1 Reelle Zahlen

1.1 Grundlagen aus der Logik

Aufgabe 1.1
Seien A, B und C Aussagen.

a) Zeigen Sie, dass für diese die Assoziativ-, Distributiv- und Kommutativgesetze sowie die De Morgan'schen Regeln gelten.
b) Zeigen Sie auch das Kontrapositionsgesetz

$$(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Aufgabe 1.2
Seien A und B Aussagen. Zeigen Sie mithilfe von Wahrheitstafeln:

a) $(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A \vee B)$,
b) $[(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)] \;\Leftrightarrow\; (A \Leftrightarrow B)$.

Aufgabe 1.3
Vier Personen sind verdächtigt, einen Diebstahl begangen zu haben. Es gelten folgende Aussagen:

1. Ist Antonia unschuldig, dann ist auch Bastian außer Verdacht, und die Schuld von Christian wäre unzweifelhaft.
2. Christian hat ein absolut sicheres Alibi für die Tat.
3. Ist Bastian schuldig, dann sind auch sowohl Antonia als auch Christian bei den Tätern.
4. Ist Christian unschuldig, dann ist auch David unschuldig.

Wer war am Diebstahl beteiligt? Wandeln Sie dazu die Sätze in logische Ausdrücke um, und gelangen Sie damit zu einer Lösung.

W. Merz, P. Knabner, *Endlich gelöst! Aufgaben zur Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Springer-Lehrbuch, DOI 10.1007/978-3-642-54529-0_1,

Aufgabe 1.4
Es gelten folgende Aussagen:

A: „Das Buch ist klasse,“
B: „alle wollen es lesen.“

Formulieren Sie alle Fälle verbal, bei denen die Implikation $A \Rightarrow B$ wahr bzw. falsch ist.

Aufgabe 1.5
Bilden Sie die Negation des Satzes: „Zu jedem Mann gibt es mindestens eine Frau, die ihn nicht liebt.“

Aufgabe 1.6
Vereinfachen Sie folgenden logischen Ausdruck:

$$(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C).$$

Lösungsvorschläge

Lösung 1.1
Wir fassen zuerst die grundlegenden Verknüpfungen von Aussagen (Negat, Konjunktion, Adjunktion, Implikation, Äquivalenz) nochmals zusammen:

A	$\neg A$
W	F
F	W

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	W	W
W	F	F	F
F	W	W	F
F	F	W	W

Damit ergibt sich dann

a) Wir betrachten stellvertretend das Assoziativgesetz

$$\big(A \vee (B \vee C)\big) \Leftrightarrow \big((A \vee B) \vee C\big):$$

A	B	C	$(B \vee C)$	$(A \vee B)$	$A \vee (B \vee C)$	$(A \vee B) \vee C$	$\Leftrightarrow$
W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	W	W	W	W
W	F	W	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	W	W	W
F	W	W	W	W	W	W	W
F	W	F	W	W	W	W	W
F	F	W	W	F	W	W	W
F	F	F	F	F	F	F	W

und die De Morgan'sche Regel

$$\big(\neg(A \vee B)\big) \Leftrightarrow \big((\neg A) \wedge (\neg B)\big):$$

A	B	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$\Leftrightarrow$
W	W	F	F	W
W	F	F	F	W
F	W	F	F	W
F	F	W	W	W

Der Rest verläuft völlig analog.

b) Das Kontrapositionsgesetz $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$:

A	B	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \Rightarrow B$	$\Leftrightarrow$
W	W	W	W	W
W	F	F	F	W
F	W	W	W	W
F	F	W	W	W

Lösung 1.2

Beide Äquivalenzaussagen sind richtig, was an den nachfolgenden beiden Tafeln abzulesen ist.

a) Es gilt

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$	$\Leftrightarrow$
W	W	W	W	W
W	F	F	F	W
F	W	W	W	W
F	F	W	W	W

http://www.springer.com/978-3-642-54528-3

Endlich gelöst! Aufgaben zur Mathematik für Ingenieure
und Naturwissenschaftler
Lineare Algebra und Analysis in R
Merz, W.; Knabner, P.
2014, XI, 451 S., Softcover
ISBN: 978-3-642-54528-3