Kapitel 2
Kinematik

2.1 Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Die Kinematik befasst sich mit der Beschreibung der Bewegung von Massenpunkten, die durch ihre Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung charakterisiert sind. Die Frage danach, was diese Massenpunkte eigentlich sind und was die Ursache für ihre Bewegung ist, wird außer Acht gelassen. Um physikalische Vorgänge zu beschreiben, muss man den Ort der Objekte und dessen Änderung in Raum und Zeit bestimmen. Die Ortsbestimmung im Raum wird üblicherweise mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems (Abb. 2.1) beschrieben, wobei die Ortskoordinaten meistens mit x, y und z bezeichnet werden und die zugehörigen Achsen senkrecht aufeinander stehen. Es ist sinnvoll, die drei Koordinaten zu einem Vektor, dem Ortsvektor $\vec{r}(x, y, z)$ (siehe auch Anhang A.3), zusammenzufassen. Die Wahl des Koordinatenursprungs und des Nullpunktes der Zeit ist willkürlich. Die Bewegung der Atome und Moleküle, aber auch die der ausgedehnten Körper, kann

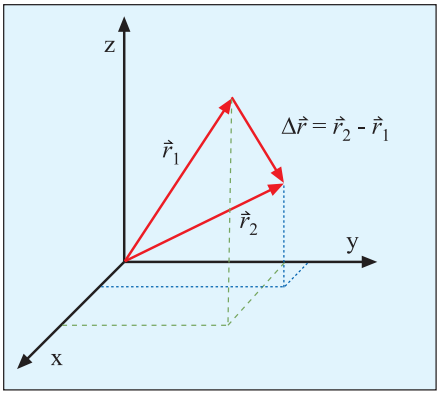


Abb. 2.1 Ein Vektor hat drei Komponenten, in unserem Fall $\vec{r}(x, y, z)$. Die Differenz zweier Vektoren bildet man durch die Differenzen der Komponenten, $\Delta\vec{r}\ (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

B. Povh, E. Soergel, *Anschauliche Physik,*
DOI 10.1007/978-3-642-54496-5_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014

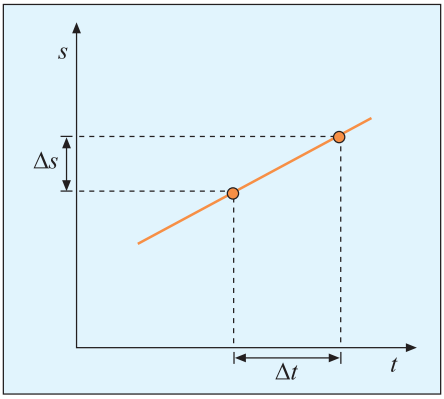


Abb. 2.2 Bei einer gleichförmig-geradlinigen Bewegung nimmt der zurückgelegte Weg s proportional mit der Zeit t zu. Der Proportionalitätsfaktor ist die Geschwindigkeit $v = \Delta s/\Delta t$.

man in die Bewegung ihrer Schwerpunkte und die Rotation um eine der Körperachsen zerlegen. Aus diesem Grund werden wir die Bewegung der Massenpunkte und die Rotation getrennt behandeln und erst anschließend, wenn notwendig, modular zusammenfügen.

Wir betrachten hier nur zwei Beispiele der Bewegung eines Massenpunktes, die gleichförmig-geradlinige und die gleichförmig-beschleunigte Bewegung. Die Rotation eines Massenpunktes um eine Achse ist nur ein Spezialfall der gleichförmig-beschleunigten Bewegung, bei der die Beschleunigung immer senkrecht auf der Geschwindigkeit steht. Anzumerken ist, dass es auch Bewegungen gibt, deren Beschleunigung nicht gleichförmig ist, was aber hier nicht betrachtet werden soll.

