

## Ergänzungen zum Kapitel

# Mechanik

### **Wellen** (Kap. 5.2, 5.3, 5.4)

('Kompaktkurs Physik', H. Pfeifer, H. Schmiedel und R. Stannarius)

Prof. Dr. Dr. h.c. Harry Pfeifer  
Prof. Dr. Herbert Schmiedel  
Prof. Dr. Ralf Stannarius



# Kompaktkurs Physik

mit virtuellen Experimenten und Übungsaufgaben

August 2004

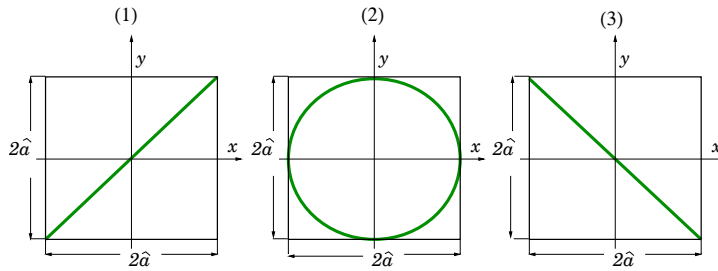
B. G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH,  
Wiesbaden

mit  $x_0(t) = 2\hat{x} \cos\{[(\omega_1 - \omega_2)/2]t + (\alpha_1 - \alpha_2)/2\}$ ,  $\omega_s = (\omega_1 + \omega_2)/2$  und  $\alpha_s = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ , d.h. es entsteht eine Schwingung mit der mittleren Frequenz  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  und einer Amplitude  $\hat{x}_s = |x_0(t)|$ , die periodisch zwischen 0 und dem Maximalwert  $2\hat{x}$  schwankt. Diese Erscheinung nennt man **Schwebung** (beat phenomenon). A 32

(3) *Senkrechte Polarisation* ( $\vec{e}_{a1} = \vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_{a2} = \vec{e}_y$ ), gleiche Amplitude ( $\hat{x} = \hat{y} = \hat{a}$ ) und gleiche Frequenz ( $\omega_x = \omega_y = \omega$ ). Es ergibt sich in der  $x$ - $y$ -Ebene i.Allg. eine Ellipse (**elliptisch polarisierte Schwingung**, elliptically polarized oscillation), die für  $\alpha_x - \alpha_y = 0, \pi, 2\pi$  usw. zu einer linear polarisierten Schwingung und für  $\alpha_x - \alpha_y = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$  usw. zu einer zirkular polarisierten Schwingung entartet (s.Abb.39).

(4) *Senkrechte Polarisation* ( $\vec{e}_{a1} = \vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_{a2} = \vec{e}_y$ ), gleiche Amplitude ( $\hat{x} = \hat{y} = \hat{a}$ ) und **kommensurable** (commensurate) Frequenzen (d.h. der Quotient beider ist eine rationale Zahl). Es ergeben sich in der  $x$ - $y$ -Ebene geschlossene Kurven, die man als **Lissajous-Figuren** (Lissajous figures, Jules Antoine Lissajous 1822-1880) bezeichnet. Sie lassen sich einfach konstruieren und finden in der Messtechnik bei der Bestimmung von Frequenzverhältnissen Anwendung: *Die Zahl der Berührungspunkte der Figur mit dem einhüllenden Quadrat der Kantenlänge  $2\hat{a}$ , die man in  $x$ -Richtung zählt, zu der entsprechenden Zahl in  $y$ -Richtung ist gleich dem Verhältnis  $\omega_y/\omega_x$ .* Als Beispiel zeigt Abb.40 die Lissajous-Figur für ein Frequenzverhältnis  $\omega_y/\omega_x = 2$ .

A 33

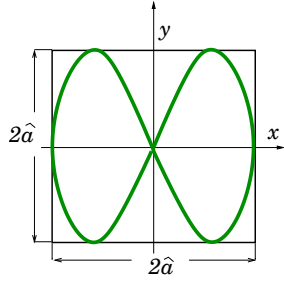


**Abbildung 39.**

Lissajous-Figuren für ein Frequenzverhältnis 1, gleiche Amplituden, aber verschiedene Phasendifferenzen:  
 (1)  $\alpha_x - \alpha_y = 0$ ,  
 (2)  $\alpha_x - \alpha_y = \pi/2$ ,  
 (3)  $\alpha_x - \alpha_y = \pi$

## 5.2 Wellen

Wenn man ein Teilchen eines Fluids oder eines Festkörpers zu einer erzwungenen Schwingung mit der Frequenz  $\omega$  anregt, so erfahren, infolge der Wechselwirkungskräfte zwischen den Teilchen, zunächst die unmittelbaren Nachbarn eine aufgeprägte Kraft der gleichen Frequenz. Diese Nachbarn beginnen deshalb (phasenverschoben)



