1 Grundlagen

Dieses einführende Kapitel besteht aus den beiden Abschnitten „Terme und Aussagen“ und „Bruchrechnung“. Die Erfahrung zeigt, dass diese Dinge zwar in der Schule gelehrt und gelernt werden, dass angehenden Studierenden aber häufig Routine im Umformen von Termen und beim Gebrauch der Bruchrechnung fehlt. Entsprechend soll dieses Kapitel keine vollständige Einführung in die einzelnen Themen geben, sondern motivieren, sich mit den Aufgaben aus Teil II auseinanderzusetzen und damit die mathematisch handwerklichen Fähigkeiten zu üben.

1.1 Terme und Aussagen

1.1.1 Terme

Definition 1.1.1 (Terme)

Terme sind sinnvolle Ausdrücke, die aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen bestehen.

Beispiel 1.1.2

Die folgenden Ausdrücke sind Terme:

$$2x, \quad 16a^3 - 5z, \quad \frac{a^2 - b^2}{a - b}, \quad \sqrt[4]{\sqrt{3} + 1}.$$

Bemerkungen 1.1.3 (Termumformungen, binomische Formeln)

1. Termumformungen kennzeichnet man durch ein Gleichheitszeichen „=“.

   Standard-Umformungen sind Ausklammmern gemeinsamer Faktoren, Ausmultiplizieren und Zusammenfassen ähnlicher Ausdrücke.

G. Hoever, *Vorkurs Mathematik,* DOI 10.1007/978-3-642-54871-0_1,

Beispiele 1.1.3.1

1. $5xy + 10x^2 \;=\; 5x \cdot (y + 2x)$.

2. Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen erhält man

$$\begin{aligned} 5(x+2) - 2(x+1) &= 5x + 10 - (2x+2) \;=\; 5x + 10 - 2x - 2 \\ &= (5-2)x + 10 - 2 \;=\; 3x + 8. \end{aligned}$$

2. Die *binomischen Formeln* stellen Termumformungen dar:

1) $(a+b)^2 \;=\; a^2 + 2ab + b^2$,
2) $(a-b)^2 \;=\; a^2 - 2ab + b^2$,
3) $(a+b)\cdot(a-b) \;=\; a^2 - b^2$.

Die erste binomische Formel kann man sich wie in Abb. 1.1 veranschaulichen:

Das Quadrat mit der Seitenlänge $(a+b)$, also dem Flächeninhalt $(a+b)^2$, besteht aus einem Quadrat der Fläche a^2, einem der Fläche b^2 und zwei Rechtecken mit jeweils der Fläche $a \cdot b$.

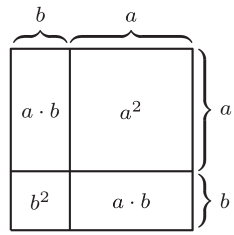

Abb. 1.1 Veranschaulichung der ersten binomischen Formel.

Bemerkung 1.1.4 (Summensymbol)

Manchmal kürzt man Summen gleichartiger Terme mit dem Summensymbol „$\sum$“ ab:

Unter dem Summensymbol steht eine Laufvariable und ihr Startwert, oberhalb wird der Endwert für die Laufvariable notiert; hinter dem Summensymbol steht ein Summand, der (meistens) von der Laufvariablen abhängt. Dieser Ausdruck ist eine Kurzschreibweise für die Summe der Summanden für jeden Wert der Laufvaribalen zwischen Start- und Endwert.

Beispiele 1.1.4.1

1. Es ist

$$\sum_{k=1}^{5} a_k \;=\; a_1 + a_2 + \ldots + a_5.$$

Der Name der Laufvariablen spielt keine Rolle: $\sum\limits_{k=1}^{5} a_k = \sum\limits_{n=1}^{5} a_n$.

2. Es ist $\sum\limits_{n=1}^{3} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$.

1.1.2 Aussagen

Definition 1.1.5 (Aussagen und Aussageformen)

Aussagen sind Sachverhalte, denen man einen Wahrheitswert (*wahr* oder *falsch*) zuordnen kann.

Aussageformen sind Ausdrücke, in denen noch Variablen vorkommen, so dass man ihnen erst nach Einsetzen von Werten für die Variablen einen Wahrheitswert zuordnen kann.

Beispiele 1.1.6

1. Wahre Aussagen sind
   - $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$.
   - Für alle Zahlen a und b gilt $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
   - Deutschland hat mehr als 50 Millionen Einwohner.
2. Falsche Aussagen sind
   - $\frac{18}{24} = \frac{6}{4}$,
   - Deutschland hat weniger als 50 Millionen Einwohner.
3. Aussageformen sind
   - $x = 3$,
   - $a^2 - 6a + 8 = 0$.

Bemerkungen 1.1.7 (Umformung von Aussagen und Aussageformen)

1. Umformungen von Aussagen und Aussageformen kennzeichnet man durch ein Äquivalenzzeichen „$\Leftrightarrow$" oder einen Folgerungspfeil „$\Rightarrow$".

   Eine Äquivalenz „$A \Leftrightarrow B$" bedeutet, dass die Aussagen bzw. Aussageformen A und B (bei Aussageformen für jeden möglichen Wert der auftretenden Variablen) stets den gleichen Wahrheitswert haben („A gilt *genau dann, wenn* B gilt").

   Eine Folgerung „$A \Rightarrow B$" bedeutet, dass immer wenn die Aussage bzw. Aussageformen A gilt, auch B gilt (bei Aussageformen für jeden möglichen Wert der auftretenden Variablen).