Die gleichförmig-geradlinige Bewegung

Bei der gleichförmig-geradlinigen Bewegung bleibt die Geschwindigkeit $\vec{v}$ konstant über die Zeit. Die Bewegung des Objekts kann graphisch wie in Abb. 2.2 dargestellt werden, wobei nur die Bewegung in Richtung einer Raumachse betrachtet wird (beispielsweise $s = x$). Die Geschwindigkeit, das heißt die Ortsänderung pro Zeiteinheit, ist $v = \Delta s/\Delta t$. Bei der gleichförmig-geradlinigen Bewegung ist die gemessene Geschwindigkeit unabhängig vom Zeit- und Wegintervall, in dem gemessen wird.

Die gleichförmig-beschleunigte Bewegung

ist graphisch in Abb. 2.3 dargestellt. Während die Geschwindigkeit linear mit der Zeit zunimmt,

$$v = at\,, \tag{2.1}$$

wobei mit a die Beschleunigung bezeichnet wird, nimmt der Weg quadratisch mit der Zeit zu

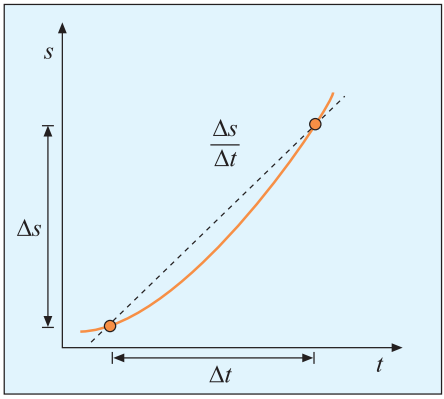


Abb. 2.3 Bei einer gleichförmig-beschleunigten Bewegung hängt die Geschwindigkeit linear ($v = at$) und der Weg quadratisch ($s = at^2/2$) von der Zeit ab. Eine Messung der Geschwindigkeit in einem Intervall Δs liefert eine durchschnittliche Geschwindigkeit in dem Intervall Δs. Sie wird graphisch mit einer Sekante dargestellt, die die Kurve $s(t)$ im Anfangs- und Endpunkt des Intervalls schneidet.

$$s = \frac{1}{2}at^2 \,. \tag{2.2}$$

Die jeweilige Geschwindigkeit ist zeitabhängig und wir müssen die Geschwindigkeitsmessungen innerhalb eines kurzen Zeit- und Wegintervalls ausführen:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \,. \tag{2.3}$$

Wenn wir eine reale Messung durchführen, können wir nicht beliebig kleine Δs- und Δt-Intervalle wählen. Das Resultat dieser Messung ist somit eine durchschnittliche Geschwindigkeit, die graphisch durch eine Sekante (Abb. 2.3) dargestellt werden kann. In manchen Fällen, wie beispielsweise beim freien Fall, ist die Zeitabhängigkeit des Weges bekannt. Unter dieser Voraussetzung können wir uns mathematischer Hilfsmittel bedienen und die momentane Geschwindigkeit definieren als

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \to \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s} \,, \tag{2.4}$$

wobei $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ die Ableitung der Funktion $s(t)$ nach der Zeit bedeutet. Die zeitliche Ableitung notieren wir gerne mit einem Punkt über der abgeleiteten Größe, also in diesem Falle $\dot{s}$. Die geometrische Deutung ist folgende: Die momentane Geschwindigkeit v_1 ist die Tangente der Kurve $s(t)$ zur Zeit t_1 (Abb. 2.4). Wir werden Ableitungen und Integrale von nur wenigen Funktionen explizit benutzen. Diese sind im Anhang A.1 aufgeführt.

Die mit a bezeichnete Beschleunigung ist die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit, beschrieben durch die zeitliche Ableitung $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$. Ziehen wir für die Geschwindigkeit die Beziehung (2.4) heran, erhalten wir für die Beschleunigung

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{s} \,. \tag{2.5}$$

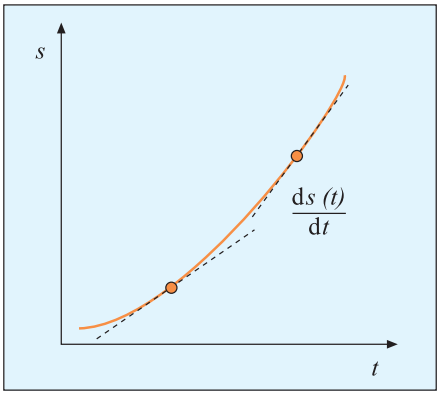


Abb. 2.4 Bei einer gleichförmig-beschleunigten Bewegung hängt der Weg quadratisch ($s = at^2/2$) von der Zeit ab. Die Geschwindigkeit ist die Ableitung von $s(t)$ nach der Zeit $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \dot{s} = at$, graphisch als Tangente dargestellt. Wie im Text erwähnt ist a die Beschleunigung.