**Abbildung 40.** Lissajous-Figur für  $x = \hat{a} \cos(\omega t + \alpha_x)$  und  $y = \hat{a} \cos(2\omega t + \alpha_y)$  mit  $\alpha_x - \alpha_y = \pi/4$

ebenfalls erzwungene Schwingungen auszuführen, die sie analog an ihre nächsten Nachbarn übertragen, so dass schließlich die Auslenkungen aller Teilchen aus ihren Ruhelagen sowohl eine zeitliche als auch räumliche Periodizität aufweisen. Erfolgt die Auslenkung in der Ausbreitungsrichtung dieser Erregung, so spricht man von einer **longitudinalen Welle** (longitudinal wave) im Gegensatz zu den **transversalen Wellen** (transverse waves) bei senkrechter Auslenkung. Harmonisch nennt man eine Welle (**harmonische Welle**, harmonic wave), wenn die Auslenkungen aus den Ruhelagen harmonische Schwingungen sind (s.S.16). In Abb.41 ist die Entstehung einer harmonischen longitudinalen Welle in einem eindimensionalen Kristall, der sich in  $x$ -Richtung erstreckt, durch eine Folge von Momentaufnahmen dargestellt. Für die Zeitintervalle zwischen den Aufnahmen wurde eine Viertelperiode der harmonischen Schwingungen gewählt. Während also jedes einzelne Teilchen eine erzwungene Schwingung mit der gleichen **Periode** (period)  $T$  ausführt, hängt seine Nullphase vom Ort der Ruhelage des betreffenden Teilchens ab.

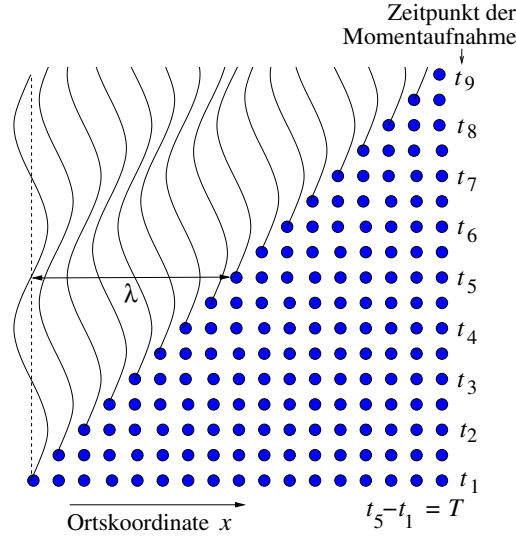
Den kleinsten Abstand zwischen Teilchen mit gleicher Nullphase bezeichnet man als **Wellenlänge** (wave length oder wavelength)  $\lambda$  (s.Abb.41). Damit lässt sich eine eindimensionale harmonische longitudinale Welle in der Form

$$\xi(t, x) = \hat{\xi} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t \mp \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad (137)$$

schreiben, wobei  $\xi(t, x)$  die Auslenkung in  $x$ -Richtung zur Zeit  $t$  für ein Teilchen bezeichnet, dessen Ruhelage die Koordinate  $x$  besitzt. Das Minuszeichen gilt für eine in die positive  $x$ -Richtung fortschreitende Welle und das Pluszeichen für die entgegengesetzte Richtung. Führt man in Analogie zur **Kreisfrequenz** (angular frequency)  $\omega = 2\pi/T$  die **Kreiswellenzahl** (circular wave number)  $k_x = 2\pi/\lambda$  ein, so ergibt sich aus Gl.(137)

$$\xi(t, x) = \hat{\xi} \cos(\omega t \mp k_x x). \quad (138)$$

Für eine Welle im dreidimensionalen Raum ist  $k_x x$  durch  $k_x x + k_y y + k_z z$  zu ersetzen, so dass sich an Stelle von Gl.(138) die allgemeine Gleichung  $\xi(t, \vec{r}) = \hat{\xi} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$  mit dem



**Abbildung 41.** Ausbildung einer longitudinalen harmonischen Welle in einem eindimensionalen Kristall, der sich in  $x$ -Richtung erstreckt. Für die Zeitpunkte  $t_i$  der Momentaufnahmen gilt:  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = T/4$ ,  $t_3 = 2T/4$ ,  $t_4 = 3T/4$ ,  $t_5 = T$  usw.

**Wellenzahlvektor** oder **Wellenvektor** (circular wave vector)  $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$  ergibt. Hierbei gilt  $(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} = 2\pi/\lambda$ .

Für die **Phasengeschwindigkeit** (phase velocity)  $v_P$ , das ist die Geschwindigkeit, mit der sich eine herausgegriffene Phase, z.B. ein Maximum einer harmonischen Welle, bewegt, gilt auf Grund der Definitionen von  $\lambda$  (Weg) und  $T$  (Zeit)  $v_P = \lambda/T$ . Dafür kann man mit  $k_x = 2\pi/\lambda$  und  $\omega = 2\pi/T$  auch

$$v_P = \frac{\omega}{k_x} \quad (139)$$

schreiben. Beim Übergang von einem Medium in ein anderes bleibt die Frequenz erhalten (*erzwungene* Schwingungen der Teilchen), jedoch wird sich i.Allg. die Wellenlänge, die von der Stärke der Wechselwirkung zwischen den Teilchen und ihrem mittleren Abstand abhängt, ändern.

