
Zusammenfassung

Mit dem Stabelement werden die Grundbelastungsarten Zug und Druck beschrieben. Zunächst werden die elementaren Gleichungen aus der Festigkeitslehre vorgestellt. Im Anschluss wird das Stabelement mit den bei der Behandlung mittels der Finite-Elemente-Methode üblichen Definitionen für Kraft- und Verschiebungsgrößen eingeführt. Die Herleitung der Steifigkeitsmatrix wird ausführlich beschrieben. Neben dem einfachen, prismatischen Stab mit festem Querschnitt und konstanten Materialeigenschaften werden in Beispielen und Übungsaufgaben auch allgemeinere Stäbe analysiert, bei denen die Größen entlang der Körperachse variieren.

3.1 Grundlegende Beschreibung zum Zugstab

Im einfachsten Fall lässt sich der Zugstab als prismatischer Körper mit konstanter Querschnittsfläche A und konstantem Elastizitätsmodul E definieren, der in Richtung der Körperachse mit einer Einzelkraft F belastet wird (siehe Abb. 3.1).

Gesucht sind

- die Verlängerung ΔL und
- die Dehnungen (Verzerrungen) ε und Spannungen σ im Inneren des Stabes

in Abhängigkeit der äußeren Last.

Aus der Festigkeitslehre sind die drei elementaren Gleichungen bekannt: Die Kinematik beschreibt mit

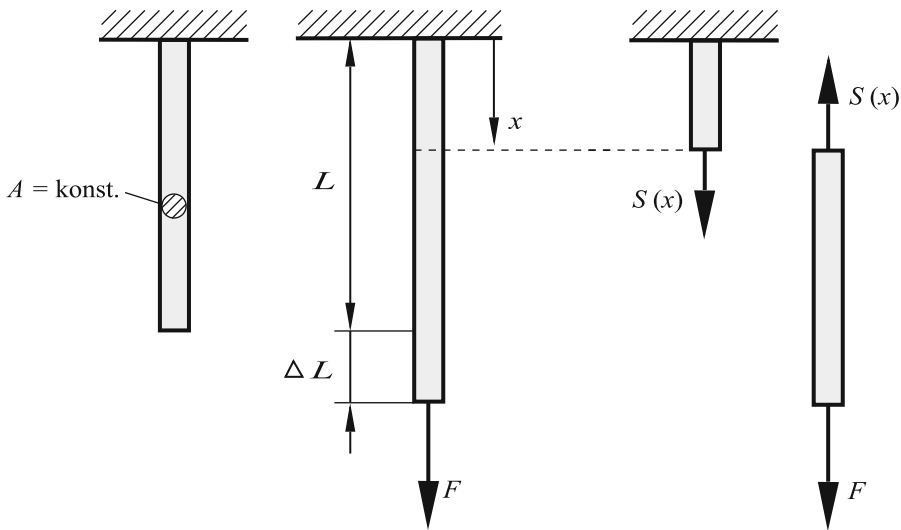


Abb. 3.1 Zugstab unter Einzelast

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{\Delta L}{L} \quad (3.1)$$

die Beziehung zwischen den Verzerrungen $\varepsilon(x)$ und den Verschiebungen $u(x)$. Das Stoffgesetz beschreibt mit

$$\sigma(x) = E \varepsilon(x) \quad (3.2)$$

die Beziehung zwischen den Spannungen $\sigma(x)$ und den Verzerrungen $\varepsilon(x)$ und die Gleichgewichtsbedingung liefert

$$\sigma(x) = \frac{S(x)}{A(x)} = \frac{S(x)}{A} = \frac{F}{A}. \quad (3.3)$$

Mit diesen drei Gleichungen lässt sich sehr zügig der Zusammenhang zwischen der Kraft F und der Längenänderung ΔL des Stabes beschreiben:

$$\frac{F}{A} = \sigma = E \varepsilon = E \frac{\Delta L}{L} \quad (3.4)$$

oder mit

$$F = \frac{EA}{L} \Delta L. \quad (3.5)$$

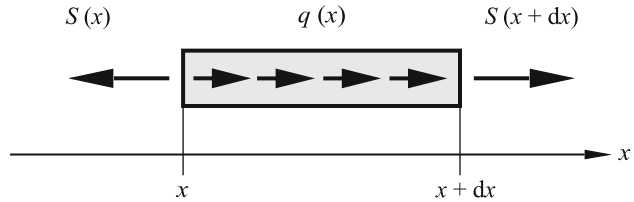
Das Verhältnis zwischen Kraft und Längenänderung wird als Dehnsteifigkeit bezeichnet. Damit ergibt sich für den Stab bzgl. der Zugbelastung¹:

