

Computersimulation zum Versuch ‚Drehpendel – M. 2.3.2 Nichtlineare Schwingungen‘

Simulation von Schwingungen, chaotischen Schwingungen und Bifurkationen
für das Drehpendel nach Pohl mit Zusatzmasse

W. Oehme, T. Hemmer, W. Schenk

Der physikalischen Betrachtung liegt das in Abb. 1 schematisch dargestellte Pohlsche Drehpendel zugrunde. Es ist mit einer Zusatzmasse m ausgestattet, die an dem Ruhewinkel des Drehpendels angebracht wird. Auf das Drehpendel wirkt durch die Spiralfeder das Drehmoment

$$M_s = -D \varphi, \quad (1)$$

wobei D das Direktions- bzw. Richtmoment der Feder und φ die Auslenkung des Drehpendels aus der Ruhelage sind.

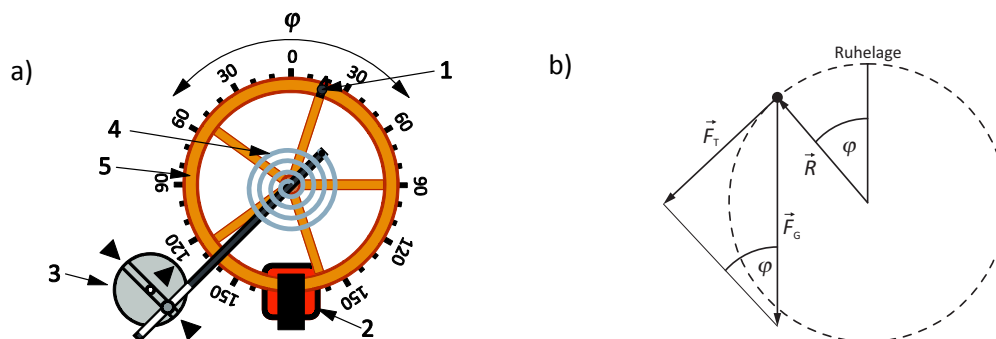


Abb. 1 Pohlsches Drehpendel mit Unwucht. (a) 1: Zusatzmasse, 2: Wirbelstrombremse, 3: Antrieb, 4: Spiralfeder, 5: Drehpendel. (b) Kräfte diagramm

Das Drehpendel wird durch Reibung (Gleitreibung, Moment $M_{d,G}$) und durch die Wirbelstrombremse (Moment $M_{d,I}$) gedämpft. Damit ergibt sich als Moment, das die Dämpfung beschreibt,

$$M_d = M_{d,I} + M_{d,G} = -\gamma \dot{\varphi} - \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|} k_{d,G}. \quad (2a)$$

Die Gleitreibung berücksichtigt die annähernd konstante Lagerreibung, die unabhängig von der eingestellten Stromstärke für die Wirbelstrombremse für kleine Winkelgeschwindigkeiten nicht vernachlässigt werden kann. Sie kann demzufolge die Schwingung in der Nähe der Umkehrpunkte und dadurch das Studium des Bifurkationseinstellungen wesentlich beeinflussen.

Der Faktor $\frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|}$ in Gl.(2a) berücksichtigt eine konstante Bremswirkung, unabhängig von Betrag und Vorzeichen der aktuellen Winkelgeschwindigkeit.

Für den Reibungskoeffizienten γ gilt

$$\gamma = 2 \delta J_0 \quad (2b)$$

bzw. die zugeschnittene Größengleichung

$$\gamma = k_{d,I} I^2. \quad (2c)$$

Es sind J das Trägheitsmoment des Drehpendels, δ der Abklingkoeffizient, $k_{d,I}$ eine Proportional-

litätskonstante zwischen I^2 und der durch die Wirbelstrombremse verursachten Dämpfung, I die Stärke des Dämpfungsstroms sowie $k_{d,G}$ eine Proportionalitätskonstante zur Berücksichtigung der Gleitreibung. Die Zusatzmasse (Trägheitsmoment $J_z = m R^2$) erzeugt das Drehmoment (vgl. Abb. 1b)

$$\vec{M}_m = \vec{R} \times \vec{F}_G, \quad |\vec{M}_m| = F_G R \sin \varphi = m g R \sin \varphi. \quad (3)$$

R bezeichnet den Abstand zwischen dem Massenmittelpunkt der Zusatzmasse und der Drehachse. Der Antrieb bedingt das Drehmoment

$$M_A = M_0 \sin(\omega_0 t), \quad (4)$$

wobei M_0 die Amplitude und ω_0 die Kreisfrequenz des antreibenden Drehmoments darstellen.