Wenn in einem Medium das Produkt aus Wellenlänge und Frequenz nicht konstant ist, sondern von der Frequenz abhängt, spricht man von **Dispersion** (dispersion). Diese Erscheinung führt zu der Notwendigkeit, eine weitere Geschwindigkeit einzuführen: Um Signale mit einer Welle zu übertragen, muss diese moduliert werden, denn eine harmonische Welle liefert beim Empfänger nur eine harmonische Schwingung mit den zeitlich konstanten Parametern Amplitude, Frequenz und Nullphase. Erst durch **Modulation** (modulation), d.h. durch zeitliche Variation einer dieser drei Größen, ist es möglich, Signale zu übermitteln. Wir betrachten als einfachstes

Signal einen Rechteckimpuls, der durch Erhöhung der Amplitude einer harmonischen Welle über ein kurzes Zeitintervall realisiert wird (**Amplitudenmodulation**, amplitude modulation). Durch eine mathematische Operation, die sog. Fourierzerlegung, kann man diese Welle mit zeitabhängiger Amplitude in harmonische Wellen zerlegen, die unterschiedliche aber zeitlich konstante Amplituden, Frequenzen und Nullphasen besitzen. Wenn nun diese einzelnen Wellen infolge der Dispersion unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten haben, so wird sich der Impuls im Laufe der Zeit verformen und sein Schwerpunkt wird sich mit einer Geschwindigkeit bewegen, die i.Allg. nicht mit der Phasengeschwindigkeit der unmodulierten Welle übereinstimmt. Diese Geschwindigkeit, mit der sich ein Signal fortpflanzt, das einer Welle aufmoduliert ist, nennt man **Gruppengeschwindigkeit** (group velocity)  $v_G$ . Eine einfache Rechnung liefert dafür eine zu Gl.(139) analoge Beziehung:

$$v_G = \frac{d\omega}{dk_x}. \quad (140)$$

A 34

A 35

Wir betrachten zwei harmonische Wellen mit den Frequenzen  $\omega$  und  $\omega + \Delta\omega$  und den zugehörigen Kreiswellenzahlen  $k_x$  und  $k_x + \Delta k_x$ . Die beiden Wellen verstärken sich (Maximum der Erregung), wenn die beiden Phasen gleich sind, d.h. für  $\omega t - k_x x = (\omega + \Delta\omega)t - (k_x + \Delta k_x)x$ . Daraus ergibt sich  $0 = t\Delta\omega - x\Delta k_x$ , oder für die Geschwindigkeit, mit der sich das Maximum fortbewegt,  $x/t = \Delta\omega/\Delta k_x$ . Nach dem Grenzübergang folgt die gesuchte Gl.(140).

In einem Fluid kann sich nur eine *longitudinale* Welle ausbilden. Die Ausbreitung dieser Welle erfolge in  $x$ -Richtung und wir betrachten ein Volumenelement, das zum Zeitpunkt  $t$  die Größe  $A\Delta x$  (s.Abb.42) besitze, wobei  $A$  die Querschnittsfläche senkrecht zu  $x$  bezeichnet. Mit der mittleren Dichte  $\rho$  des Fluids und den vom Ort ( $x$ ) und der Zeit ( $t$ ) abhängigen Größen Druck ( $p$ ) und Geschwindigkeit ( $v_x$ ) ergibt sich aus dem 2. Newton'schen Axiom

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (141)$$

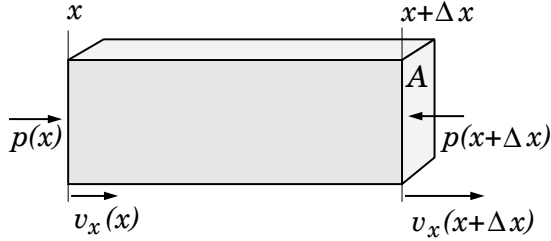
Die Differentialquotienten wurden als partielle Ableitungen geschrieben, da bei den jeweiligen Differentiationen die anderen unabhängigen Variablen konstant zu halten sind.

Für die Kraft, die z.Zt.  $t$  auf das Massenelement  $\rho A\Delta x$  wirkt, gilt  $F_x = -[p(t, x + \Delta x) - p(t, x)]A$  oder  $F_x = -(\partial p/\partial x)\Delta x A$ . Einsetzen dieses Ausdrucks in das 2. Newton'sche Axiom  $(\rho A\Delta x)(dv_x/dt) = F_x$  und Vernachlässigung des in der Geschwindigkeit quadratischen Terms ( $dv_x/dt = \partial v_x/\partial t + (\partial v_x/\partial x)v_x \approx \partial v_x/\partial t$ ) liefert die Gl.(141).

