezeichnet. Abb. 2.2a zeigt den zweiseitigen Exponentialimpuls für die Fälle reellwertiger $b > 0$ und $b < 0$. Im letzteren Fall wächst das Signal für $|t| \rightarrow \infty$ über alle Grenzen, d.h. es existiert kein gemeinsamer Konvergenzbereich und daher keine geschlossene Lösung der gesamten Laplace-Transformierten. Die Lage des Konvergenzbereiches und der Polstellen für $b > 0$ ist in Abb. 2.2b dargestellt.

Beispiel 4: Summe aus einem reellwertigen und zwei komplexwertigen Exponentialimpulsen (beide rechtsseitig):

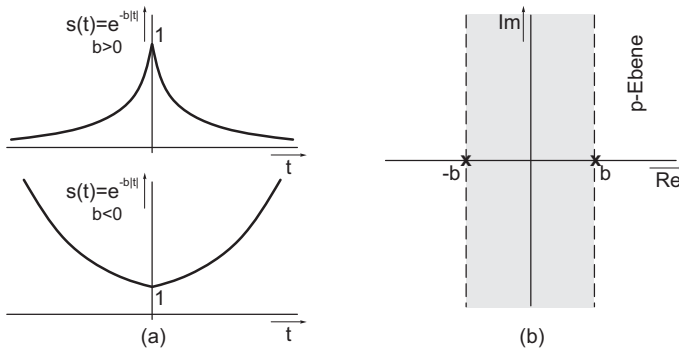


Abbildung 2.2. (a) Zweiseitiger Exponentialimpuls $e^{-b|t|}$ hier mit reellwertigen $b > 0$ (oben) und $b < 0$ (unten) (b) Lage des Konvergenzbereichs in der p -Ebene für $b > 0$

$$\begin{aligned}
 s(t) &= e^{-2t} \cdot \varepsilon(t) + e^{-t} \cdot \cos(3t) \cdot \varepsilon(t) \\
 &= e^{-2t} \cdot \varepsilon(t) + e^{-t} \cdot \frac{1}{2} [e^{j3t} + e^{-j3t}] \cdot \varepsilon(t) \\
 S(p) &= \int_0^\infty e^{-2t} \cdot e^{-pt} dt + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-(1-3j)t} \cdot e^{-pt} dt + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-(1+3j)t} \cdot e^{-pt} dt \\
 &= \underbrace{\frac{1}{p+2}}_{\text{wenn } \operatorname{Re}\{p\} > -2} + \underbrace{\frac{1/2}{p+(1-3j)}}_{\text{wenn } \operatorname{Re}\{p\} > -1} + \underbrace{\frac{1/2}{p+(1+3j)}}_{\text{wenn } \operatorname{Re}\{p\} > -1}.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Auf Grund der strengeren Konvergenzbedingung für die beiden rechten Integrale ergibt sich als gesamte Bedingung für den Konvergenzbereich in der p -Ebene für $\operatorname{Re}\{p\} > -1$. Das Gesamtergebnis lässt sich wie folgt auf einen gemeinsamen Nenner bringen:

$$s(t) = e^{-2t} \cdot \varepsilon(t) + e^{-t} \cdot \cos(3t) \cdot \varepsilon(t) \Rightarrow S(p) = \frac{2p^2 + 5p + 12}{(p^2 + 2p + 10)(p + 2)}. \tag{2.14}$$

Hiermit ergeben sich Polstellenlagen (Nullstellen des Nennerpolynoms) bei $p_{P_1} = -2$ sowie $p_{P_{2,3}} = -1 \pm 3j$. Darüber hinaus lässt sich aber feststellen, dass an den Positionen $p_{N_{1,2}} = -\frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{71}}{4}j$ das Zählerpolynom Null wird. Da dann auch $S(p) = 0$ ist, werden diese Positionen als *Nullstellen* der Laplace-Transformierten bezeichnet. Üblicherweise werden bei einer grafischen Darstellung die Polstellen durch Kreuze (x) und die Nullstellen durch Kreise (o) illustriert. Diese sind für das angegebene Beispiel ebenso wie der Konvergenzbereich in Abb. 2.3 dargestellt.