Formen wir die Gleichung nach $\ddot{s}$ um und integrieren nach der Zeit von 0 bis t mit den Anfangsbedingungen $s(t = 0) = 0$ und $v(t = 0) = 0$ erhalten wir die Beziehung (2.2).

Im Allgemeinen bezeichnen wir die Beschleunigung mit a, die Beschleunigung speziell durch die Erdanziehung jedoch mit g. Wenn notwendig werden wir die Beschleunigung als Vektor auszeichnen. Berechnen wir noch, wie die Geschwindigkeit von der Strecke s abhängt. Beim freien Fall entspricht s der Fallhöhe h. Aus den Beziehungen (2.1) und (2.2) folgt durch Eliminierung der Zeit t

$$v = \sqrt{2as}\,. \tag{2.6}$$

Etwas eleganter erreicht man die Formel (2.6) durch Differenzierung von der Beziehung (2.2).

2.2 Addition zweier Geschwindigkeiten

Addition zweier gleichförmig-geradliniger Geschwindigkeiten

Betrachten wir als Beispiel ein kleines Boot, das sich auf einem Fluss mit der Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}_\mathrm{f} = (0, |\vec{v}_\mathrm{f}|)$ bewegt. Angetrieben durch einen Ruderer habe das Boot auf ruhendem Wasser die Geschwindigkeit $\vec{v}_\mathrm{b}$.

Wir interessieren uns nun für die Gesamtgeschwindigkeit $\vec{v}_\mathrm{g}$ des Bootes auf dem strömenden Fluss, wahrgenommen von einem ruhenden Beobachter am Flussufer. Hier können wir 2 Fälle unterscheiden:

Im ersten Fall (Abb. 2.5a) bewege sich das Boot parallel zur Strömungsrichtung mit $\vec{v}_\mathrm{b} = (0, |\vec{v}_\mathrm{b}|)$, das heißt die Gesamtgeschwindigkeit $\vec{v}_\mathrm{g}$ ergibt sich aus der Vektorsumme beider Geschwindigkeiten: $\vec{v}_\mathrm{g} = \vec{v}_\mathrm{b} + \vec{v}_\mathrm{f}$. Der Betrag der Geschwindigkeit ist $|\vec{v}_\mathrm{g}| = |\vec{v}_\mathrm{b}| + |\vec{v}_\mathrm{f}|$, falls das Boot in Strömungsrichtung gerudert wird. Bewegt sich der Ruderer gegen die Strömung, so errech-