Als Drehmomentbilanz der Beträge folgt

$$M_{\text{ges}} = M_s + M_d + M_m + M_A, \quad (5)$$

$$(J + m R^2) \ddot{\varphi} = -D \varphi - \gamma \dot{\varphi} - \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|} k_{d,G} + m g R \sin \varphi + M_0 \sin(\omega_0 t). \quad (6)$$

Daraus ergibt sich das für die Simulation verwendete Differentialgleichungssystem

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad (7a)$$

$$\dot{\omega} = \frac{-D \varphi - k_{d,I} I^2 \dot{\varphi} - \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|} k_{d,G} + m g R \sin \varphi + M_0 \sin(\omega_0 t)}{J + m R^2}. \quad (7b)$$

Das für diesen Versuch bereit gestellte Programm (Computer Algebra System ‚Maxima‘) berechnet den zeitlichen Verlauf der Auslenkung aus der Ruhelage nach einer Einschwingphase sowie das Phasenraumdiagramm. Die Anfangsbedingungen werden im Programm vorgegeben, da nur das Verhalten des Drehpendels nach dem Einschwingen betrachtet wird. Die Lösung des Differentialgleichungssystems wird durch das Runge-Kutta-Verfahren realisiert.

Tab. 1: Übersicht der verwendeten Größen und Quellcode-Symbole im Simulationsprogramm

Formelzeichen	Bezeichnung	Bezeichnung im Quellcode
J	Trägheitsmoment des Drehpendels	J0
m	Zusatzmasse	m
R	Abstand der Zusatzmasse zur Drehachse	R
D	Direktionsmoment	D
$k_{d,I}$	Proportionalitätskonstante zwischen I^2 und der Dämpfung durch die Wirbelstrombremse, entspricht Regressionsparameter b im Versuch M.2.3.2	kdl
$k_{d,G}$	Proportionalitätskonstante zur Berechnung der Gleitreibung, entspricht Regressionsparameter a im Versuch M.2.3.2	kdG
I	Stromstärke des Dämpfungsstroms	I
M_0	Amplitude des antreibenden Drehmoments	M0
ω_0 T_0	Kreisfrequenz des antreibenden Drehmoments Periodendauer $2\pi/\omega_0$	omega0 T0
φ	Auslenkung	phi
$\dot{\varphi} \equiv \omega$	Winkelgeschwindigkeit	omega

Während die Größen von m und R bekannt sind, werden die Werte J , D , ω_0 sowie $k_{d,I}$ und $k_{d,G}$ experimentell bestimmt. Die Werte der beiden Proportionalitätskonstanten $k_{d,I}$ und $k_{d,G}$ können mit Hilfe einer Messung zur Abhängigkeit des Abklingkoeffizienten δ in Abhängigkeit von der Stromstärke I , die durch den Elektromagneten der Wirbelstrombremse fließt, ermittelt werden. Stellt man γ ($\gamma = 2\delta J$) in Abhängigkeit von I^2 grafisch dar, so ergeben sich mittels linearer Regression $k_{d,I}$ als Steigung und $k_{d,G}$ näherungsweise als Achsenabschnitt entsprechend $k_{d,G} \approx \gamma (I \rightarrow 0)$. Der Koeffizient der Gleitreibung $k_{d,G}$ müsste korrekterweise durch eine lineare Näherung des Abklingens der freien Schwingung ($I = 0$) abgeschätzt werden. Dazu wird in Analogie zur linearen Federschwingung (Federkonstante c) die Energiebilanz betrachtet. Für die lineare Schwingung mit Gleitreibung erhält man für zwei aufeinanderfolgende Amplituden \hat{x}_1 und \hat{x}_2 bei konstanter Reibungskraft $F_{R,G}$ für die durch die Gleitreibung bedingte Energieabnahme

