

Kapitel II

Gewöhnliche Differentialgleichungen

§ 2 Grundlegende Theorie

1 Das allgemeine Anfangswertproblem

1.1 Zielsetzung

Im ersten Band wurde eine Reihe von Differentialgleichungsproblemen behandelt, u.a. die Schwingungsgleichung $\ddot{y} + a\dot{y} + by = f$, die separierte Differentialgleichung $y' = a(x)b(y)$ und lineare Systeme $\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}$ mit symmetrischer Matrix B , jeweils mit geeigneten Anfangsbedingungen.

In allen Fällen ergab sich die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems aus dem Lösungsverfahren: Das Differentialgleichungsproblem konnte auf einfachere Aufgaben zurückgeführt werden wie Aufsuchen einer Stammfunktion, Auflösung einer Gleichung $F(x, y) = 0$, Bestimmung von Polynomnullstellen, oder Diagonalisierung einer Matrix.

Nicht für jeden Differentialgleichungstyp gibt es solche Lösungsverfahren. Außerdem wollen wir Aussagen über qualitatives Verhalten und Gesetzmäßigkeiten der Lösungen machen, ohne diese explizit bestimmen zu müssen. Aus beiden Gründen bedarf es einer Theorie, welche für geeignet formulierte Anfangswertprobleme die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung sicherstellt und ihr Verhalten beschreibt.

1.2 Die allgemeine Form des Anfangswertproblems

(a) Es sei $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion auf einem Gebiet Ω des \mathbb{R}^{n+1} , dessen Punkte wir mit

$$(x, \mathbf{y}) = (x, y_1, \dots, y_n) \text{ oder } (\xi, \boldsymbol{\eta}) = (\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$$

bezeichnen.

Unter einer **Lösung der Differentialgleichung (DG)** $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ verstehen wir eine C^1 -Kurve $\mathbf{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem nicht einpunktigen Intervall I mit

$$(x, \mathbf{u}(x)) \in \Omega \quad \text{und} \quad \mathbf{u}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}(x)) \quad \text{für alle } x \in I,$$

in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= f_1(x, u_1(x), \dots, u_n(x)), \\ &\vdots \\ u_n'(x) &= f_n(x, u_1(x), \dots, u_n(x)). \end{aligned}$$

Wenngleich es sich im Fall $n \geq 2$ um ein **System von Differentialgleichungen 1. Ordnung** handelt, werden wir doch meist von einer **Differentialgleichung (DG)** sprechen. Die Funktion \mathbf{f} heißt traditionsgemäß die **rechte Seite** der Differentialgleichungen. Differentialgleichungen der betrachteten Art werden **explizit** genannt im Gegensatz zu **impliziten Differentialgleichungen** der Form $\mathbf{F}(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') = \mathbf{0}$.

Wie wir gleich zeigen, lässt sich jede explizite DG höherer Ordnung in ein äquivalentes System 1. Ordnung überführen. Bei den folgenden grundlegenden Aussagen über Lösungen betrachten wir daher durchweg Systeme 1. Ordnung.

(b) Das **Anfangswertproblem (AWP)** besteht darin, für einen gegebenen **Anfangspunkt** $(\xi, \boldsymbol{\eta}) \in \Omega$ eine Lösung \mathbf{u} auf einem ξ umfassenden Intervall I mit $\mathbf{u}(\xi) = \boldsymbol{\eta}$ zu finden.

Für diese Aufgabe schreiben wir kurz

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(\xi) = \boldsymbol{\eta}.$$

Das Anfangswertproblem heißt **eindeutig lösbar**, wenn Folgendes gilt: Ist $(\xi, \boldsymbol{\eta})$ ein beliebiger Punkt aus Ω und sind

$$\mathbf{u}_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u}_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Lösungen des AWP $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \mathbf{y}(\xi) = \boldsymbol{\eta}$, so ist

$$\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{u}_2(x) \quad \text{für } x \in I_1 \cap I_2.$$

Wir interessieren uns hier nur für eindeutig lösbare Anfangswertprobleme und fassen die Voraussetzungen über die rechte Seite entsprechend.