¹ Der Sprachgebrauch Zugstab schließt die Belastung Druck mit ein.

$$\frac{F}{\Delta L} = \frac{EA}{L}. \quad (3.6)$$

Zur Herleitung der Differenzialgleichung wird das Gleichgewicht am infinitesimal kleinen Stabelement betrachtet (siehe Abb. 3.2). Als Last wirkt eine kontinuierlich verteilte Streckenlast $q(x)$ in der Einheit Kraft pro Länge.

Abb. 3.2 Gleichgewicht am infinitesimal kleinen Stabelement



Das Gleichgewicht in Richtung der Körperachse liefert:

$$-S(x) + q(x) dx + S(x + dx) = 0. \quad (3.7)$$

Nach einer Reihenentwicklung von $S(x + dx) = S(x) + dS(x)$ ergibt sich

$$-S(x) + q(x) dx + S(x) + dS(x) = 0 \quad (3.8)$$

oder kurz:

$$\frac{dS(x)}{dx} = -q(x). \quad (3.9)$$

Die Gl. (3.1), (3.2) und (3.3) für die Kinematik, das Stoffgesetz und das Gleichgewicht gelten weiterhin. Setzt man Gl. (3.1) und (3.3) in (3.2) ein, erhält man

$$EA(x) \frac{du(x)}{dx} = S(x). \quad (3.10)$$

Nach Differenziation und Einsetzen von Gl. (3.9) erhält man

$$\frac{d}{dx} \left[EA(x) \frac{du(x)}{dx} \right] + q(x) = 0 \quad (3.11)$$

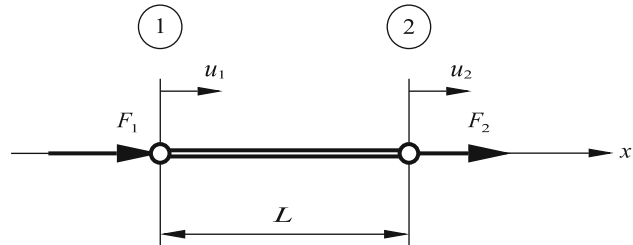
als Differenzialgleichung für einen Stab mit kontinuierlicher Streckenlast. Dies ist eine Differenzialgleichung 2. Ordnung in den Verschiebungen. Bei konstantem Querschnitt A und konstantem Elastizitätsmodul E vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + q(x) = 0. \quad (3.12)$$

3.2 Das Finite Element Zugstab

Der Zugstab sei definiert als prismatischer Körper mit einer Körperachse. An den beiden Enden des Zugstabes werden Knoten eingeführt, an denen Kräfte und Verschiebungen, wie in Abb. 3.3 skizziert, positiv definiert sind.

Abb. 3.3 Definition für das Finite Element Zugstab



Vorrangiges Ziel ist es, für dieses Element eine Steifigkeitsbeziehung in der Form

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{u}_p$$

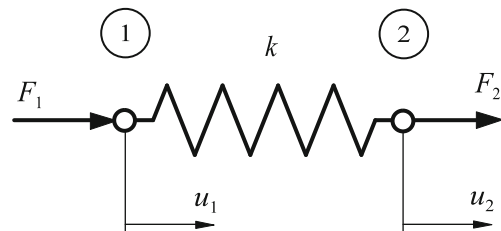
oder

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

zu gewinnen. Mit dieser Steifigkeitsbeziehung kann das Stabelement in ein Tragwerk eingebunden werden. Weiterhin sind die Verschiebungen, die Verzerrungen und die Spannungen *im* Element gesucht.

Zunächst wird ein einfacher Lösungsweg vorgestellt, bei dem der Stab als lineare Feder modelliert wird (Abb. 3.4).