Um eine zweite Gleichung zu erhalten, betrachten wir den Zeitpunkt  $t + dt$ . Unter Verwendung der Definitionsgleichung für die Kompressibilität  $\kappa = -(1/V)dV/dp$  (s.Gl.(80), S.53) folgt mit  $\kappa = \kappa_a$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\kappa_a \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (142)$$

Zur Zeit  $t + dt$  befindet sich die linke Seite des Volumenelementes (s.Abb.42) bei  $x + v_x(x)dt$  und die rechte Seite bei  $x + \Delta x + v_x(x + \Delta x)dt$ . Wegen  $v_x(x + \Delta x) = v_x(x) + (\partial v_x / \partial x)\Delta x$  ergibt sich für die Volumenänderung zwischen  $t$  und  $t + dt$  der Wert  $dV = A(\partial v_x / \partial x)\Delta x dt$ . Einsetzen von  $dV$  und  $V = A\Delta x$  in die Definitionsgleichung der Kompressibilität  $\kappa = -(1/V)dV/dp$  (s.Gl.(80), S.53) liefert die Beziehung  $\kappa = -(\partial v_x / \partial x)dt/dp$  oder mit  $dp/dt = \partial p / \partial t$  die gesuchte Gl.(142). Für  $\kappa$  ist die adiabatische Kompressibilität  $\kappa_a$  einzusetzen, da bei den Schallwellen sehr schnelle Volumenänderungen auftreten, die deshalb ohne Austausch von Wärmeenergie mit der Umgebung, d.h. adiabatisch erfolgen.



**Abbildung 42.** Zur Ableitung der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der longitudinalen Welle, die sich in  $x$ -Richtung in einem Fluid ausbreitet

Differenziert man die Gl.(141) nach  $x$  und die Gl.(142) nach  $t$ , so müssen die beiden Ausdrücke gleich sein, und man erhält die **eindimensionale Wellengleichung** (one-dimensional wave equation) für den Druck

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\kappa_a \rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (143)$$

Die allgemeine Lösung dieser Wellengleichung lautet  $p(t, x) = p(u)$  mit  $u = t \mp (\kappa_a \rho)^{1/2} x$ , wie man leicht durch Einsetzen in Gl.(143) zeigen kann. Die spezielle Lösung  $p(t, x) = \hat{p} \cos(\omega u)$  oder  $p(t, x) = \hat{p} \cos[\omega t \mp \omega(\kappa_a \rho)^{1/2} x]$  stellt die harmonische Welle dar. Ein Vergleich mit der Gl.(138), S.85, liefert unter Verwendung der Formeln für die Phasengeschwindigkeit  $v_P$  (Gl.(139), S.86) bzw. die Gruppengeschwindigkeit  $v_G$  (Gl.(140), S.87) das Ergebnis

$$v_P = v_G = \frac{1}{\sqrt{\kappa_a \rho}}. \quad (144)$$

In ähnlicher Weise ergeben sich die in Tab.17 zusammengestellten Formeln für die Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten mechanischer Wellen. Führt man in Gl.(143) die Phasengeschwindigkeit  $v_P$  nach Gl.(144) ein und erweitert auf drei Dimensionen, so erhält man die **dreidimensionale Wellengleichung** (three-dimensional wave equation) für den Druck

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = v_P^2 \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right). \quad (145)$$

Ü 35

Ü 36

Ü 37

A 36

**Tabelle 17.** Phasengeschwindigkeit mechanischer Wellen ( $\kappa_a$  = adiabatische Kompressibilität,  $\rho$  = Dichte,  $E$  = Elastizitätsmodul,  $K$  = Kompressionsmodul,  $G$  = Torsionsmodul,  $\sigma$  = Oberflächenspannung). Die Gruppengeschwindigkeit ( $v_G$ ) ist mit Ausnahme der Oberflächenwellen gleich der Phasengeschwindigkeit ( $v_P$ )

Wellenart	Phasengeschwindigkeit	Beispiel
longitudinale Welle in einem Fluid	$\sqrt{1/(\kappa_a \rho)}$	Luftsäule in einem Rohr (Orgelpfeife)
longitudinale Welle in einem dünnen Stab	$\sqrt{E/\rho}$	durch Eisenbahnschienen übertragener Schall
transversale Seilwelle (Spannkraft $F$ , Querschnittsfläche $A$ )	$\sqrt{F/(\rho A)}$	Saite eines Streichinstruments
longitudinale Welle in einem Festkörper	$\sqrt{[K + (4/3)G]/\rho}$	longitudinale Erdbebenwellen
Torsionswelle (Scherwelle)	$\sqrt{G/\rho}$	periodische Verdrillung einer Achse
Oberflächenwelle einer tiefen Flüssigkeit ( $k = 2\pi/\lambda$ , $g$ = Erdbeschleunigung)	$\sqrt{(g/k) + \sigma k/\rho}$	Wellen auf Wasseroberflächen