1.3 Differentialgleichungen n -ter Ordnung als Systeme erster Ordnung

Eine **explizite DG n -ter Ordnung** hat die Form

$$\mathbf{y}^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Dabei sei f eine auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stetige Funktion. Von einer **Lösung** u in einem nicht einpunktigen Intervall I verlangen wir:

- (a) $u \in C^n(I)$,
- (b) $(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)) \in \Omega$ für $x \in I$,
- (c) $u^{(n)}(x) = f(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x))$ für $x \in I$.

SATZ. Für jede Lösung $u \in C^n(I)$ der DG $\mathbf{y}^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ liefert

$$\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_n) \quad \text{mit} \quad y_1 := u, \quad y_2 := u', \quad \dots, \quad y_n := u^{(n-1)}$$

eine C^1 -differenzierbare Lösung $\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Systems

$$(S) \quad \begin{cases} y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases}$$

Ist umgekehrt $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -differenzierbare Lösung von (S), so ist $u := u_1$ eine C^n -differenzierbare Lösung der Differentialgleichung $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ $\ddot{\text{ÜA}}$.

Daraus ergibt sich die adäquate Form des **Anfangswertproblems für eine DG n -ter Ordnung**:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y(\xi) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_n$$

für einen gegebenen Punkt $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n) = (\xi, \boldsymbol{\eta}) \in \Omega$.

SATZ. Dieses AWP ist eindeutig lösbar genau dann, wenn das AWP (S) mit der Anfangsbedingung $\mathbf{y}(\xi) = \boldsymbol{\eta}$ eindeutig lösbar ist. Es handelt sich also um äquivalente Problemstellungen.

Denn für $u, v \in C^n(I)$ gilt $u = v \iff (u, u', \dots, u^{(n-1)}) = (v, v', \dots, v^{(n-1)})$.

1.4 Systeme von Differentialgleichungen n -ter Ordnung lassen sich auf diesem Wege ebenfalls in Systeme erster Ordnung umwandeln.

$\ddot{\text{ÜA}}$ Führen Sie dies für ein System $\ddot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}$ mit einer 2×2 -Matrix B aus.

2 Das Anfangswertproblem als Integralgleichung

2.1 Integrale von vektorwertigen Funktionen

Für eine vektorwertige Funktion $\mathbf{a}(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))$ mit reell- oder komplexwertigen Funktionen $a_k \in C(I)$ definieren wir das Integral komponentenweise:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{a}(t) dt := \left(\int_{\alpha}^{\beta} a_1(t) dt, \dots, \int_{\alpha}^{\beta} a_n(t) dt \right)$$

$(\alpha, \beta \in I, \text{ auch für } \beta < \alpha)$. Bezüglich des kanonischen Skalarproduktes gilt

$$(*) \quad \left\langle \mathbf{b}, \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{a}(t) dt \right\rangle = \int_{\alpha}^{\beta} \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}(t) \rangle dt,$$

wobei $t \mapsto \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}(t) \rangle$ stetig ist. Auch $\|\mathbf{a}(t)\|$ ist stetig in t , und es gilt die **Integralabschätzung**

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{a}(t) dt \right\| \leq \left| \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{a}(t)\| dt \right|.$$

(Die Betragsstriche auf der rechten Seite tragen der Möglichkeit $\beta < \alpha$ Rechnung.)

Dies ergibt sich für $\alpha < \beta$ aus (*) mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und anschließendem Einsetzen von $\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{a}(t) dt$ für $\mathbf{b} \in \boxed{\text{ÜA}}$. Diese Integralabschätzung gilt auch bezüglich der Norm $\|\mathbf{a}\|_{\infty} = \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\} \in \boxed{\text{ÜA}}$.