Abb. 3.4 Zugstab modelliert als lineare Feder



Dies ist dann möglich, wenn

- die Querschnittsfläche A und
- der Elastizitätsmodul E

konstant entlang der Körperachse sind. Die zuvor hergeleitete Dehnsteifigkeit des Zugstabes kann dann mit

$$\frac{F}{\Delta L} = \frac{EA}{L} = k \quad (3.14)$$

als Federkonstante oder Federsteifigkeit einer linearen Feder interpretiert werden. Zur Herleitung der für die Finite-Elemente-Methode gewünschten Steifigkeitsbeziehungen wird ein Gedankenexperiment durchgeführt. Lässt man zunächst bei dem Federmodell nur die Federkraft F_2 wirken und blendet die Federkraft F_1 aus, dann beschreibt die Gleichung

$$F_2 = k \Delta u = k(u_2 - u_1) \quad (3.15)$$

die Beziehung zwischen Federkraft und Längenänderung der Feder. Lässt man anschließend nur die Federkraft F_1 wirken und blendet die Federkraft F_2 aus, dann beschreibt die Gleichung

$$F_1 = k \Delta u = k(u_1 - u_2) \quad (3.16)$$

die Beziehung zwischen Federkraft und Längenänderung der Feder. Beide Situationen lassen sich überlagern und kompakt in Matrixform als

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

zusammenfassen. Damit ist die gewünschte Steifigkeitsbeziehung zwischen den Kräften und Verschiebungen an den Knotenpunkten hergeleitet.

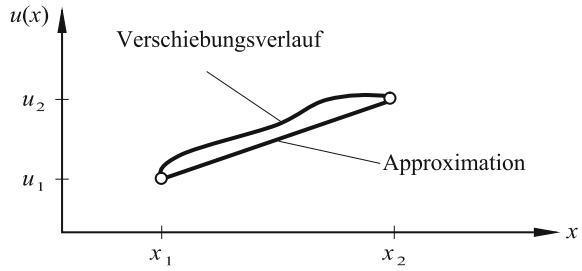
Die Leistungsfähigkeit dieses einfachen Modells ist jedoch begrenzt. So lassen sich keine Aussagen über den Verschiebungs-, Verzerrungs- und Spannungsverlauf im Inneren treffen. Hier ist ein aufwändigeres Modell notwendig. Dieses wird im Folgenden vorgestellt.

Zunächst wird der Verschiebungsverlauf $u^e(x)$ im Inneren eines Stabs durch eine Approximationsfunktion $N(x)$ und die Verschiebungen \mathbf{u}_p an den Knoten beschrieben:

$$u^e(x) = N(x) \mathbf{u}_p. \quad (3.18)$$

Für den Zugstab wird der Verschiebungsverlauf im einfachsten Fall linear approximiert (siehe Abb. 3.5).

Abb. 3.5 Lineare Approximation des Verschiebungsverlaufes im Zugstab



Mit dem Ansatz

$$u^e(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (3.19)$$

lassen sich die Verschiebungen an den Knoten mit

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

beschreiben. Nach der Elimination der α_i ergibt sich für den Verlauf der Verschiebungen:

$$u^e(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} u_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} u_2 \quad (3.21)$$

oder zusammengefasst

$$u^e(x) = \frac{1}{L}(x_2 - x) u_1 + \frac{1}{L}(x - x_1) u_2. \quad (3.22)$$

So lassen sich die Formfunktionen $N_1(x)$ und $N_2(x)$ mit

$$N_1(x) = \frac{1}{L}(x_2 - x) \quad \text{und} \quad N_2(x) = \frac{1}{L}(x - x_1) \quad (3.23)$$

angeben. In kompakter Form ergibt sich damit der Verschiebungsverlauf zu:

$$u^e(x) = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2 = [N_1 \ N_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N}(x) \mathbf{u}_p. \quad (3.24)$$

Über die Kinematikbeziehung ergibt sich der Verlauf der Verzerrungen

$$\varepsilon^e(x) = \frac{d}{dx} u^e(x) = \frac{d}{dx} \mathbf{N}(x) \mathbf{u}_p = \mathbf{B} \mathbf{u}_p \quad (3.25)$$

und mit dem Stoffgesetz der Verlauf der Spannungen zu

$$\sigma^e(x) = E \varepsilon^e(x) = E \mathbf{B} \mathbf{u}_p, \quad (3.26)$$

wobei die Matrix \mathbf{B} für die Ableitung der Formfunktionen eingeführt wird. Für die lineare Approximation des Verschiebungsverlaufes ergeben sich die Ableitungen der Formfunktionen zu:

$$\frac{d}{dx} N_1(x) = -\frac{1}{L}, \quad \frac{d}{dx} N_2(x) = \frac{1}{L} \quad (3.27)$$

und damit die Matrix \mathbf{B} zu

$$\mathbf{B} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Für die Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix muss folgendes Integral

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega \quad (3.29)$$

ausgewertet werden. Die Stoffmatrix \mathbf{D} wird allein durch den Elastizitätsmodul E repräsentiert. Für den Zugstab ergibt sich damit die Steifigkeitsmatrix zu:

$$\mathbf{k}^e = AE \int_L \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L^2} L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

In kompakter Form lautet die Einzelsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{k}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Die Steifigkeitsmatrix lässt sich auch über andere Wege herleiten.