## 5.3 Wellenausbreitung

### 5.3.1 Stehende Wellen

Wenn eine in die positive  $x$ -Richtung fortschreitende harmonische Welle  $p(t, x) = \hat{p} \cos(\omega t - k_x x)$  an der Stelle  $x = \ell$  auf ein anderes Medium trifft, kommt es i.Allg. zu



einer Reflexion, d.h. es entsteht eine Welle, die sich von  $x = \ell$  aus in die negative  $x$ -Richtung ausbreitet. Die *Amplitude*  $\hat{p}_r$  dieser reflektierten Welle muss zwischen den Grenzwerten 0 und  $\hat{p}$  liegen.  $\hat{p}_r = 0$  bedeutet, dass die gesamte Leistung der Welle  $p(t, x)$  in das andere Medium übergeht, d.h. es tritt keine Reflexion auf. In der Optik bezeichnet man dieses Medium dann als **schwarzen Körper** (black body), in der Nachrichtentechnik spricht man von **Anpassung** (matching). Der andere Grenzfall  $\hat{p}_r = \hat{p}$  heißt **Totalreflexion** (total reflection). Zur vollständigen Charakterisierung der reflektierten Welle muss außer ihrer Amplitude noch die *Nullphase* bekannt sein. Ist die Differenz der Nullphasen für die beiden Wellen  $p(t, x)$  und  $p_r(t, x)$  an der Stelle  $x = \ell$  null, so verstärken sie sich an dieser Stelle maximal (**Reflexion am losen Ende**, soft reflection), während sie sich bei einer Phasendifferenz  $\pi$  maximal schwächen (**Reflexion am festen Ende**, hard reflection). Zur Beschreibung der Effekte, die sich aus der Überlagerung einer hinlaufenden und einer reflektierten Welle ergeben, nehmen wir der Einfachheit halber an, dass bei  $x = 0$ , von wo aus die Welle  $p(t, x)$  startet, Anpassung vorliegt, so dass im Gebiet  $0 \leq x \leq \ell$  nur die beiden Wellen  $p(t, x)$  und  $p_r(t, x)$  existieren. Für den Spezialfall einer *Totalreflexion am losen Ende* gilt

$$p_r(t, x) = \hat{p} \cos(\omega t + k_x x - k_x 2\ell). \quad (146)$$

Das positive Vorzeichen von  $k_x x$  resultiert aus der Tatsache, dass die reflektierte Welle in die negative  $x$ -Richtung läuft, während die Nullphase  $-k_x 2\ell$  sichert, dass die beiden Wellen  $p(t, x)$  und  $p_r(t, x)$  bei  $x = \ell$  die gleiche Nullphase, nämlich  $-k_x \ell$ , besitzen. An der Stelle  $x$  gilt also zum Zeitpunkt  $t$  für die Gesamterregung, die man als **stehende Welle** (standing wave) bezeichnet,

$$p(t, x) + p_r(t, x) = 2\hat{p} \cos(k_x x - k_x \ell) \cos(\omega t - k_x \ell). \quad (147)$$

Aus  $p(t, x) + p_r(t, x) = \hat{p} \cos(\omega t - k_x x) + \hat{p} \cos(\omega t + k_x x - k_x 2\ell)$  folgt unter Verwendung des Additionstheorems  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos[(\alpha - \beta)/2] \cos[(\alpha + \beta)/2]$  und unter Beachtung von  $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha)$  sofort die Gl.(147).

Die Gl.(147) beschreibt eine harmonische Schwingung mit einer vom Ort abhängigen Amplitude  $|2\hat{p} \cos(k_x x - k_x \ell)|$ . Wegen  $k_x = 2\pi/\lambda$  ist die Amplitude an den Stellen  $x = \ell - \lambda/4, \ell - 3\lambda/4$  usw. gleich null. Man nennt diese Stellen die **Knoten** (nodes) der stehenden Welle, während für  $x = \ell, \ell - \lambda/2$  usw. die Amplitude den Maximalwert  $2\hat{p}$  besitzt (**Bäuche**, antinodes, der stehenden Welle). Eine analoge Überlegung liefert für die *Totalreflexion am festen Ende* Knoten an den Stellen  $x = \ell, \ell - \lambda/2$  usw. und Bäuche bei  $x = \ell - \lambda/4, \ell - 3\lambda/4$  usw. Zusammengefasst ergeben sich aus diesen Ergebnissen die beiden folgenden Aussagen:

- (1) Der Abstand zwischen einem Bauch und einem benachbarten Knoten ist  $\lambda/4$ .
- (2) Bei Reflexion an einem festen (losen) Ende entsteht an der Reflexionsstelle ein Knoten (Bauch).