2.2 Das Anfangswertproblem in Fixpunktform

Genau dann ist $\mathbf{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung des AWP

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(\xi) = \boldsymbol{\eta},$$

wenn $\mathbf{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig ist und die Integralgleichung

$$\mathbf{u}(x) = \boldsymbol{\eta} + \int_{\xi}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) dt$$

für alle $x \in I$ erfüllt.

Schreiben wir für die rechte Seite dieser Gleichung $T(\mathbf{u})(x)$, so haben wir das AWP auf eine einzige **Fixpunktgleichung** der Gestalt

$$\mathbf{u} = T(\mathbf{u})$$

zurückgeführt, wobei nur nach **stetigen** Lösungen zu suchen ist.

Das folgt sofort aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für die Komponenten des Integrals $\boxed{\text{ÜA}}$.

3 Die Standardvoraussetzung für DG-Systeme

3.1 Die Standardvoraussetzung für die rechte Seite ist in diesem Paragraphen: $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+1} \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ existieren in Ω und sind dort stetige Funktionen, kurz

$$\mathbf{f} \text{ und } D_{\mathbf{y}}\mathbf{f} \text{ sind stetig auf } \Omega, \text{ wobei } D_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, \mathbf{y}) \right).$$

Der Sinn dieser scheinbar unnötig komplizierten Voraussetzung ergibt sich daraus, dass die allgemeine Theorie zwei wichtigen Spezialfällen Rechnung tragen soll:

(a) **Lineare Systeme** $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$. Hier muss zugelassen werden, dass die Komponenten $a_{ik}(x)$ der $n \times n$ -Matrix $A(x)$ und die Komponenten $b_j(x)$ von $\mathbf{b}(x)$ auf einem offenen Intervall I stetig sind. Dann erfüllt die rechte Seite $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$ auf $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$ die Standardvoraussetzung.

(b) **Autonome Systeme** $\mathbf{y}' = \mathbf{g}(\mathbf{y})$, bei denen die rechte Seite nicht explizit von x abhängt. Ist $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \supset \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Abbildung, so erfüllt die Funktion $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) := \mathbf{g}(\mathbf{y})$ auf $\Omega := \mathbb{R} \times \Omega'$ die Standardvoraussetzung. Auf autonome Systeme gehen wir in § 5 näher ein.

3.2 Die Lipschitz-Bedingung

(a) Die rechte Seite \mathbf{f} erfüllt auf einer Teilmenge K von Ω eine **Lipschitz-Bedingung** mit der **Lipschitz-Konstanten** L , in Zeichen

$$\mathbf{f} \in \text{Lip}(K, L),$$

wenn für alle $(x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{z}) \in K$ die Ungleichung

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})\| \leq L \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|$$

erfüllt ist.

(b) **Die Lipschitz-Bedingung für lineare Systeme** $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$. Sind die Komponenten a_{ik} von A und b_i von \mathbf{b} stetig auf einem Intervall I und setzen wir

$$\|A(x)\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}(x)^2 \right)^{1/2},$$

so gilt für $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})\| \leq \|A(x)\|_2 \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|,$$

vgl. Bd.1, § 21 : 7.2. Ist also J ein kompaktes Teilintervall von I und $K = J \times \mathbb{R}^n$, so gilt $\mathbf{f} \in \text{Lip}(K, L)$ mit $L = \max\{\|A(x)\|_2 \mid x \in J\}$.

(c) **SATZ.** *Unter der Standardvoraussetzung 3.1 erfüllt \mathbf{f} eine Lipschitz-Bedingung in jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$, die mit je zwei Punkten (x, \mathbf{y}) , (x, \mathbf{z}) auch die Verbindungsstrecke enthält.*

BEWEIS. Wir setzen (vgl. (b))

$$A(x, \mathbf{y}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, \mathbf{y}) \right), \quad L = \max \left\{ \|A(x, \mathbf{y})\|_2 \mid (x, \mathbf{y}) \in K \right\}.$$

Für $(x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{z}) \in K$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ setzen wir $\varphi(t) := \langle \mathbf{b}, \mathbf{f}(x, \mathbf{z} + t(\mathbf{y} - \mathbf{z})) \rangle$.