3.2.1 Herleitung über Potenzial

Die elastische Verzerrungsenergie² bei einem eindimensionalen Problem nach Abb. 3.1 mit linear-elastischem Materialverhalten ergibt sich zu:

$$\Pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_x \sigma_x \, d\Omega. \quad (3.32)$$

Ersetzt man die Spannung und Dehnung mittels der Formulierung nach Gl. (3.26) und (3.25) und beachtet, dass $d\Omega = A dx$ gilt, ergibt sich:

$$\Pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_0^L EA (\mathbf{B} \mathbf{u}_p)^T \mathbf{B} \mathbf{u}_p \, dx. \quad (3.33)$$

Berücksichtigt man die Beziehung für die Transponierte eines Produktes zweier Matrizen, das heißt $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$, ergibt sich

$$\Pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_0^L EA \mathbf{u}_p^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{u}_p \, dx. \quad (3.34)$$

² Im allgemeinen dreidimensionalen Fall kann man die Form $\Pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega$ ansetzen, wobei $\boldsymbol{\sigma}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$ die Spaltenmatrix mit den Spannungs- und Verzerrungskomponenten darstellt.

Da die Knotenwerte keine Funktion von x darstellen, können die beiden Spaltenmatrizen aus dem Integral genommen werden:

$$\Pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_p^T \left[\int_0^L E \mathbf{A} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \right] \mathbf{u}_p. \quad (3.35)$$

Unter Berücksichtigung der Definition der \mathbf{B} -Matrix nach Gl. (3.28) ergibt sich hieraus für konstante Dehnsteifigkeit EA :

$$\Pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_p^T \underbrace{\left[\frac{EA}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx \right]}_{\mathbf{k}^e} \mathbf{u}_p. \quad (3.36)$$

Letzte Gleichung entspricht der allgemeinen Formulierung der Verzerrungsenergie eines Finiten Elementes

$$\Pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_p^T \mathbf{k}^e \mathbf{u}_p \quad (3.37)$$

und erlaubt die Identifikation der Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k}^e .

3.2.2 Herleitung über Satz von Castigliano

Ersetzt man in der Formulierung für die elastische Verzerrungsenergie nach Gl. (3.32) die Spannung mittels des HOOKEschen Gesetzes nach Gl. (3.2) und beachtet $d\Omega = A dx$, ergibt sich:

$$\Pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_L EA \varepsilon_x^2 dx. \quad (3.38)$$

Ersetzt man jetzt die Dehnung mittels der kinematischen Beziehung nach Gl. (3.1) und führt den Ansatz für den Verschiebungsverlauf nach Gl. (3.24) ein, ergibt sich die elastische Verzerrungsenergie schließlich für konstante Dehnsteifigkeit EA zu:

$$\Pi_{\text{int}} = \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{dN_1(x)}{dx} u_1 + \frac{dN_2(x)}{dx} u_2 \right)^2 dx. \quad (3.39)$$

Anwendung des Satzes von CASTIGLIANO auf die Verzerrungsenergie in Bezug auf die Knotenverschiebung u_1 ergibt die äußere Kraft F_1 am Knoten 1:

$$\frac{d\Pi_{\text{int}}}{du_1} = F_1 = EA \int_0^L \left(\frac{dN_1(x)}{dx} u_1 + \frac{dN_2(x)}{dx} u_2 \right) \frac{dN_1(x)}{dx} dx. \quad (3.40)$$

Entsprechend ergibt sich aus der Differenziation nach der anderen Verformungsgröße:

$$\frac{d\Pi_{\text{int}}}{du_2} = F_2 = EA \int_0^L \left(\frac{dN_1(x)}{dx} u_1 + \frac{dN_2(x)}{dx} u_2 \right) \frac{dN_2(x)}{dx} dx. \quad (3.41)$$

Die beiden Gleichungen nach (3.40) und (3.41) können zu folgender Formulierung zusammengefasst werden:

$$EA \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{dN_1(x)}{dx} \frac{dN_1(x)}{dx} & \frac{dN_2(x)}{dx} \frac{dN_1(x)}{dx} \\ \frac{dN_1(x)}{dx} \frac{dN_2(x)}{dx} & \frac{dN_2(x)}{dx} \frac{dN_2(x)}{dx} \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Nach Einführung der Formfunktionen nach Gl. (3.23) und Ausführung der Integration ergibt sich hieraus die in Gl. (3.31) gegebene Elementsteifigkeitsmatrix.

