

Elementare Funktionen

18.1 Polynome und rationale Funktionen

Polynome und rationale Funktionen haben die angenehme Eigenschaft, dass man ihre Funktionswerte leicht, nämlich nur unter Verwendung der Grundrechenoperationen $+$, $-$, $\cdot$, $/$, berechnen kann. Das sind aber die einzigen Operationen, die ein Computer von sich aus beherrscht! Mehr muss er aber zum Glück auch nicht können, denn alle komplizierteren Funktionen werden einfach durch Polynome approximiert.

Definition 18.1 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0$$

heißt (reelles) **Polynom**. Die reellen Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n$ werden die **Koeffizienten** des Polynoms genannt. Unter der Voraussetzung $a_n \neq 0$ nennt man $n = \deg(f)$ den **Grad** (engl. *degree*) des Polynoms. Der Grad ist also der größte vorkommende Exponent. In diesem Zusammenhang nennt man a_n auch den „höchsten Koeffizienten“. Ein Polynom mit $a_n = 1$ heißt (auf eins) **normiert**.

Auch die identisch verschwindende Funktion, $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, kann als Polynom aufgefasst werden. Damit unsere Formeln auch in diesem Fall richtig bleiben, ordnet man diesem Polynom den Grad $-\infty$ zu.

Wenn zwei Polynome f und g addiert oder multipliziert werden, ergibt sich für den Grad der Summe bzw. des Produktes: $\deg(f + g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$ und $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$.

Beispiel 18.2 Polynome

Welche der folgenden Funktionen sind Polynome? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grad des Polynoms.

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|
| a) $f_1(x) = 3x^7 + 5x - 1$ | b) $f_2(x) = 4(x - 1)(x + 3)$ | c) $f_3(x) = 4$ |
| d) $f_4(x) = \sqrt{3}x^2 + 4$ | e) $f_5(x) = x^3 + x^{\frac{1}{2}}$ | f) $f_6(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ |

Lösung zu 18.2

- a) $f_1(x)$ ist ein Polynom vom Grad 7.
- b) Durch Ausmultiplizieren erhalten wir $f_2(x) = 4x^2 + 8x - 12$. $f_2(x)$ ist also ein Polynom vom Grad 2.
- c) Die konstante Funktion $f_3(x) = 4 \cdot x^0$ ist ein Polynom vom Grad 0.
- d) $f_4(x)$ ist ein Polynom vom Grad 2. Sie haben wegen des Koeffizienten $\sqrt{3}$ gezögert? Er macht keine Probleme, denn die Koeffizienten a_j eines Polynoms können *beliebige reelle Zahlen* sein.
- e) $f_5(x)$ ist kein Polynom, denn hier kommt $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ vor (ein Polynom hat nur nichtnegative *ganzzahlige* Exponenten).
- f) $f_6(x)$ ist kein Polynom, weil es sich nicht in der Form $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ schreiben lässt. ■

Die Summe $p(x) + q(x)$ und das Produkt $p(x)q(x)$ von zwei Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ sind wieder Polynome. Jedoch ergibt die Division zweier Polynome nicht unbedingt wieder ein Polynom, wie wir in Beispiel 18.2 f) gesehen haben. Im Allgemeinen entsteht dadurch eine *rationale Funktion*:

Definition 18.3 Eine Funktion, die der Quotient $\frac{p(x)}{q(x)}$ zweier Polynome $p(x)$ und $q(x)$ ist, heißt **rationale Funktion**. Eine rationale Funktion ist nur für jene x definiert, für die das Nennerpolynom $q(x) \neq 0$ ist.

Das war auch bei den ganzen Zahlen so. Summe und Produkt von ganzen Zahlen sind wieder ganze Zahlen, bei der Division einer ganzen Zahl durch eine andere ergibt sich im Allgemeinen eine rationale Zahl.

Wir wollen uns nun einige Polynome genauer ansehen. Ein Polynom vom Grad 0,

$$f(x) = c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R},$$

heißt auch **konstante Funktion**. Sie nimmt für jedes Argument x denselben Funktionswert $f(x) = c$ an. Abbildung 18.1 zeigt die konstante Funktion $f(x) = 2$.