Nach dem Mittelwertsatz gilt mit geeignetem $\vartheta \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}, \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z}) \rangle &= \varphi(1) - \varphi(0) \\ &= \langle \mathbf{b}, A(x, \mathbf{z} + \vartheta(\mathbf{y} - \mathbf{z}))(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \rangle \\ &\leq \|\mathbf{b}\| \|A(x, \mathbf{z} + \vartheta(\mathbf{y} - \mathbf{z}))(\mathbf{y} - \mathbf{z})\| \\ &\leq \|\mathbf{b}\| L \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt jetzt mit $\mathbf{b} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})$. □

(d) **Eine Lipschitz-Bedingung für Graphenumgebungen.**

Sei $\mathbf{u} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Kurve, deren Graph

$$G_{\mathbf{u}} := \{(x, \mathbf{u}(x)) \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$$

in Ω liegt. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass der δ -Schlauch

$$S_{\delta}(\mathbf{u}) := \{(x, \mathbf{y}) \mid \alpha \leq x \leq \beta, \|\mathbf{y} - \mathbf{u}(x)\| \leq \delta\}$$

eine kompakte Teilmenge von Ω der in (c) genannten Art ist.

Denn $G_{\mathbf{u}}$ ist als Bildmenge des kompakten Intervalls $[\alpha, \beta]$ unter der stetigen Abbildung $x \mapsto (x, \mathbf{u}(x))$ kompakt. Im Fall $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ ist nichts zu beweisen, andernfalls setzen wir $\delta := \frac{1}{2} \text{dist}(G_{\mathbf{u}}, \partial\Omega)$.

4 Kontrolle und Eindeutigkeit von Lösungen

4.1 Abstandskontrolle von Lösungen

Seien $\mathbf{u}_0, \mathbf{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\mathbf{u}'_0 = \mathbf{f}_0(x, \mathbf{u}_0), \quad \mathbf{u}_0(\xi_0) = \boldsymbol{\eta}_0 \quad \text{und} \quad \mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(\xi) = \boldsymbol{\eta}.$$

Gesucht ist eine Abschätzung für den Abstand $\varrho(x) := \|\mathbf{u}_0(x) - \mathbf{u}(x)\|$ der beiden Lösungen in Abhängigkeit von den Abweichungen der Ausgangsdaten

$$\|\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}\|, \quad |\xi_0 - \xi|, \quad \|\boldsymbol{\eta}_0 - \boldsymbol{\eta}\|.$$

Wir setzen voraus, dass beide Lösungsgraphen in einer kompakten Teilmenge K von Ω verlaufen und dass $\mathbf{f}_0 \in \text{Lip}(K, L)$ gilt. Ferner setzen wir

$$M := \max \{\|\mathbf{f}_0(x, \mathbf{y})\| \mid (x, \mathbf{y}) \in K\},$$

$$\varepsilon_1 := \max \{\|\mathbf{f}_0(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y})\| \mid (x, \mathbf{y}) \in K\}.$$

Dann ergibt sich aus der Fixpunktform 2.2 der beiden Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned}
\varrho(x) &= \|\mathbf{u}_0(x) - \mathbf{u}(x)\| = \left\| \boldsymbol{\eta}_0 + \int_{\xi_0}^x \mathbf{f}_0(t, \mathbf{u}_0(t)) dt - \boldsymbol{\eta} - \int_{\xi}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) dt \right\| \\
&= \left\| \boldsymbol{\eta}_0 - \boldsymbol{\eta} + \int_{\xi}^x \left((\mathbf{f}_0(t, \mathbf{u}_0(t)) - \mathbf{f}_0(t, \mathbf{u}(t))) + (\mathbf{f}_0(t, \mathbf{u}(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))) \right) dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{\xi_0}^{\xi} \mathbf{f}_0(t, \mathbf{u}_0(t)) dt \right\| \\
&\leq \|\boldsymbol{\eta}_0 - \boldsymbol{\eta}\| + \left| \int_{\xi}^x (L \|\mathbf{u}_0(t) - \mathbf{u}(t)\| + \varepsilon_1) dt \right| + |\xi_0 - \xi| M.
\end{aligned}$$