$$W_{R,G} = F_{R,G} (\hat{x}_1 + \hat{x}_2) = \frac{1}{2} c \hat{x}_1^2 - \frac{1}{2} c \hat{x}_2^2 = \frac{1}{2} c (\hat{x}_1 - \hat{x}_2) (\hat{x}_1 + \hat{x}_2).$$

Damit ergibt sich für die Reibungskraft $F_{R,G} = \frac{1}{2} c (\hat{x}_1 - \hat{x}_2)$ und es folgt entsprechend für das bremsende Drehmoment $M_{d,G} = k_{d,G} = \frac{1}{2} D (\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2)$.

Sind alle für die Simulation erforderlichen Größen entsprechend Tab. 1 bekannt, werden diese in der vom Quelltext vorgegebenen Stelle eingegeben (siehe Beispiele unten).

Beispieldaten für die Simulation des Drehpendels mit Zusatzmasse

Im Programm müssen für das getestete Drehpendel folgende Parameter eingegeben werden, um die Simulation nahe den experimentellen Bedingungen zu ermöglichen:

T_0 (ca. zweifache Eigenperiodendauer): $3,6 - 4 \text{ s}^{-1}$

f_0 (Eigenfrequenz): $0,553 \text{ Hz}$

D (Direktionsmoment der Feder): $0,0254 \text{ N m}$

J (Trägheitsmoment des Drehpendels): $0,0021 \text{ N m s}^2$

R (Abstand zwischen Zusatzmasse und Drehachse): $0,090 \text{ m}$

M (Zusatzmasse): $28 \text{ g} \dots 33 \text{ g}$

M_0 (max. Drehmoment der ausgewählten Zusatzmasse): $0,0015 - 0,0029 \text{ N m}$

A_{\max} (max. Anregungswinkel: $3^\circ - 4,5^\circ$); $0,05 - 0,08 \text{ rad}$

$k_{d,l}$ (Fit-Funktion $\gamma = k_{d,G} + k_{d,l} I^2$): $0,0052 \text{ N m s A}^{-2}$

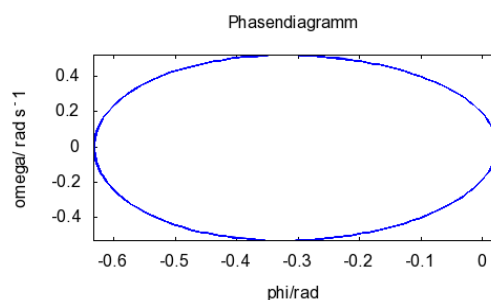
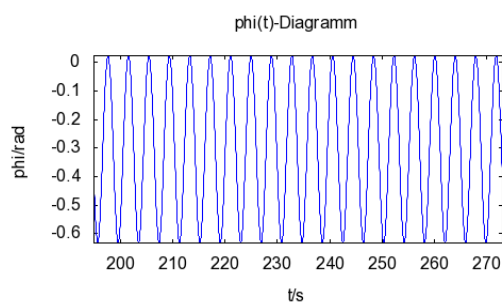
$k_{d,G}$ (Fit-Funktion $\gamma = k_{d,G} + k_{d,l} I^2$): $6,25\text{E-}5 \text{ N m}$

Beispiele von Simulationen durch die Variation der Stärke des Dämpfungsstroms

Die Werte der jeweiligen Größen können im zur Verfügung gestellten Quellcode des Programms verändert werden (Dezimalpunkt beachten) und nach dem Start der Neuberechnung mit <StrgR> werden der zeitliche Verlauf der Auslenkung aus der Ruhelage sowie das Phasenraumdiagramm grafisch neu dargestellt.