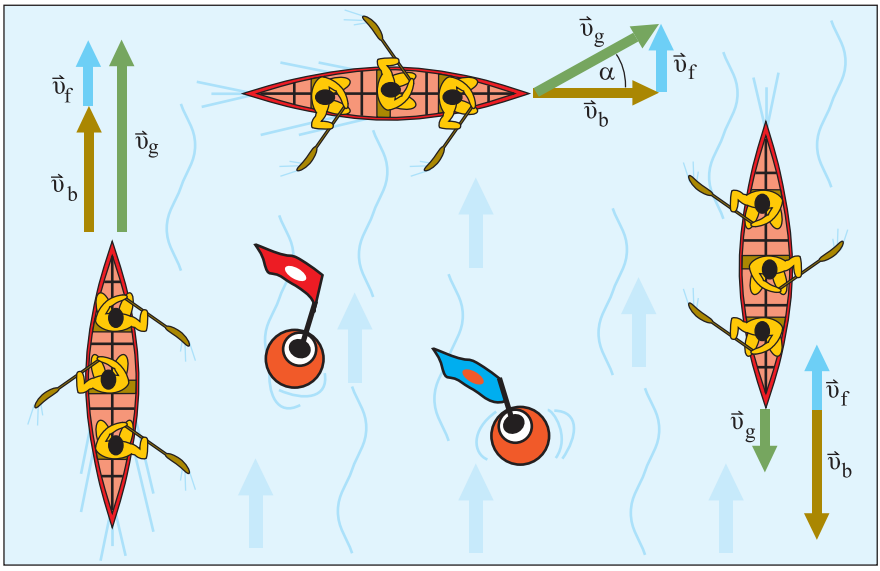


Abb. 2.5
a) Wenn man das Boot in Flussrichtung rudert, addieren sich die Geschwindigkeiten (*unten links* im Bild). Rudert man gegen den Strom (*unten rechts* im Bild), so subtrahieren sie sich.
b) (*Oben* im Bild): Die Strömungsrichtung wählen wir als z-Koordinate, die zu ihr orthogonale Richtung als x-Koordinate. Wird das Boot nun in x-Richtung gesteuert, $v_x = |\vec{v}_b|$, addiert sich orthogonal dazu die Flussgeschwindigkeit $v_z = |\vec{v}_f|$. Die resultierende Bootgeschwindigkeit ist folglich $\vec{v}_g = (v_x, v_z)$. Wie man sieht, fährt das Boot nicht orthogonal zum Strom, sondern unter einem Winkel α, welcher sich durch die Beziehung $\tan\alpha = v_x/v_z$ ergibt.

net sich seine Geschwindigkeit aus der Differenz der Bootsgeschwindigkeit und der des Wassers, $|\vec{v}_g| = |\vec{v}_b| - |\vec{v}_f|$.

Im zweiten Fall (Abb. 2.5b) steuere der Ruderer das Boot mit Geschwindigkeit $\vec{v}_b = (|\vec{v}_b|, 0)$ orthogonal zur Flussrichtung auf das Ufer zu. Der ruhende Beobachter am Ufer sieht, dass sich das Boot auch in diesem Fall mit der Vektorsumme beider Geschwindigkeiten $\vec{v}_g = (|\vec{v}_b|, |\vec{v}_f|)$ fortbewegt. Diese Bewegung verläuft allerdings unter einem Winkel $\tan\alpha = \frac{|\vec{v}_b|}{|\vec{v}_f|}$ mit dem Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}_g| = \sqrt{|\vec{v}_b|^2 + |\vec{v}_f|^2}$.

Addition einer gleichförmig-geradlinigen und einer gleichförmig-beschleunigten Geschwindigkeit

Betrachten wir ein weiteres Beispiel: Wir werfen einen Stein von einer Mauer der Höhe h_0 mit der Abwurfgeschwindigkeit $\vec{v} = (v_x, v_z)$ (Abb. 2.6). Wir betrachten die Bewegung in x- und z-Richtung separat, die resultierende Gesamtbewegung ist nach dem Superpositionsprinzip die Überlagerung beider Bewegungen. Wir unterscheiden 3 Fälle:

Im Fall a) ist $\vec{v}_0 = 0$, das heißt, wir lassen den Stein ohne Anfangsgeschwindigkeit fallen. In diesem Fall landet der Stein im Abstand $x_a = 0$ nach der Zeit $t = \sqrt{2h_0/g}$ auf dem Boden. Wird der Stein aus einer Höhe $h_0 = 10\,\mathrm{m}$ fallen gelassen, so dauert der Fall 1,43 s.

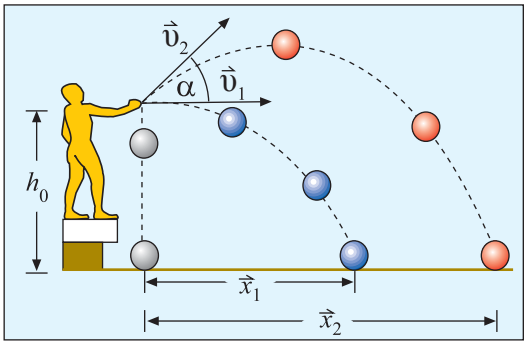


Abb. 2.6 Aus der Höhe $h_0 = 10\,\mathrm{m}$ wirft man einen Stein: (a) vertikal nach unten mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$, (b) horizontal ($\vec{v}_1 = (v_x, 0)$) mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_x = 10$ m/s und (c) unter einem Winkel $\alpha = 45°$ ($\vec{v}_2 = (v_x, v_z)$) und mit einer Anfangsgeschwindigkeit $|\vec{v}_2| = 10$ m/s.