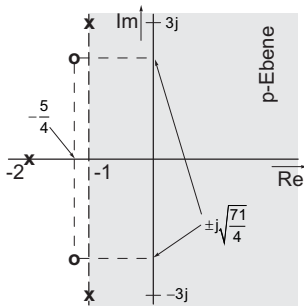


Abbildung 2.3. Lage des Konvergenzbereichs in der p -Ebene sowie Pol- und Nullstellenlagen für das Signal (2.13), $H_0 = 2$

2.3 Pole und Nullstellen in der komplexen p -Ebene

Die Darstellung durch Pol- und Nullstellenlagen, welche die Zähler- und Nennerpolynome der Laplace-Transformierten bestimmen, ist eine alternative und ebenso eindeutige Beschreibung. Sofern Q Nullstellen $p_{N,q}$ und R Polstellen $p_{P,r}$ bekannt sind, lässt sich die Laplace-Transformierte sofort beschreiben als¹

$$H(p) = H_0 \frac{\prod_{q=1}^Q (p - p_{N,q})}{\prod_{r=1}^R (p - p_{P,r})} . \quad (2.15)$$

Aus der Existenz von Pol- und Nullstellen lässt sich unmittelbar auf vorhandene Eigenfunktionen in einem Signal (bzw. in der Impulsantwort eines Systems) schließen. Auf Grund des Vorhandenseins einer Nullstelle an der Position p_N kann im Signal keinerlei Komponente $e^{p_N t} \varepsilon(\pm t)$ existieren. Bei einer Polstelle an der Position $p_P = \sigma_P + j2\pi f_P$ existiert hingegen mindestens eine Eigenfunktion $e^{p_P t} \varepsilon(\pm t)$. Hierbei stellt

- die Projektion der Pollage auf die imaginäre Achse den periodischen Anteil $e^{j2\pi f_P t} \varepsilon(\pm t)$,
- die Projektion der Pollage auf die reelle Achse den aperiodischen Anteil $e^{\sigma_P t} \varepsilon(\pm t)$

dar. Man beachte allerdings, dass zur exakten Charakterisierung der Signaleigenschaften noch die Kenntnis über die Lage des Konvergenzbereichs hinzukommen muss, um zu wissen, ob es sich um ein Signal handelt, das ausschließlich aus linksseitigen [mit $\varepsilon(-t)$], aus rechtsseitigen [mit $\varepsilon(+t)$] oder aus beiden Arten von Eigenfunktionen zusammengesetzt ist; letzteres wäre ein *zweiseitiges Signal* wie in (2.12).

Der Konvergenzbereich liegt

- im Falle rein rechtsseitiger (kausaler) Signale rechts von der am weitesten rechts gelegenen Polstelle;
- im Falle rein linksseitiger (antikausaler) Signale links von der am weitesten links gelegenen Polstelle.
- im Falle zweiseitiger Signale zwischen der am weitesten rechts gelegenen Polstelle einer rechtsseitigen und der am weitesten links gelegenen Polstelle einer linksseitigen Eigenfunktion.

¹ H_0 ist ein linearer Verstärkungsfaktor, der zusätzlich zu den Pol- und Nullstellenlagen erforderlich ist, um die Laplace-Übertragungsfunktion zu charakterisieren bzw. hieraus die tatsächliche Amplitude der Filterimpulsantwort zu rekonstruieren zu können.

Sofern keine analytisch berechenbaren Polstellen im Endlichen existieren, überdeckt der Konvergenzbereich die gesamte p -Ebene. Dies ist z. B. generell bei Signalen endlicher Dauer der Fall. Bei Signalen mit endlicher Fläche aller aperiodischen Eigenfunktionsanteile $e^{\sigma_P t}$ müssen die zugehörigen Polstellen bei $\sigma_P < 0$ (für rechtsseitige Eigenfunktionen) bzw. $\sigma_P > 0$ (für linksseitige Eigenfunktionen) liegen. Der Konvergenzbereich selbst darf niemals eine Polstelle enthalten, da die innerhalb desselben berechenbare Laplace-Transformierte einen endlichen Wert annehmen muss. Er ist immer geschlossen, die Grenzen verlaufen parallel zur imaginären Achse (ggf. im Unendlichen), da die aperiodische Komponente die Konvergenz nicht beeinflusst. Sofern der Konvergenzbereich die imaginäre Achse einschließt, existiert auch eine Fourier-Transformierte (Kapitel 3).

Hierzu ein Beispiel der Laplace-Transformierten eines Signals, welches aus einer Überlagerung zweier Exponentialimpulse besteht:

$$S(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}. \quad (2.16)$$

Offenbar befinden sich die Polstellen bei $p_{P_1} = -1$ und $p_{P_2} = -2$ (Abb. 2.4a). Mögliche Signale, die alle dieselbe Laplace-Transformierte besitzen, lauten wie folgt:

- a) Das Signal ist rechtsseitig (kausal): Der Konvergenzbereich liegt rechts des rechten Pols, d. h. bei $\operatorname{Re}\{p\} > -1$ (Abb. 2.4b). Das Signal ist dann mit (2.8) $s(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) \cdot \varepsilon(t)$.
- b) Das Signal ist linksseitig (antikausal): Der Konvergenzbereich liegt links des linken Pols, d. h. bei $\operatorname{Re}\{p\} < -2$ (Abb. 2.4c). Das Signal ist dann mit (2.9) $s(t) = -(e^{-t} - e^{-2t}) \cdot \varepsilon(-t)$.
- c) Das Signal ist zweiseitig: Der Konvergenzbereich liegt zwischen den beiden Polen, d. h. bei $-2 < \operatorname{Re}\{p\} < -1$ (Abb. 2.4d). Das Signal ist dann mit (2.8) und (2.9) $s(t) = -e^{-t} \cdot \varepsilon(-t) - e^{-2t} \cdot \varepsilon(t)$.