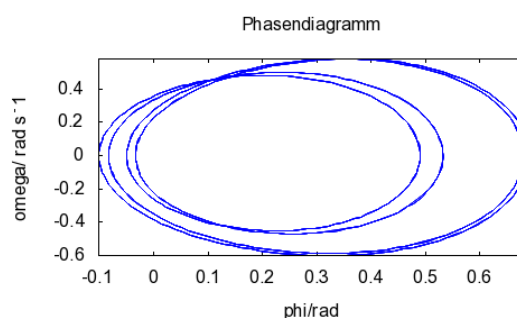
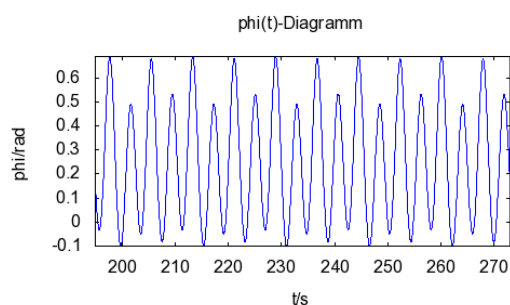
1. Beispiel (Grundschiwingung)

J_0 (kg m^2)	m (kg)	R (m)	D (N m)	$k_{d,G}$ (N m)	$k_{d,l}$ (N m s A^{-2})	M_0 (N m)	T_0 (s)	I (A)
0.0021	0.030	0.090	0.0254	6.25E-5	0.0052	0.002	3.9	0.50



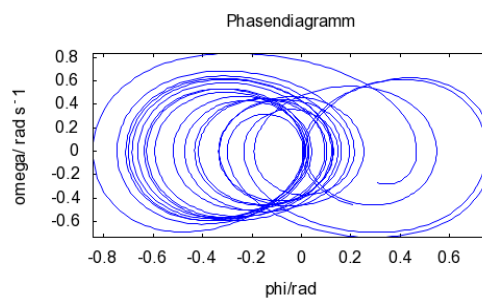
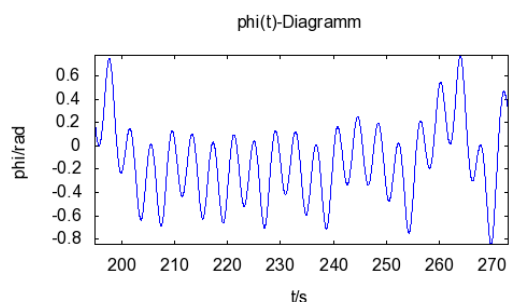
2. Beispiel (2. Bifurkation)

J_0 (kg m^2)	m (kg)	R (m)	D (N m)	kdG (N m)	kdl (N m s A^{-2})	M_0 (N m)	T_0 (s)	I (A)
0.0021	0.030	0.090	0.0254	6.25E-5	0.0052	0.002	3.9	0.40



3. Beispiel (Chaos)

J_0 (kg m^2)	m (kg)	R (m)	D (N m)	kdG (N m)	kdl (N m s A^{-2})	M_0 (N m)	T_0 (s)	I (A)
0.0021	0.030	0.090	0.0254	6.25E-5	0.0052	0.002	3.9	0.35



Führen Sie eigene Simulationen durch, um den empfindlichen Einfluss der Dämpfung durch Variation der Stromstärke I im Bereich zwischen 0,25 A und 0,6 A zu erkennen und zu verstehen.

Zusätzlich kann auch der starke Einfluss von anderen Größen bei deren geringfügiger Änderung im Bereich deren Unsicherheiten (z. B. Zusatzmasse m , Direktionsmoment der Feder D , Radius R) auf das Schwingungsverhalten untersucht werden.

Quellen

Hemmer, T. J. , Bachelorarbeit, 2011, Uni Leipzig, Bereich Didaktik der Physik, Betreuer Prof. Dr. W. Oehme

Physikalisches Praktikum, Hrsg. W. Schenk, F. Kremer, Springer, 2011

Computeralgebrasystem Maxima, <http://maxima.sourceforge.net/> (free download)

Worg, R., Deterministisches Chaos - Wege in die nichtlineare Dynamik, BI Wissenschaftsverlag, 1993