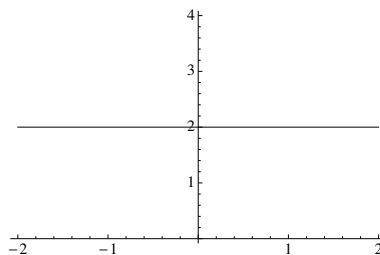


Abbildung 18.1. Konstante Funktion $f(x) = 2$.

Besonders wichtig sind Polynome vom Grad 1, oft geschrieben als

$$f(x) = kx + d \quad \text{mit } k, d \in \mathbb{R}.$$

Der Funktionsgraph eines solchen Polynoms ist eine **Gerade**. Welche anschauliche Bedeutung haben k und d ? Für zwei beliebige Stellen x_1 und x_2 ist

$$k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{vertikale Differenz}}{\text{horizontale Differenz}}$$

und heißt die **Steigung** der Geraden. Ist $k > 0$, so ist die Gerade streng monoton wachsend, ist $k < 0$, dann ist sie streng monoton fallend. Für $k = 0$ haben wir es mit einer konstanten Funktion zu tun. Der Koeffizient d ist der Funktionswert an der Stelle $x = 0$, also $d = f(0)$. Abbildung 18.2 zeigt die Gerade $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Wie sieht im Vergleich dazu die Gerade $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ aus?

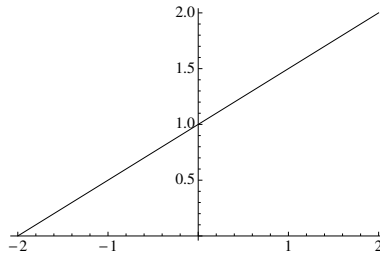


Abbildung 18.2. Gerade $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

Polynome vom Grad 1 werden oft auch als **lineare Funktionen** bezeichnet. Streng genommen ist die Bezeichnung „lineare Funktion“ aber nur für Geraden der Form $f(x) = kx$, also wenn die Gerade durch den Ursprung geht, richtig. (Vergleiche auch Abschnitt „Lineare Abbildungen“ in Band 1.)

Beispiel 18.4 Lineare Interpolation

- Bestimmen Sie die Gerade g , die durch $g(2) = 2$ und $g(4) = 3$ bestimmt ist.
- Von einer Funktion f sind zwei Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ bekannt. Finden Sie eine Formel für die Gerade g , die an den beiden Stellen a und b mit f übereinstimmt.

Lösung zu 18.4

- Es ist $g(x) = kx + d$. Um die Steigung k zu berechnen, werten wir den Quotienten „vertikale Differenz/horizontale Differenz“ an den beiden gegebenen Punkten aus: $k = \frac{g(4) - g(2)}{4 - 2} = \frac{1}{2}$. Um d zu berechnen, brauchen wir nun nur noch einen Punkt zu kennen, z. B. $g(2) = 2$: $2 = g(2) = 2k + d = 2 \cdot \frac{1}{2} + d$, und damit folgt $d = 1$. Somit lautet die gesuchte Gerade $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Sie ist in Abbildung 18.2 dargestellt.
- Wieder setzen wir $g(x) = kx + d$ an. Die Steigung k ist wieder „vertikale Differenz/horizontale Differenz“ an den beiden gegebenen Punkten, also $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Nun müssen wir noch d berechnen. Wieder verwenden wir, dass wir den Funktionswert von g an der Stelle a kennen: Aus $g(a) = ka + d = f(a)$ folgt damit $d = f(a) - a \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ und daher insgesamt

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = f(b)\frac{x - a}{b - a} + f(a)\frac{b - x}{b - a}.$$

Zwei Punkte legen also eine Gerade eindeutig fest. ■

Polynome vom Grad 2,

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{mit } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0,$$

werden auch **quadratische Funktionen** genannt. Ihre Funktionsgraphen sind **Parabeln**. Welche Bedeutung haben die Koeffizienten? Ist $a_2 > 0$, so ist die Parabel „nach oben“ geöffnet, für $a_2 < 0$ ist sie „nach unten“ geöffnet. Ist der Koeffizient $a_1 = 0$, so liegt die Parabel spiegelsymmetrisch zur y -Achse. Abbildung 18.3 zeigt die Parabeln $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$ und $g(x) = \frac{1}{3}x^2$. Bei g verschwinden der lineare Term und der konstante Term (d.h., $a_1 = 0$ und $a_0 = 0$), daher liegt die Parabel symmetrisch zur y -Achse und der Scheitel der Parabel liegt im Koordinatenursprung. Beide Parabeln sind nach oben geöffnet. Zeichnen Sie zum Vergleich die Parabel $h(x) = -x^2$!