3.2.3 Herleitung über das Prinzip der gewichteten Residuen

Im Folgenden wird die Differenzialgleichung für das Verschiebungsfeld nach Gl. (3.12) betrachtet. In dieser Formulierung wurde angenommen, dass die Dehnsteifigkeit EA konstant ist, und es ergibt sich

$$EA \frac{d^2 u^0(x)}{dx^2} + q(x) = 0, \quad (3.43)$$

wobei $u^0(x)$ die exakte Lösung des Problems darstellt. Die letzte Gleichung mit der exakten Lösung ist an jeder Stelle x des Stabes exakt erfüllt und wird auch als *starke Form* des Problems bezeichnet. Wird die exakte Lösung in Gl. (3.43) durch eine Näherungslösung $u(x)$ ersetzt, ergibt sich ein Residuum oder Rest r zu:

$$r = EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + q(x) \neq 0. \quad (3.44)$$

Durch Einführung der Näherungslösung $u(x)$ ist es also im Allgemeinen nicht mehr möglich, die Differenzialgleichung an jeder Stelle x des Stabes zu erfüllen. Alternativ wird im Folgenden gefordert, dass die Differenzialgleichung über einem bestimmten Bereich

(und nicht mehr an jeder Stelle x) erfüllt wird, und man gelangt zu folgender integraler Forderung

$$\int_0^L W(x) \left(EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + q(x) \right) dx \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.45)$$

die auch als *inneres Produkt* bezeichnet wird. In Gl. (3.45) stellt $W(x)$ die sogenannte Gewichtsfunktion dar, die den Fehler oder das Residuum über den betrachteten Bereich verteilt.

Durch partielle Integration³ des ersten Ausdruckes in der Klammer von Gl. (3.45) ergibt sich

$$\int_0^L \underbrace{W}_{f'} EA \underbrace{\frac{d^2 u(x)}{dx^2}}_{g'} dx = EA \left[W(x) \frac{du(x)}{dx} \right]_0^L - EA \int_0^L \frac{dW(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} dx. \quad (3.46)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (3.45) ergibt sich hieraus die sogenannte *schwache Form* des Problems zu:

$$EA \int_0^L \frac{dW(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} dx = EA \left[W \frac{du(x)}{dx} \right]_0^L + \int_0^L W(x) q(x) dx. \quad (3.47)$$

Betrachtet man die schwache Form, so erkennt man, dass durch die partielle Integration eine Ableitung von der Näherungslösung zur Gewichtsfunktion verschoben wurde und sich jetzt bzgl. der Ableitungen eine symmetrische Form ergibt. Diese Symmetrie bzgl. der Ableitung der Näherungslösung und der Gewichtsfunktion wird im Folgenden gewährleisten, dass sich eine symmetrische Elementsteifigkeitsmatrix für das Stabelement ergibt.

Im Folgenden soll zuerst die linke Seite von Gl. (3.47) betrachtet werden, um die Elementsteifigkeitsmatrix für ein lineares Stabelement abzuleiten.

Der Grundgedanke der Finite-Elemente-Methode besteht nun darin, den unbekannten Verschiebungsverlauf $u(x)$ nicht im gesamten Bereich zu approximieren, sondern für einen Unterbereich, den sogenannten Finiten Elementen, den Verschiebungsverlauf mittels

$$u^e(x) = \mathbf{N}(x) \mathbf{u}_p = [N_1 N_2] \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

näherungsweise zu beschreiben. Für die Gewichtsfunktion wird im Rahmen der Finite-Elemente-Methode der gleiche Ansatz wie für die Verschiebungen gewählt:

$$W(x) = [\mathbf{N}(x) \delta \mathbf{u}_p]^T = \delta \mathbf{u}_p^T \mathbf{N}^T(x) = [\delta u_1 \delta u_2] \times \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

³ Eine übliche Darstellung der partiellen Integration zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist: $\int f g' dx = f g - \int f' g dx$.

Eindimensionale Finite Elemente

Ein Einstieg in die Methode

Merkel, M.; Oechsner, A.

2014, XXIII, 428 S. 212 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-54481-1