Man beachte, dass nur im Fall a) die imaginäre Achse im Konvergenzbereich liegt. Häufig wird sich der Konvergenzbereich durch eine Verknüpfung mehrerer Signale ändern. So ist beispielsweise bei der Superposition von Signalen der Konvergenzbereich nach der Überlagerung die Schnittmenge aus den ursprünglichen Konvergenzbereichen. Eine ausführliche Darstellung in Zusammenhang mit den Abbildungstheoremen der Laplace-Transformation wird am Ende dieses Kapitels in Tabelle 2.1 gegeben. Dabei sind die wichtigsten Theoreme der Laplace-Transformation ähnlich denen der Fourier-Transformation, welche noch in Kap. 3 ausführlicher hergeleitet werden. Es sei hier insbesondere auf die für die Systemanalyse wichtigen Eigenschaften der *Faltung* im Zeitbereich und *Multiplikation* im Laplace-Abbildungsbereich (vgl. (2.5))

$$\mathcal{L}\{s(t) * h(t)\} = S(p) \cdot H(p) \quad (2.17)$$

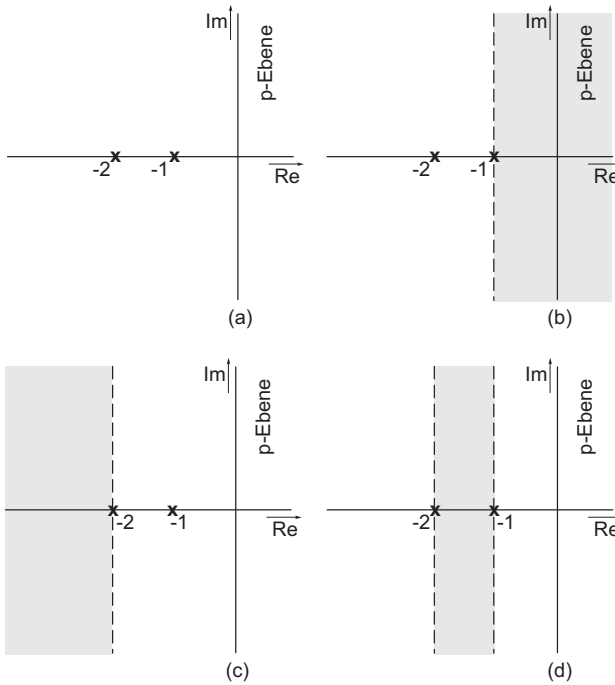


Abbildung 2.4. (a) Lage der Polstellen für die Laplace-Repräsentation (2.16) sowie Lage der Konvergenzbereiche für Fälle eines (b) rechtsseitigen Signals (c) linksseitigen Signals (d) zweiseitigen Signals

(bei welcher der Konvergenzbereich sich aus der Schnittmenge der beiden einzelnen Konvergenzbereiche bildet), der *Differentiation*

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} s(t) = s(t) * \delta'(t) \right\} = p \cdot S(p) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} \{ \delta'(t) \} = p \quad (2.18)$$

(bei welcher der Konvergenzbereich unverändert bleibt) und der *Integration*

$$\mathcal{L} \left\{ \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau = s(t) * \varepsilon(t) \right\} = \frac{1}{p} S(p) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} \{ \varepsilon(t) \} = \frac{1}{p}, \operatorname{Re} \{ p \} > 0 \quad (2.19)$$

(bei welcher der Konvergenzbereich nur die bei $\operatorname{Re} \{ p \} > 0$ liegende Region des ursprünglichen Konvergenzbereichs umfasst) hingewiesen. Weiter folgt mit (2.17) und (1.34):

$$s(t) = s(t) * \delta(t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} \{ \delta(t) \} = 1 \quad (2.20)$$

2.4 Lösung von Differentialgleichungen mittels \mathcal{L} -Transformation

Generell lassen sich strom- oder spannungsbezogene Differentialgleichungen beliebiger Ordnungen in folgender Weise (hier für Spannungssignale an Ein- und Ausgängen) ausdrücken²:

$$\sum_{r=0}^R \alpha_r \frac{d^r u_2(t)}{dt^r} = \sum_{q=0}^Q \beta_q \frac{d^q u_1(t)}{dt^q} . \quad (2.21)$$