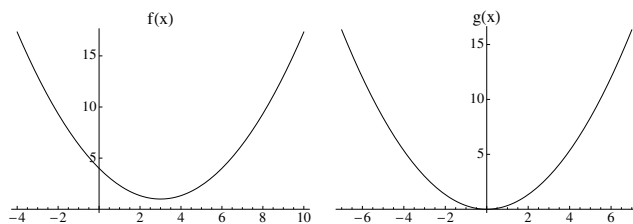


Abbildung 18.3. Parabeln $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$ und $g(x) = \frac{1}{3}x^2$.

Polynome vom Grad 3, also

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{mit } a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}, a_3 \neq 0,$$

heißen **kubische Funktionen**. Ist $a_3 > 0$, so verläuft der Funktionsgraph „von links unten nach rechts oben“, ist $a_3 < 0$, so verläuft der Funktionsgraph „von links oben nach rechts unten“. Er ist aber nicht notwendigerweise monoton wachsend bzw. fallend! Abbildung 18.4 zeigt zwei typische Beispiele. Zeichnen Sie zum Vergleich die kubische Funktion $h(x) = -x^3$.

Kubische Funktionen werden in der Wirtschaftsmathematik oft als Modelle für **Kostenfunktionen** verwendet. Dabei bedeuten x (eingeschränkt auf $x > 0$) die Produktionsmenge und $y = f(x)$ die zugehörigen Produktionskosten.

Nun wollen wir uns überlegen, welche Eigenschaften Polynome haben (vergleiche Abschnitt „Funktionen“ in Band 1). Jede Gerade (mit Steigung $k \neq 0$) wächst über alle Schranken, ebenso jede Parabel und jede kubische Funktion. Allgemein gilt:

Satz 18.5 Jedes nichtkonstante Polynom ist unbeschränkt.

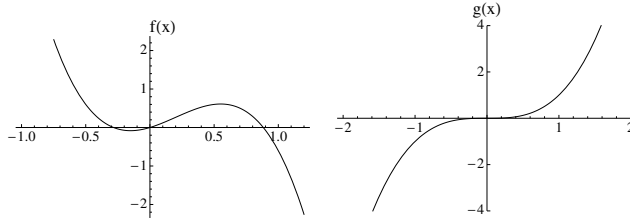


Abbildung 18.4. Kubische Funktionen $f(x) = -\frac{1}{25}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{4}x$ und $g(x) = x^3$.

Das heißt, man kann keine zwei Geraden parallel zur x -Achse (Schränken) finden, sodass der Funktionsgraph des Polynoms ganz zwischen ihnen verläuft.

Beispiel: Die Parabel $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = \frac{1}{3}x^2(1 - \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2})$ verhält sich für betragsmäßig große x wie die Parabel $g(x) = \frac{1}{3}x^2$ in dem Sinn, dass der Ausdruck in der Klammer beliebig nahe bei 1 liegt, wenn $|x|$ groß wird. Da g unbeschränkt ist, muss auch f unbeschränkt sein.

Kommen wir nun zu den Nullstellen von Polynomen. Wir erinnern uns:

Definition 18.6 Eine Stelle x_0 , an der $f(x_0) = 0$ ist, heißt **Nullstelle** der Funktion f .

Nullstellen sind also Schnittstellen oder Berührungsstellen des Funktionsgraphen mit der x -Achse. Eine Funktion kann, muss aber keine Nullstellen haben.

Ein Polynom vom Grad 1 hat immer eine Nullstelle (klar, denn eine Gerade mit von Null verschiedener Steigung schneidet die x -Achse immer irgendwo). Die Nullstellen eines Polynoms vom Grad 2 sind die Lösungen x_1, x_2 der **quadratischen Gleichung** $x^2 + px + q = 0$ (man kann jede quadratische Gleichung $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ mit $a_2 \neq 0$ auf diese Form bringen, indem man beide Seiten durch a_2 dividiert):

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Je nachdem, welches Vorzeichen der Ausdruck unter der Wurzel hat, ergeben sich zwei, eine oder keine reellen Nullstellen: Für $p^2 - 4q > 0$ gibt es zwei verschiedene reelle Nullstellen; für $p^2 - 4q = 0$ fallen beide reellen Nullstellen zusammen; ist $p^2 - 4q < 0$, so gibt es keine reellen, aber zwei zueinander konjugiert komplexe Nullstellen (siehe Abbildung 18.5).