Daher gilt mit $\varepsilon_0 := \|\boldsymbol{\eta}_0 - \boldsymbol{\eta}\| + |\xi_0 - \xi| M$

$$(*) \quad \varrho(x) \leq \varepsilon_0 + \left| \int_{\xi}^x (L \varrho(t) + \varepsilon_1) dt \right|.$$

Um daraus eine Abschätzung für $\varrho(x)$ zu gewinnen, dient uns

4.2 Das Lemma von Gronwall

Genügt eine stetige Funktion $\varrho : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ der Integralungleichung $(*)$ mit Konstanten $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \geq 0$ und $L > 0$, so gilt für $x \in I$

$$\varrho(x) \leq \varepsilon_0 e^{L|x-\xi|} + \frac{\varepsilon_1}{L} (e^{L|x-\xi|} - 1).$$

BEWEIS.

$$\text{Wir setzen } h(x) := \varepsilon_0 + \left| \int_{\xi}^x (L \varrho(t) + \varepsilon_1) dt \right|.$$

Die Funktion h ist stetig und es gilt $\varrho(x) \leq h(x)$. Zwar existiert $h'(\xi)$ nicht, aber die Einschränkungen von h auf $\{x \in I \mid x < \xi\}$ und $\{x \in I \mid x > \xi\}$ sind C^1 -differenzierbar. Für $x < \xi$ gilt

$$h'(x) = -L \varrho(x) - \varepsilon_1 \geq -L h(x) - \varepsilon_1,$$

$$\frac{d}{dt} (e^{Lt} h(t)) = L e^{Lt} h(t) + e^{Lt} h'(t) \geq -\varepsilon_1 e^{Lt}.$$

Integration von x bis ξ ergibt

$$e^{L\xi} \varepsilon_0 - e^{Lx} h(x) = e^{L\xi} h(\xi) - e^{Lx} h(x) \geq \frac{\varepsilon_1}{L} (e^{Lx} - e^{L\xi}).$$

Daraus folgt

$$\varrho(x) \leq h(x) \leq \varepsilon_0 e^{L(x-\xi)} + \frac{\varepsilon_1}{L} (e^{L(x-\xi)} - 1).$$

Der Fall $x > \xi$ ergibt sich analog (Integration von $\frac{d}{dt} (e^{-Lt} h(t))$ von ξ bis x). \square

4.3 Der Eindeutigkeitssatz

Unter der Standardvoraussetzung 3.1 hat das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(\xi) = \boldsymbol{\eta}$$

höchstens eine Lösung.

BEWEIS.

Angenommen, für zwei Lösungen $\mathbf{u}_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ dieses AWP gibt es ein $s \in I \cap J$ mit $\mathbf{u}_0(s) \neq \mathbf{u}(s)$, o.B.d.A. $s > \xi$. Dann existiert

$$x_0 := \inf \{x > \xi \mid \mathbf{u}_0(x) \neq \mathbf{u}(x)\},$$

und es gilt $\mathbf{u}_0(x_0) = \mathbf{u}(x_0) =: \mathbf{y}_0$. Wir wählen eine Graphenumgebung

$$K = \{(x, \mathbf{y}) \mid |x - x_0| \leq r, \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{u}_0(x)\| \leq \delta\} \subset \Omega$$

für \mathbf{u}_0 , wobei wir $r > 0$ so wählen, dass

$$\varrho(x) := \|\mathbf{u}_0(x) - \mathbf{u}(x)\| \leq \delta, \quad \text{d.h. } (x, \mathbf{u}(x)) \in K \quad \text{für } |x - x_0| \leq r.$$