Hierbei stehen die Ausgangsspannung sowie sämtliche aus ihr zu bestimmenden Ableitungen auf der linken Seite, die Eingangsspannung sowie sämtliche aus ihr zu bestimmenden Ableitungen auf der rechten Seite. Es ergibt sich unter Anwendung (2.18) die Laplace-Transformierte

$$\left(\sum_{r=0}^R \alpha_r p^r \right) U_2(p) = \left(\sum_{q=0}^Q \beta_q p^q \right) U_1(p) , \quad (2.22)$$

und weiter die Laplace-Übertragungsfunktion (Laplace-Transformierte der Impulsantwort)

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\sum_{q=0}^Q \beta_q p^q}{\sum_{r=0}^R \alpha_r p^r} . \quad (2.23)$$

Hieraus ergeben sich deren Nullstellen als die Q Lösungen des Gleichungssystems

$$\sum_{q=0}^Q \beta_q p^q = 0 , \quad (2.24)$$

sowie deren Polstellen als die R Lösungen von

$$\sum_{r=0}^R \alpha_r p^r = 0 . \quad (2.25)$$

Als Beispiel werde das in Abb.2.5 gezeigte RLC -System betrachtet. Man erhält nach Anwendung der Kirchhoff'schen Maschenregel sowie der Beziehung $i(t) = C \frac{du_2(t)}{dt}$:

² In aller Regel wird hier entweder $\alpha_0 = 1$ oder $\beta_0 = 1$ gesetzt; die Wahl des jeweils anderen Wertes $\alpha_0 \neq 1$ oder $\beta_0 \neq 1$ beeinflusst dann den linearen Verstärkungsfaktor des Systems.

$$R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + u_2(t) = LC \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + RC \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = u_1(t) . \quad (2.26)$$

Durch Anwendung von (2.21)-(2.25) auf (2.26) erhält man

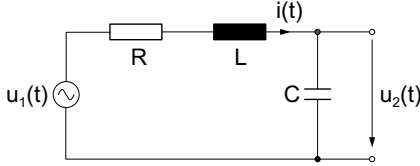


Abbildung 2.5. RLC -System mit stationärer Wechselspannungs-Anregung

$$\begin{aligned} LC \cdot p^2 \cdot U_2(p) + RC \cdot p \cdot U_2(p) + U_2(p) &= U_1(p) \\ \Rightarrow H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} &= \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1} = \frac{1/LC}{p^2 + (R/L)p + 1/LC} \end{aligned} \quad (2.27)$$

mit Polstellen bei

$$p_{P1,2} = - \underbrace{\frac{R}{2L}}_a \pm \underbrace{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}}_b . \quad (2.28)$$

Die Positionen der Polstellen sind für die Fälle $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$ und $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ in Abb. 2.6 dargestellt. Hierbei wird folgender alternativer Ausdruck verwendet:

$$p_{P1,2} = - \underbrace{\xi \omega_0}_a \pm \underbrace{\omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}}_b \quad \text{mit } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{und } \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} . \quad (2.29)$$

Das Zeitbereichs-Verhalten bei stationären oder instationären Vorgängen kann nun generell durch inverse Laplace-Transformation (s. Abschn. 3.11) ermittelt werden. Im vorliegenden Kapitel soll zunächst nur der Fall betrachtet werden, dass die Laplace-Transformierte aus Zähler- und Nennerpolynomen endlichen Grades (d.h. endliche Anzahl von Pol- und Nullstellen) darstellbar ist. Die Verknüpfung einer Systemantwort mit einem Eingangssignal (z.B. Sprungfunktion zur Ermittlung von Einschaltvorgängen) kann dabei als weitere Randbedingung dienen und durch einfache Multiplikation der Laplace-Transformierten von Signal und Filterimpulsantwort berücksichtigt werden. Die Bestimmung der zugehörigen Zeitbereichsfunktion wird besonders einfach, wenn aus der üblichen Polynomform (2.15) durch Partialbruchzerlegung Einzelterme der Form $\frac{A_r}{p - p_{Pr}}$ generiert werden können, die dann jeweils für eine kausale Exponentialfunktion $A_r e^{p_{Pr} t} \varepsilon(t)$ im Zeitbereich stehen:

Signalübertragung

Grundlagen der digitalen und analogen

Nachrichtenübertragungssysteme

Ohm, J.; Lüke, H.D.

2014, XV, 529 S. Mit Online-Extras., Softcover

ISBN: 978-3-642-53900-8