

Für eine unabhängige Stichprobe aus n identisch wie $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilten Beobachtungen x_i sind

Dichte

$$\phi(x) = (2\pi)^{-1/2}(\sigma^2)^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right]$$

Loglikelihood

$$l_{\mathbf{x}}((\mu, \sigma^2)^\top) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

Scorefunktion

$$\mathbf{s}_{\mathbf{x}}((\mu, \sigma^2)^\top) = \left(\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu), \quad \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - \frac{n}{2\sigma^2} \right)^\top$$

FISHER-Informationsmatrix

$$\mathbf{I}((\mu, \sigma^2)^\top) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}$$

ML-Schätzer

$$(\hat{\mu}_{ML}, \hat{\sigma}_{ML}^2)^\top = \left(\bar{x}, \quad \frac{n-1}{n} s^2 \right)^\top$$

Notieren Sie die **Ansätze** zur Herleitung von zweidimensionalen Konfidenzbereichen

- a) nach WALD,
- b) mittels der Scorefunktion,
- c) mittels der Likelihood.

a) nach WALD:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} - \mu, & \frac{n-1}{n}s^2 - \sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{n^2}{(n-1)s^2} & 0 \\ 0 & \frac{n^3}{2(n-1)^2s^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} - \mu \\ \frac{n-1}{n}s^2 - \sigma^2 \end{pmatrix} \stackrel{a}{\sim} \chi_2^2$$

b) mittels der Scorefunktion:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \\ \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - \frac{n}{2\sigma^2} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \\ \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - \frac{n}{2\sigma^2} \end{pmatrix} \stackrel{a}{\sim} \chi_2^2$$

c) mittels der Likelihood:

$$\begin{aligned} -2 \Big[& -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln\left(\frac{n-1}{n}s^2\right) - \frac{1}{2\frac{n-1}{n}s^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ & + \frac{n}{2} \ln(2\pi) + \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \Big] \stackrel{a}{\sim} \chi_2^2 \end{aligned}$$