Wenn sowohl bei  $x = 0$  als auch bei  $x = \ell$  eine Reflexion auftritt, so entsteht ein resonanzfähiges System. Im Gegensatz zum linearen Oszillator (s.S.78) gibt es hier aber unendlich viele Resonanzen, die sog. **Eigenschwingungen** (eigenmodes). Als erstes Beispiel betrachten wir die beidseitig eingespannte **Saite** (string) eines Streichinstrumentes. Aus der Forderung, dass sich an beiden Enden, d.h. bei  $x = 0$  und  $x = \ell$ , ein Knoten ausbilden muss, folgt die Resonanzbedingung zu  $\ell = n\lambda/2$  mit  $n = 1, 2, 3$  usw. Die Erregung für  $n = 1$  nennt man die **Grundschwingung** (fundamental vibration) oder auch die **1. Eigenschwingung** (first harmonic).  $n = 2$  wird als **1. Oberschwingung** (first overtone) oder auch als **2. Eigenschwingung** (second harmonic) bezeichnet usw. Die Resonanzfrequenzen ergeben sich aus der Formel für die Phasengeschwindigkeit  $v_P = \lambda f = (F/\rho A)^{1/2}$  (s.Tab.17, S.89) mit  $\lambda = 2\ell/n$  zu

$$f = \frac{n}{2\ell} \sqrt{\frac{F}{\rho A}}, \quad (148)$$

wobei  $F$  die Kraft bezeichnet, mit der die Saite gespannt wird, deren Querschnittsfläche  $A$  und deren Dichte  $\rho$  ist. Für die Eigenschwingungen einer **Luftsäule** (air filled pipe), die sich in einem Rohr der Länge  $\ell$  befindet, das am einen Ende offen und am anderen Ende mit einem Deckel verschlossen ist (**gedackte Orgelpfeife**, closed organ pipe) muss  $\ell$  gleich den möglichen Abständen zwischen Knoten und Bauch sein, d.h.  $\ell = (2n - 1)\lambda/4$  mit  $n = 1, 2, 3$  usw. Unter Verwendung der Formel für die Phasengeschwindigkeit (Gl.(144), S.89) ergeben sich die Resonanzfrequenzen zu

$$f = \frac{2n - 1}{4\ell} \sqrt{\frac{1}{\kappa_a \rho}}. \quad (149)$$

Eine einfache Überlegung zeigt, dass für die beidseitig **offene Orgelpfeife** (open organ pipe) der Faktor  $(2n - 1)$  in Gl.(149) durch  $2n$  zu ersetzen ist. Ü 38

### 5.3.2 Der Doppler-Effekt

Zur Behandlung des **Doppler-Effekts** (Doppler effect, Johann Christian Doppler 1803-1853) betrachten wir im Folgenden eine Schallquelle, die harmonische Wellen mit der Frequenz  $f$  aussendet. Wenn die Schallquelle in dem Medium ruht, in dem sich die Schallwellen ausbreiten, so sei deren Wellenlänge  $\lambda$ .

Ein *Beobachter*, der sich einer solchen Schallquelle mit der Geschwindigkeit  $v_B$  nähert (moving detector), überstreicht in einer Sekunde  $f + v_B/\lambda$  Wellenmaxima, d.h. er registriert eine erhöhte Frequenz  $f_B = f + v_B/\lambda$ . Diese Beziehung lässt sich wegen  $v_P = \lambda f$  auch in der Form

$$f_B = f(1 + v_B/v_P) \quad (150)$$

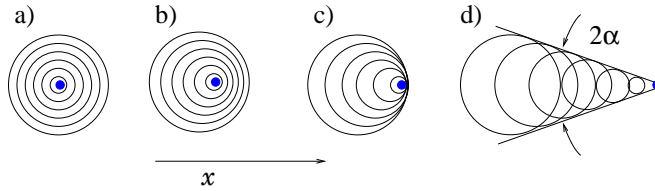
schreiben. Entfernt sich der Beobachter von der im Medium ruhenden Schallquelle, so ist  $v_B$  in Gl.(150) durch  $-v_B$  zu ersetzen, d.h. die Frequenz verringert sich.

In dem anderen Fall, bei dem der Beobachter im Medium ruht und sich die *Schallquelle mit der Geschwindigkeit  $v_S$  dem Beobachter nähert* (moving source), verkürzt sich die Wellenlänge der Schallwellen in dieser Richtung, denn die Schallquelle verfolgt die von ihr ausgesandte Welle, so dass sich die Wellenlänge um diejenige Strecke reduziert, die die Schallquelle in der Zeit  $T = 1/f$  zurücklegt. Es ergibt sich also  $\lambda_S = \lambda - v_S T$ , oder, wegen  $f_S = v_P/\lambda_S$  und  $f = v_P/\lambda$ ,