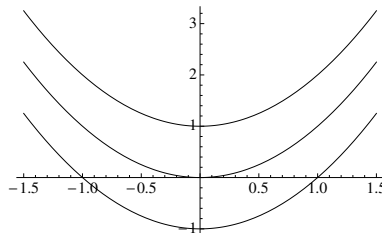


Abbildung 18.5. Die Parabeln $x^2 - 1$, x^2 und $x^2 + 1$.

Der Trick, mit dem die Formel zur Lösung einer quadratischen Gleichung gezeigt wird, ist auch in vielen anderen Situationen nützlich. Die Idee ist, $x^2 + px + q = 0$ **quadratisch zu ergänzen**. Dazu addieren wir $(\frac{p}{2})^2 - q$ auf beiden Seiten von $x^2 + px + q = 0$. Das ergibt $(x + \frac{p}{2})^2 = (\frac{p}{2})^2 - q$. Nun brauchen wir nur noch die Wurzel auf beiden Seiten zu ziehen und nach x aufzulösen, und schon steht die Formel da.

Auch für die Nullstellen eines Polynoms vom Grad 3 und 4 gibt es Lösungsformeln (Cardano'sche Formeln). Meist wird das aber schon zu mühsam und man greift lieber auf den Computer zurück. Ab dem Grad 5 ist eine allgemeine Lösung nicht mehr möglich und man muss sich mit numerischen Näherungsverfahren (z. B. Newton-Verfahren) begnügen.

Gerolamo Cardano, 1501–1576, hat als erster die allgemeine Lösungsformel für Polynome dritten und vierten Grades in seinem Werk *Ars Magna* veröffentlicht. Wesentliche Hinweise hat er wohl von Niccolò Fontana Tartaglia, 1499–1557, erhalten, der wiederum die Formel möglicherweise von Scipione del Ferro (ca. 1465–1526) erfahren hat. Da dieses Wissen damals wie ein Schatz gehandelt und geheim gehalten wurde, lässt sich die genaue Urheberschaft nicht mit Sicherheit feststellen. Das hat damals zu einem heftigen Streit zwischen Cardano und Tartaglia geführt.

Beispiel 18.7 (→CAS) Nullstellen von Polynomen

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen:

- a) $f(x) = x^2 + 3x - 4$ b) $g(x) = 4x^2 - 4x + 1$ c) $h(x) = x^2 - 4x + 5$
 d) Berechnen Sie die Nullstellen von $k(x) = x^3 - 7x^2 + 7x - 1$.

Lösung zu 18.7

- a) Wir müssen die quadratische Gleichung $x^2 + 3x - 4 = 0$ lösen. Wir erhalten mithilfe der Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4},$$

also die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -4$. Der Funktionsgraph schneidet die x -Achse an diesen beiden Nullstellen.

- b) Wir dividieren $4x^2 - 4x + 1 = 0$ durch 4 und erhalten $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$. Daraus liefert die obige Lösungsformel

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}},$$

g hat also nur die eine Nullstelle $x = \frac{1}{2}$. Der Graph von g berührt die x -Achse bei $x = \frac{1}{2}$.

- c) $x^2 - 4x + 5 = 0$ hat die Lösungen

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 5},$$

also $x_1 = 2 + i$ und $x_2 = 2 - i$. Es gibt also keine reelle Nullstelle. Der Funktionsgraph schneidet weder noch berührt er die x -Achse.