Beispiele 1.1.7.1

1. Äquivalenzumformungen sind

$$3x + 2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,$$

$$b^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = 1 \;\text{ oder }\; b = -1.$$

2. Eine Folgerung ist

$$a = 2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 4.$$

Hier gilt keine Äquivalenz, denn die rechte Aussageform „$a^2 = 4$“ wird für $a = -2$ zu einer wahren Aussage, die linke Aussageform „$a = 2$“ allerdings zu der falschen Aussage $-2 = 2$.

Entsprechend wird ein Folgerungspfeil „$\Leftarrow$“ genutzt.

2. Beim Auflösen einer Gleichung (aufgefasst als Aussageform) sind Äquivalenzumformungen wünschenswert.

Beispiel 1.1.7.2

Gesucht sind die Lösungen x zu $3x + 2 = 5$. Durch Äquivalenzumformungen erhält man

$$\begin{array}{rrcl} & 3x+2 & = & 5 \\ \Leftrightarrow & 3x & = & 3 \\ \Leftrightarrow & x & = & 1. \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \Downarrow \mid -2 & \Uparrow \mid +2 \\ \Downarrow \mid :3 & \Uparrow \mid \cdot 3 \end{array}$$

Die Gleichung $3x + 2 = 5$ gilt also genau dann, wenn $x = 1$ ist.

Bemerkung 1.1.8 (Wurzelziehen und Quadrieren)

Wurzelziehen und Quadrieren sind keine Äquivalenzumformungen:

1. Zu $x > 0$ ist $a = \sqrt{x}$ die (eindeutige) positive Lösung von $x^2 = a$, also zum Beispiel $\sqrt{4} = 2$, obwohl auch $x = -2$ Lösung von $x^2 = 4$ ist. Beim Auflösen von quadratischen Gleichungen muss man daher die positive und negative Wurzel berücksichtigen.

Beispiel 1.1.8.1

Es gilt

$$x^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{5} \quad \text{oder} \quad x = -\sqrt{5}.$$

2. Quadrieren ist eine Folgerung, bei der sich weitere Lösungen einschleichen können, so dass man am Ende testen muss, welche der möglichen Lösungen tatsächlich Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind.

Beispiel 1.1.8.2

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $\sqrt{2x+5}-1=x$.

Durch Äquivalenzumformungen und Quadrieren (Folgerung) erhält man

$$\begin{array}{rrcll} & \sqrt{2x+5}-1 & = & x & \\ & & & & \Downarrow \mid +1 \quad \Uparrow \mid -1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2x+5} & = & x+1 & \\ & & & & \Downarrow \mid \text{quadrieren, } \Uparrow \text{ nicht möglich} \\ \Rightarrow & 2x+5 & = & (x+1)^2 & \\ & & & & \text{Termumformung rechts} \\ \Leftrightarrow & 2x+5 & = & x^2+2x+1 & \\ & & & & \Downarrow \mid -2x-1 \quad \Uparrow \mid +2x+1 \\ \Leftrightarrow & 4 & = & x^2 & \\ \Leftrightarrow & & & x=2 \quad \text{oder} \quad x=-2. & \end{array}$$

Dies bedeutet, dass, falls die ursprüngliche Gleichung $\sqrt{2x+5}-1=x$ erfüllt ist, x gleich 2 oder gleich -2 sein muss. Durch Einsetzen sieht man, dass $x=2$ die ursprüngliche Gleichung tatsächlich erfüllt, $x=-2$ hingegen nicht. Damit gilt

$$\sqrt{2x+5}-1=x \quad \Leftrightarrow \quad x=2.$$

1.2 Bruchrechnen

Satz 1.2.1 (Rechenregeln für Brüche)

1. Zwei Brüche *multipliziert* man, indem man Zähler *und* Nenner jeweils *multipliziert.*
2. Zwei Brüche *addiert* bzw. *subtrahiert* man, indem man sie gleichnamig macht und dann die *Zähler addiert* bzw. *subtrahiert.*
3. Man *dividiert* durch einen Bruch, indem man mit dem *Kehrwert multipliziert.*

Beispiele 1.2.2

1. $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7} = \frac{3\cdot 2}{5\cdot 7} = \frac{6}{35}$,
2. $\frac{3}{5}+\frac{2}{7} = \frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}+\frac{2\cdot 5}{7\cdot 5} = \frac{21}{35}+\frac{10}{35} = \frac{31}{35}$,
3. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{b}{a\cdot b}+\frac{a}{a\cdot b} = \frac{b+a}{a\cdot b}$,

4. $$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{10},$$

5. $$\frac{x}{\frac{y}{z}} = x \cdot \frac{z}{y} = \frac{x \cdot z}{y}.$$

Bemerkungen 1.2.3

1. Vor dem Multiplizieren sollte man möglichst kürzen.

   Beispiel 1.2.3.1

   $$\frac{15}{16} \cdot \frac{8}{21} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{14}.$$

2. Beim gleichnamig-Machen reicht das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner, das man z.B. dadurch erhält, dass man die Nenner in Primfaktoren zerlegt und damit die nötigen Primfaktoren für den Hauptnenner bestimmt.

   Beispiel 1.2.3.2

   $$\frac{3}{8} + \frac{5}{12} = \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{9 + 10}{24} = \frac{19}{24}.$$

http://www.springer.com/978-3-642-54870-3

Vorkurs Mathematik
Theorie und Aufgaben mit vollständig durchgerechneten Lösungen
Hoever, G.
2014, X, 292 S. 170 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-54870-3