$$f_S = \frac{f}{1 - v_S/v_P}. \quad (151)$$

**A 37**

Bei Entfernung der Schallquelle ist  $v_S$  in Gl.(151) durch  $-v_S$  zu ersetzen, d.h. der Beobachter registriert einen tieferen Ton. Diese Erscheinung ist dem Besucher von Motorrad- oder Autorennen wohlbekannt. Während der Annäherung des Fahrzeugs hört er einen höheren und beim Entfernen einen tieferen Ton als der Tourenzahl des Motors entspricht. Mit wachsender Geschwindigkeit  $v_S$  der Schallquelle wird die Wellenlänge  $\lambda_S = \lambda - v_S T$  immer kleiner, bis sie für  $\lambda = v_S T$ , d.h. für  $v_S = v_P$ , verschwindet. Die Wellen drängen sich dabei an der Frontseite der Schallquelle zusammen und es entsteht die **Schallmauer** (sound barrier). **A 38**



**Abbildung 43.**

Ausbreitung der Schallwellen eines Flugzeugs, das sich mit der Geschwindigkeit  $v_S$  in die  $x$ -Richtung bewegt: a)  $v_S = 0$ , b)  $v_S < v_P$ , c)  $v_S = v_P$ , d)  $v_S > v_P$ , wobei  $v_P$  die Schallgeschwindigkeit bezeichnet

In Abb.43 ist die Ausbreitung der Schallwellen für ein Flugzeug (Pfeifton des Motors) (a) im Stand, (b) bei Unterschallgeschwindigkeit, (c) bei Erreichen der Schallgeschwindigkeit und (d) im Überschallbereich dargestellt. Im Überschallflug bilden die zusammengedrängten Schallwellen einen **Mach-Kegel** (Mach cone, Ernst Mach 1838-1916), für dessen Öffnungswinkel  $\alpha$  man leicht an Hand von Abb.43d die Beziehung

$$\sin \alpha = \frac{v_P}{v_S} \quad (152)$$

ableitet. Den Quotienten  $v_S/v_P$ , d.h. den Kehrwert von  $\sin \alpha$ , bezeichnet man als **Mach-Zahl** (Mach number). Das Auftreffen des Mach-Kegels, den z.B. ein mit Überschallgeschwindigkeit fliegendes Objekt erzeugt, wird am Erdboden akustisch als Knall registriert.

## 5.4 Schallwellen (Akustik)

**Schallwellen** (sound waves) sind longitudinale oder transversale mechanische Wellen, die sich in elastischen Medien ausbreiten. Für den Menschen liegt der **Hörbereich** (audible frequency range) zwischen 16 Hz und 20 kHz, wobei die obere Grenzfrequenz mit wachsendem Alter immer niedriger wird und in die Größenordnung von 10 kHz kommt. Wellen mit Frequenzen im Gebiet zwischen 20 kHz und 10 GHz bezeichnet man als **Ultraschallwellen** (supersonic waves), solche oberhalb von 10 GHz als **Hyperschallwellen** (hypersonic waves). Die letzteren treten als thermische Gitterschwingungen in Festkörpern auf. Eine *harmonische* Welle im Hörbereich nennt man einen **Ton** (tone). Ein **Klang** (sound) besteht aus einem Grundton und mehreren Obertönen. Sind einige Obertöne besonders intensiv, so spricht man von einem **Akkord** (accord). Töne, Klänge und Akkorde sind streng periodisch. Nicht-periodische akustische Erregungen nennt man **Geräusch** (noise). Für die Schallgeschwindigkeit in Luft gilt nach Gl.(144), S.89,  $v_P = (\kappa_a \rho)^{-1/2}$ , wobei  $\rho$  die Dichte der Luft und  $\kappa_a = (p\gamma)^{-1}$  die adiabatische Kompressibilität (s.S.53) der Luft bezeichnet. Ersetzt man in dieser Beziehung die Dichte der Luft nach Gl.(91), S.58, so folgt

$$v_P = \sqrt{RT\gamma/M}. \quad (153)$$

Bei  $T = 273$  K ergibt sich also für die **Schallgeschwindigkeit** (sound velocity) in Luft ( $M \approx 29,0 \cdot 10^{-3}$  kg/mol, s.S.55, sowie  $\gamma = 1,4$ ) 331,0 m/s, was relativ gut mit dem experimentellen Wert von 331,45 m/s für trockene Luft [LID90] übereinstimmt. Wesentlich ist auch, dass die Schallgeschwindigkeit nach Gl.(153) nicht vom Druck abhängt, dass sie mit der Wurzel aus der Temperatur zu- und mit der Wurzel aus der molaren Masse abnimmt.