- d) Wie oben erwähnt gibt es zwar eine Formel für die Nullstellen eines Polynoms dritten Grades, aber manchmal kann man auch eine Nullstelle erraten. Hier zum Beispiel $x_1 = 1$. Nun können wir unser Polynom faktorisieren, $k(x) = (x - 1)(x^2 - 6x + 1)$ (wie das geht, werden wir gleich sehen). Da die Nullstellen

eines Produktes genau dort liegen, wo die Faktoren Nullstellen haben, brauchen wir nur noch die Nullstellen von $x^2 - 6x + 1$ zu berechnen: $x_2 = 3 - 2\sqrt{2} = 0.17$, $x_3 = 3 + 2\sqrt{2} = 5.83$. Der Graph von k schneidet die x -Achse an den drei Stellen $x = 1, 0.17$ und 5.83 . ■

Im Beispiel 18.7 d) konnten wir das Polynom als Produkt von Polynomen kleineren Grades schreiben. Diese *Faktorisierung* hat uns die Nullstellensuche entscheidend vereinfacht, denn wir mussten nur noch nach den Nullstellen der Faktoren suchen. Wie beim Rechnen mit natürlichen Zahlen kann man zwei Polynome dividieren, um zu einer Faktorisierung zu gelangen. Wie bei der Division natürlicher Zahlen bleibt dabei im Allgemeinen ein Rest.

Dividieren wir $p(x)$ durch $q(x)$ auf folgende Weise: Seien

$$p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j \quad \text{und} \quad q(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j,$$

wobei $m \leq n$ (m, n sind die Grade der Polynome). Wenn wir nun $k = n - m$ und $c_k = \frac{a_n}{b_m}$ berechnen, so ist $r_k(x) = p(x) - c_k x^k q(x)$ ein Polynom vom Grad höchstens $n - 1$ (da c_k gerade so definiert ist, dass sich die Koeffizienten von x^n wegheben). Nun können wir dieses Verfahren wiederholen, bis zuletzt ein Restpolynom $r(x)$ zurückbleibt, dessen Grad kleiner als der Grad von $q(x)$ ist:

$$\begin{aligned} p(x) &= c_k x^k q(x) + r_k(x) \\ &\vdots \\ &= (c_k x^k + \cdots + c_0) q(x) + r(x). \end{aligned}$$

Diese Überlegung an einem Beispiel veranschaulicht: $p(x) = 3x^4 + x^3 - 2x$ und $q(x) = x^2 + 1$: die Graddifferenz ist $k = 4 - 2 = 2$. Es ist $c_2 = \frac{a_4}{b_2} = \frac{3}{1} = 3$, also $r_2(x) = p(x) - 3x^2 q(x) = 3x^4 + x^3 - 2x - 3x^2(x^2 + 1) = x^3 - 3x^2 - 2x$. Nun kann man dieses Restpolynom wieder durch $q(x)$ dividieren, usw., bis der Grad des Restpolynoms kleiner ist als der Grad von q .

Satz 18.8 (Polynomdivision) Sind $p(x)$ und $q(x)$ Polynome mit $\deg(q) \leq \deg(p)$, dann gibt es Polynome $s(x)$ und $r(x)$, sodass

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x).$$

Der Grad von $s(x)$ ist die Differenz $\deg(s) = \deg(p) - \deg(q)$, und der Grad des Restpolynoms $r(x)$ ist kleiner als der des Polynoms $q(x)$: $\deg(r) < \deg(q)$.

Wenn $r(x) = 0$ für alle x , dann ist $p(x) = s(x)q(x)$ und wir sprechen von einer **Faktorisierung** von $p(x)$.

Mit der Hand wird bei der Polynomdivision der Übersicht halber nach einem Schema vorgegangen:

Beispiel 18.9 ($\rightarrow$ CAS) Polynomdivision

Berechnen Sie $(3x^4 + x^3 - 2x) : (x^2 + 1)$.

Lösung zu 18.9 Wir schreiben

$$(3x^4 + x^3 - 2x) : (x^2 + 1) =$$

an und gehen ähnlich wie bei der Division zweier Zahlen vor: Womit muss die höchste Potenz von $q(x)$, also x^2 , multipliziert werden, um auf die höchste Potenz von $p(x)$, also $3x^4$, zu kommen? Die Antwort $3x^2$ wird rechts neben das Gleichheitszeichen geschrieben. Dann wird das Polynom $(x^2 + 1)$ mit $3x^2$ multipliziert, das Ergebnis $3x^4 + 3x^2$ wird unter $(3x^4 + x^3 - 2x)$ geschrieben und davon abgezogen. Es bleibt der Rest $x^3 - 3x^2 - 2x$, mit ihm verfährt man gleich weiter:

$$\begin{array}{r}
 (3x^4 + x^3 - 2x) : (x^2 + 1) = 3x^2 + x - 3 \\
 \underline{3x^4 + 3x^2 } \\
 x^3 - 3x^2 - 2x \\
 \underline{x^3 + x } \\
 -3x^2 - 3x \\
 \underline{-3x^2 - 3x - 3} \\
 -3x + 3
 \end{array}$$