Im Fall b) werfen wir den Stein horizontal mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v_1} = (v_x, 0)$ von der Mauer weg. Zunächst betrachten wir die Bewegung in z-Richtung und sehen, dass für den Fall die gleiche Zeit benötigt wird wie in Fall a), weil die z-Komponente von v_1 null ist. Mit der berechneten Zeit aus a) können wir die zurückgelegte Wegstrecke in x-Richtung berechnen mit $x_1 = v_x t = 14{,}3\,\mathrm{m}$.

Im Fall c) wollen wir den Stein unter 45° zur Horizontalen abwerfen mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_2 = (v_x, v_z)$, wobei wegen des Winkels von 45° gilt: $v_x = v_z = \frac{1}{\sqrt{2}}|\vec{v}_0|$. Wir betrachten die Geschwindigkeitskomponenten wieder separat. Während die Geschwindigkeit in x-Richtung unverändert bleibt, wirkt die Gravitation auf die z-Komponente der Geschwindigkeit: $v_z(t) = v_z(0) - gt$. Am Umkehrpunkt ist $v_z(t_\mathrm{u}) = 0$, woraus sich die Zeit $t_\mathrm{u} = v_z/g = 0{,}72\,\mathrm{s}$ vom Abwurf bis zum Umkehrpunkt bestimmen lässt. Die Maximalhöhe, die der Stein auf seiner Bahn erreicht, beträgt $h_\mathrm{max} = h_0 + \int_0^{t_\mathrm{u}} v_z(t)\,\mathrm{d}t = h_0 + v_z t_\mathrm{u} - \frac{1}{2} g t_\mathrm{u}^2 = 12{,}5\,\mathrm{m}$. Ab dem Umkehr-

punkt können wir die Bewegung wieder als freien Fall aus der Höhe $h_{\max}$ beschreiben und erhalten dafür wieder $t_{\text{fall}} = \sqrt{2h_{\max}/g}$. Mit der Flugzeit $t = t_{\text{u}} + t_{\text{fall}} = 2{,}3\,\text{s}$ lässt sich der Auftreffpunkt in x-Richtung berechnen zu $x_2 = v_x t = 16{,}3\,\text{m}$.

2.3 Kreisbewegung

Bei der Kreisbewegung (Abb. 2.7) steht die Beschleunigung (auch: *Zentripetalbeschleunigung*) immer orthogonal auf der Geschwindigkeit. Wäre dies nicht der Fall, so wäre eine Kreisbewegung schlichtweg unmöglich. Der Betrag der Geschwindigkeit bleibt hierbei konstant, die Richtung ändert sich jedoch. Bei der Kreisbewegung ist es üblich, die Winkelgeschwindigkeit $\omega = v/r$ anzugeben. Die Notwendigkeit dieser Angabe wird offensichtlich, wenn wir mehr als einen rotierenden Massenpunkt betrachten.

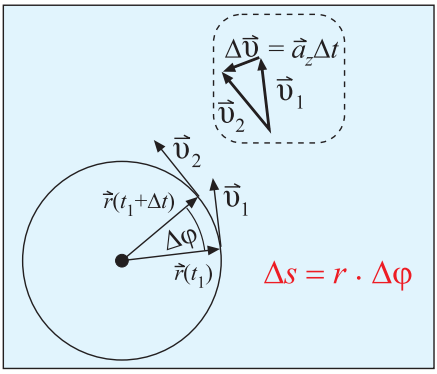


Abb. 2.7 Die Masse m bewegt sich im Kreis, weil die Schnur, die an die Achse gebunden ist, auf die Masse eine Beschleunigung zum Kreismittelpunkt hin ausübt. Diese Beschleunigung heißt Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}_z$. Die Masse legt in der Zeit Δt den Winkel $\Delta\varphi$ zurück. Somit addiert sich zu der Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ der zu ihr senkrecht stehende Vektor $\Delta\vec{v}$ vom Betrag $a_z \Delta t$. Dabei bleibt der Betrag der Geschwindigkeit gleich: $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$.