Nach 3.2 (d) gibt es eine Lipschitzkonstante L für \mathbf{f} in K . Aus 4.1 folgt mit $\xi = \xi_0 := x_0$, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_0 := \mathbf{y}_0$ und $\mathbf{f}_0 := \mathbf{f}$ (also $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 = 0$)

$$\varrho(x) \leq \int_{x_0}^x L \varrho(t) dt \quad \text{für } x_0 \leq x < x_0 + r.$$

Nach dem Gronwallschen Lemma ergibt sich hieraus $\varrho(x) = 0$, d.h. $\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}_0(x)$ für $x_0 \leq x \leq x_0 + r$, was im Widerspruch zur Wahl von x_0 steht. \square

5 Existenz von Lösungen

5.1 Das Iterationsverfahren von Picard–Lindelöf

Unter der Standardvoraussetzung 3.1 gibt es zu jedem Punkt $(\xi, \boldsymbol{\eta}) \in \Omega$ eine lokale Lösung des Anfangswertproblems

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(\xi) = \boldsymbol{\eta},$$

d.h. es gibt eine eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall $I = [\xi - \delta, \xi + \delta]$ mit $\delta > 0$. Diese ist gleichmäßiger Limes der **Picard–Iterierten** \mathbf{u}_k , gegeben durch die Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(x) &= \boldsymbol{\eta}, \\ \mathbf{u}_{k+1}(x) &= \boldsymbol{\eta} + \int_{\xi}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_k(t)) dt \quad \text{für } k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

BEWEIS.

(a) *Wahl von δ .* Wir bestimmen zunächst $r > 0$, $R > 0$ so, dass der Zylinder

$$Z = \{(x, \mathbf{y}) \mid |x - \xi| \leq r, \|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}\| \leq R\}$$

ganz in Ω liegt. Ist $M = \max\{\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y})\| \mid (x, \mathbf{y}) \in Z\}$, so wählen wir $\delta > 0$ so, dass $\delta \leq r$ und $\delta M \leq R$.

Nun setzen wir

$$K := \{(x, \mathbf{y}) \mid |x - \xi| \leq \delta, \|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}\| \leq R\}$$

und wählen eine Lipschitzkonstante L für \mathbf{f} auf K gemäß 3.2(c).

(b) *Durchführbarkeit des Iterationsverfahrens.* Wir zeigen per Induktion, dass der Graph der Iterierten \mathbf{u}_k in K liegt. Für \mathbf{u}_0 ist das richtig. Liegt $(x, \mathbf{u}_k(x))$ für $|x - \xi| \leq \delta$ in K , so folgt

$$\|\mathbf{u}_{k+1}(x) - \boldsymbol{\eta}\| \leq \left| \int_{\xi}^x \|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}_k(t))\| dt \right| \leq M |x - \xi| \leq M \delta \leq R.$$

(c) *Die gleichmäßige Konvergenz der Picard-Iterierten \mathbf{u}_k .*

Zunächst ist nach (b) $\|\mathbf{u}_1(x) - \mathbf{u}_0(x)\| = \|\mathbf{u}_1(x) - \boldsymbol{\eta}\| \leq R$. Allgemein gilt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_{k+1}(x) - \mathbf{u}_k(x)\| &= \left\| \int_{\xi}^x [\mathbf{f}(t, \mathbf{u}_k(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_{k-1}(t))] dt \right\| \\ &\leq \left| \int_{\xi}^x \|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}_k(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_{k-1}(t))\| dt \right| \\ &\leq L \left| \int_{\xi}^x \|\mathbf{u}_k(t) - \mathbf{u}_{k-1}(t)\| dt \right|. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich sukzessive