Wir brechen ab, da das Restpolynom $-3x + 3$ kleineren Grad hat als $q(x) = x^2 + 1$. Somit ist der Quotient $s(x) = 3x^2 + x - 3$ und der Rest ist $r(x) = -3x + 3$. Das Polynom $p(x) = 3x^4 + x^3 - 2x$ kann also in der Form $p(x) = (x^2 + 1)(3x^2 + x - 3) - 3x + 3$ geschrieben werden. ■

Es gilt insbesondere:

Satz 18.10 Sei $x_1 \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$). Das Polynom $p(x)$ lässt sich genau dann ohne Rest durch den **Linearfaktor** $q(x) = x - x_1$ dividieren, also

$$p(x) = s(x)(x - x_1),$$

wenn x_1 eine Nullstelle von $p(x)$ ist.

Warum? Dass x_1 eine Nullstelle von $p(x) = s(x)(x - x_1)$ ist, ist klar. Umgekehrt ist für eine Nullstelle x_1 zu zeigen, dass der Rest verschwindet, wenn wir $p(x)$ durch $x - x_1$ dividieren: Nun, der Rest $r(x) = p(x) - s(x)(x - x_1)$ der Polynomdivision $p(x)$ durch $x - x_1$ ist hier vom Grad kleiner 1, also eine konstante Funktion. Wie sieht der (immer gleiche) Funktionswert aus? Sehen wir ihn uns an der Nullstelle x_1 von p an: $r(x) = r(x_1) = p(x_1) - s(x_1)(x_1 - x_1) = 0$. Also ist $r(x) = 0$ für alle x .

Wenn wir auch komplexe Nullstellen zulassen, so können wir jedes Polynom *vollständig faktorisieren*, d.h. ohne Rest als ein Produkt von Linearfaktoren schreiben:

Satz 18.11 (Fundamentalsatz der Algebra) Jedes Polynom $p(x)$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ (mit reellen oder sogar mit komplexen Koeffizienten) kann in der Form

$$p(x) = a_n \prod_{j=1}^n (x - x_j) = a_n (x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

geschrieben werden, wobei $x_1, \dots, x_n$ die (nicht notwendigerweise verschiedenen) komplexen Nullstellen von $p(x)$ sind. In diesem Sinn hat ein Polynom vom Grad n genau n Nullstellen. Tritt in diesem Produkt ein Linearfaktor k -mal auf, so heißt k die **Vielfachheit** der zugehörigen Nullstelle.

Im folgenden Beispiel sehen wir, dass der Grad des Polynoms gleich der Anzahl der Nullstellen ist, wenn wir sie entsprechend ihrer Vielfachheit zählen und auch komplexe Nullstellen zulassen:

Beispiel 18.12 Fundamentalsatz der Algebra

- a) Das Polynom $p(x) = (x-4)(x-5)^2$ hat die Nullstellen 4 und 5. Die Nullstelle 4 hat die Vielfachheit 1, die Nullstelle 5 hat die Vielfachheit 2. In diesem Sinn hat p die drei Nullstellen 4, 5, 5 (und Grad 3).
- b) Das Polynom $p(x) = (x-4)(x^2+1)$ hat die reelle Nullstelle 4 und die zwei zueinander konjugiert komplexen Nullstellen $+i$ und $-i$. Es kann daher noch weiter in die Form $p(x) = (x-4)(x+i)(x-i)$ zerlegt werden.

Dass im letzten Beispiel die beiden Nullstellen i und $-i$ zueinander konjugiert komplex waren, ist kein Zufall:

Satz 18.13 Bei einem Polynom mit reellen Koeffizienten treten allfällige komplexe Nullstellen immer in komplex konjugierten Paaren auf. Das heißt: Für jede komplexe Nullstelle $z_0 = x_0 + iy_0$ ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$ eine Nullstelle. Außerdem können zwei konjugiert komplexe Linearfaktoren immer zu einem reellen quadratischen Faktor zusammengefasst werden:

$$(x - z_0)(x - \bar{z}_0) = x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y_0^2.$$

Das haben wir auch im Beispiel 18.12 b) gesehen: $(x-i)(x+i) = x^2 + 1$. Das Produkt der beiden komplexen Linearfaktoren ergab also ein Polynom vom Grad 2 mit reellen Koeffizienten.