Stellen wir uns als Beispiel ein Karussell auf dem Kinderspielplatz vor, bei dem die Sitze in unterschiedlichen radialen Abständen von der Drehachse angebracht sind. Betrachten wir nun zwei Kinder, von denen sich das eine einen außen liegenden und das andere einen weiter innen liegenden Sitz ausgesucht hat. Beide Kinder legen pro Zeiteinheit den gleichen Winkel zurück und haben daher die gleiche Winkelgeschwindigkeit ω. Das außen sitzende Kind legt jedoch in der gleichen Zeit eine größere Wegstrecke zurück als das andere Kind und hat daher eine größere Geschwindigkeit $\vec{v}$. Aus diesem Grund ist es wichtig, die Begriffe Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit voneinander zu trennen.

Betrachten wir nun die kinematischen Größen quantitativ. Wie in Abb. 2.7 skizziert, addiert sich auf den Vektor $\vec{v}$ der Vektor $\Delta\vec{v}$ mit dem Betrag $v \times \Delta\varphi$. Der Betrag der Geschwindigkeit ändert sich bei der Drehung nicht. Dreht

sich die Masse mit einer Winkelgeschwindigkeit $\Delta\varphi/\Delta t = \omega$, dann wird sie in Richtung der Drehachse beschleunigt. Der Betrag der zentripetalen Beschleunigung ist

$$a = \frac{v\Delta\varphi}{\Delta t} \longrightarrow a = v \cdot \omega = r \cdot \omega^2 = \frac{v^2}{r}\,. \tag{2.7}$$

Kehren wir nochmals zu unserem Karussell und den beiden Kindern zurück. Nach Formel (2.7) wirkt auf beide Kinder die zur Drehachse hin gerichtete Zentripetalbeschleunigung. Diese ist dafür verantwortlich, dass beide Kinder auf ihrer Kreisbahn gehalten werden. Diese Beschleunigung würde der auf einer Bank sitzende Vater beobachten, der sich selbst nicht mit dem Karussell dreht. Wie verhält sich aber die Situation aus der Perspektive der Kinder? Bereits nach kurzer Zeit wird das außen sitzende Kind ganz grün im Gesicht, während das weiter innen sitzende Kind noch vergnügt mit den Beinen schlänkert. Was die Kinder in ihrem System des sich drehenden Karussells spüren, ist die sogenannte Zentrifugalbeschleunigung. Ein Körper möchte sich stets in die Richtung seiner momentanen Geschwindigkeit weiterbewegen, nämlich gleichförmig-geradlinig. Da es sich aber um eine Kreisbewegung handelt, wird er kontinuierlich abgelenkt und spürt daher die Zentrifugalbeschleunigung, die der Zentripetalbeschleunigung entgegengerichtet ist. Die Kinder werden infolgedessen also nach außen gedrückt. Der Betrag dieser Beschleunigung wächst nach Beziehung (2.7) quadratisch mit der Geschwindigkeit v und ist daher für das außen sitzende Kind höher, weswegen es auch einen stabileren Magen benötigt.

Treiben wir unsere Überlegungen noch etwas weiter. Stellen wir uns vor, das außen sitzende Kind halte einen Plastikball in der Hand. Was passiert, wenn es diesen Ball loslässt? Der Ball ist nun nicht mehr an das sich drehende System des Karussells gekoppelt, weshalb die Zentripetalbeschleunigung nicht mehr auf ihn wirkt. Er fliegt tangential in die Richtung der momentanen Geschwindigkeit vom sich drehenden Karussell weg.

http://www.springer.com/978-3-642-54495-8

Anschauliche Physik
für Naturwissenschaftler
Povh, B.; Soergel, E.
2014, XII, 341 S. 218 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-642-54495-8