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_2(x) - \mathbf{u}_1(x)\| &\leq L \left| \int_{\xi}^x \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_0(t)\| dt \right| \leq RL |x - \xi|, \\ \|\mathbf{u}_3(x) - \mathbf{u}_2(x)\| &\leq L \left| \int_{\xi}^x RL |t - \xi| dt \right| = RL^2 \frac{|x - \xi|^2}{2}. \end{aligned}$$

Durch Induktion erhalten wir für $k = 0, 1, \dots$ ÜA

$$(*) \quad \|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\| \leq R \frac{(L|x - \xi|)^k}{k!} \leq R \frac{(L\delta)^k}{k!}.$$

Also konvergiert jede Komponente von

$$\mathbf{u}_{k+1}(x) = \boldsymbol{\eta} + \sum_{j=0}^k (\mathbf{u}_{j+1}(x) - \mathbf{u}_j(x))$$

gleichmäßig auf $I = [\xi - \delta, \xi + \delta]$, denn die Komponenten der Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{u}_{j+1}(x) - \mathbf{u}_j(x)) \quad \text{haben nach (*) die Majorante } R \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\delta L)^j}{j!}.$$

(d) $\mathbf{u} := \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}_k$ löst das Anfangswertproblem auf I . Denn die Komponenten von \mathbf{u} sind stetig als gleichmäßige Limites stetiger Funktionen. Da K abgeschlossen ist, liegt der Graph von \mathbf{u} in K . Aus

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_k(t))\| \leq L \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_k(t)\|$$

folgt die gleichmäßige Konvergenz $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}_k(t)) \rightarrow \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$, somit

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}_{k+1}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\boldsymbol{\eta} + \int_{\xi}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_k(t)) dt \right) \\ &= \boldsymbol{\eta} + \int_{\xi}^x \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_k(t)) dt = \boldsymbol{\eta} + \int_{\xi}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) dt. \end{aligned}$$

Damit ist $\mathbf{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung des AWP nach 2.2. □

5.2 Aufgaben

(a) Sei $n = 1$ und $f(x, y) = x\sqrt{|y|}$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Warum kann f in $[-1, 1] \times [-1, 1]$ keine Lipschitz-Bedingung erfüllen?

(b) **Das Anwachsen der Lösung.** Mit den Bezeichnungen des Beweises 5.1 gilt $\|\mathbf{u}(x) - \boldsymbol{\eta}\| \leq R e^{L|x-\xi|}$. Begründung?

(c) Führen Sie die Picard-Iteration für das AWP

$$y_1' = \frac{2}{x} y_2, \quad y_2' = \frac{1}{2x} y_1, \quad y_1(1) = 2, \quad y_2(1) = 1$$

in $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ durch. Es ergibt sich ein einfaches Resultat.

(d) **Fehlerabschätzung für das Iterationsverfahren.** Zeigen Sie mit Hilfe der Fixpunktgleichung für die Lösung \mathbf{u} und mittels Induktion, dass für die Picard-Iterierte \mathbf{u}_k unter den Voraussetzungen 5.1 (a) Folgendes gilt:

$$\|\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}_k(x)\| \leq M L^k \frac{|x - \xi|^{k+1}}{(k+1)!} \quad \text{für } |x - \xi| \leq \delta.$$

(e) Sei u die Lösung des AWP $y' = 1 + 3x^2 + \frac{1}{4}y^2$, $y(0) = 0$ auf dem Intervall $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Geben Sie ein Polynom p an mit $|u(x) - p(x)| \leq 0.02$ für $x \in I$.

Anleitung: Um die Fehlerabschätzung (d) anwenden zu können, ist zunächst ein Rechteck $K_R = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-R, R]$ so zu bestimmen, dass die Graphen

Mathematik für Physiker Band 2

Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen,
mathematische Grundlagen der Quantenmechanik

Fischer, H.; Kaul, H.

2014, XII, 740 S. 99 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-00476-7