Warum ist mit $z_0 \in \mathbb{C}$ auch $\bar{z}_0$ eine Nullstelle? Hat $p(x)$ reelle Koeffizienten, so gilt nach den Rechenregeln für die Konjugation $\overline{p(x)} = \overline{(\sum a_j x^j)} = \sum \overline{(a_j x^j)} = \sum a_j \overline{(x^j)} = \sum a_j (\bar{x})^j = p(\bar{x})$ (a_j reell impliziert ja $\overline{a_j} = a_j$). Damit folgt aus $0 = p(z_0)$ durch Konjugieren $0 = \overline{p(z_0)} = p(\bar{z}_0)$.

Daraus folgt: Jedes reelle Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle. Das heißt, dass ein Polynom ungeraden Grades die x -Achse mindestens einmal schneidet. Denken Sie im einfachsten Fall an eine Gerade.

Beschäftigen wir uns als Nächstes mit *rationalen* Funktionen. Ist bei einer rationalen Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ der Grad von p größer oder gleich wie der von q , so erhalten wir durch Polynomdivision die Darstellung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

wobei $s(x)$ ein Polynom und $\frac{r(x)}{q(x)}$ eine rationale Funktion mit Zählergrad *kleiner* Nennergrad ist. Das Polynom $s(x)$ wird in diesem Zusammenhang als **asymptotische Näherung** von $\frac{p(x)}{q(x)}$ bezeichnet, weil sich $\frac{p(x)}{q(x)}$ für große Werte von $|x|$ (d.h. x gegen ∞ oder x gegen $-\infty$) mehr und mehr an $s(x)$ „anschniegt“.

Beispiel 18.14 Asymptotisches Verhalten einer rationalen Funktion

Wie verhält sich die Funktion für x gegen $\pm\infty$?

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad \text{b) } g(x) = \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$$

Lösung zu 18.14

- a) Der Grad des Zählerpolynoms $p(x) = x^2 - 1$ ist gleich dem des Nennerpolynoms $q(x) = x^2 + 1$. Polynomdivision von $p(x)$ durch $q(x)$ ergibt $x^2 - 1 = 1 \cdot (x^2 + 1) - 2$ bzw.

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}.$$

Diese Funktion verhält sich für große Werte von $|x|$ wie $s(x) = 1$ (denn $\frac{2}{x^2+1}$ geht dann gegen 0). Sie ist in Abbildung 18.6 dargestellt.

- b) Nach Polynomdivision erhalten wir

$$\frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = x + 1 + \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

Die Funktion verhält sich also asymptotisch wie die Gerade $s(x) = x + 1$. Sie ist in Abbildung 18.6 dargestellt. ■

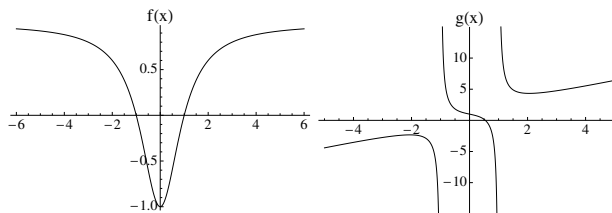


Abbildung 18.6. Rationale Funktionen $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ und $g(x) = \frac{x^3+x^2+x-1}{x^2-1}$.

Im Beispiel 18.14 b) sehen wir eine weitere Eigenschaft, die eine rationale Funktion besitzen kann: Bei Annäherung von x an die Stellen $x = -1$ und $x = 1$ wachsen die Funktionswerte über alle Schranken:

Definition 18.15 Eine Stelle x_0 heißt **Polstelle** einer rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, falls die Funktion f bei x_0 unbeschränkt ist. Man sagt, dass die Funktionswerte dort gegen ∞ bzw. $-\infty$ gehen.

Dass f bei x_0 unbeschränkt ist, soll bedeuten, dass f auf jedem noch so kleinen Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ unbeschränkt ist.

Mathematik für Informatiker

Band 2: Analysis und Statistik

Teschl, G.; Teschl, S.

2014, X, 403 S. 1 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-54273-2