### 5.4.1 Größen des Schallfeldes

Nach Abschn.5.2, gilt für die Zeit- und Ortsabhängigkeit des Drucks bei einer harmonischen Welle, die sich in die positive  $x$ -Richtung bewegt,  $p(t, x) = \hat{p} \cos[\omega(t - x/v_P)]$  mit  $\omega = 2\pi/T$  und  $\omega/v_P = 2\pi/\lambda$ . Da sich der Gesamtdruck aus der Summe von  $p(t, x)$  und dem statischen Druck  $p_s$  zusammensetzt, bezeichnet man  $p(t, x)$  genauer als den **Schallwechseldruck** (sound pressure). Wie wir noch sehen werden, ist bei den üblichen Schallintensitäten die Amplitude  $\hat{p}$  des Schallwechseldrucks um

mehrere Zehnerpotenzen kleiner als der statische Luftdruck  $p_s$ . Durch die Schallwelle werden die Teilchen des Mediums, in dem sich der Schall ausbreitet, aus ihren jeweiligen Ruhelagen  $x$  periodisch um Strecken verschoben, die wir mit  $\xi$  (**Teilchenverschiebung**, sound displacement) bezeichnen und die unter der Annahme einer longitudinalen Welle ebenfalls in  $x$ -Richtung liegen. Die Zeitableitung  $d\xi/dt = v_x$  nennt man **Verschiebungsgeschwindigkeit** oder **Schallschnelle** (velocity of displacement). Eine einfache Rechnung liefert

$$v_x = \frac{\hat{p}}{\rho v_P} \cos[\omega(t - x/v_P)]. \quad (154)$$

Die Ableitung von  $p(t, x) = \hat{p} \cos[\omega(t - x/v_P)]$  nach dem Ort  $x$  liefert  $\partial p/\partial x = \hat{p}(\omega/v_P) \sin[\omega(t - x/v_P)]$ . Dies setzen wir in die Gl.(141), S.87, ein und erhalten  $\partial v_x/\partial t = -\rho^{-1} \hat{p}(\omega/v_P) \sin[\omega(t - x/v_P)]$ . Daraus folgt durch Integration  $v_x = \rho^{-1}(\hat{p}/v_P) \cos[\omega(t - x/v_P)] + C$ . Da für  $\hat{p} = 0$  auch  $v_x = 0$  gelten muss, verschwindet die Integrationskonstante  $C$  und es ergibt sich die Gl.(154).

A 39 A 40

Aus Gl.(154) erkennt man, dass die Verschiebungsgeschwindigkeit die gleiche Phase wie der Schallwechseldruck besitzt. Das Verhältnis aus der Amplitude  $\hat{p}$  des Schallwechseldrucks und der Amplitude  $\vec{v}_x = \hat{p}(v_P \rho)^{-1}$  der Verschiebungsgeschwindigkeit nennt man **Schallwellenwiderstand** (acoustic impedance). Für Luft (bei 0 °C und  $p_s \approx 0,1$  MPa) mit  $\rho \approx 1,293$  kg/m<sup>3</sup> und  $v_P \approx 331,5$  m/s ergibt sich  $v_P \rho \approx 428,6$  kgm<sup>-2</sup>s<sup>-1</sup>. Die Teilchenverschiebung  $\xi$  erhält man aus Gl.(154) durch Integration und unter Beachtung der Tatsache, dass  $\xi$  für  $\hat{p} = 0$  verschwinden muss, zu

$$\xi = \frac{\hat{p}}{\rho \omega v_P} \sin[\omega(t - x/v_P)]. \quad (155)$$

Man ersieht daraus, dass die Verschiebungsamplitude  $\hat{\xi} = \hat{p}(\rho \omega v_P)^{-1}$  mit wachsender Frequenz  $\omega$  immer kleiner wird und dass  $\xi$  gegenüber dem Schallwechseldruck  $p$  und der Verschiebungsgeschwindigkeit  $v_x$  eine Phasenverschiebung von  $\pi/2$  besitzt. Die Phasenverschiebung von  $\pi/2$  zwischen  $\xi$  und  $v_x$  bedeutet, dass die Energie der Teilchen ständig zwischen maximaler potentieller Energie ( $\xi = \hat{\xi}$ ) und maximaler kinetischer Energie ( $v_x = \hat{v}_x$ ) pendelt. Da die Gesamtenergie konstant sein muss, können wir sie aus einem der beiden Maxima berechnen. Wir wählen die kinetische Energie, die für ein Massenelement  $dm$  die Größe  $(\hat{v}_x^2/2)dm$  besitzt. Die **Energiedichte** (energy density), die wir mit  $\rho_W$  bezeichnen wollen, ergibt sich daraus, indem man durch das Volumenelement  $dV$  dividiert. Mit der Dichte  $\rho = dm/dV$  des Mediums folgt dann sofort

$$\rho_W = \rho \hat{v}_x^2 / 2. \quad (156)$$

Analog zur Gl.(101), S.65, die die Massenstromdichte  $\vec{j}_m$  mit der (Massen-) Dichte  $\rho$  verknüpft, ergibt sich die **Energieflussdichte** (energy flux density)  $\vec{j}_W$ , die auch **Schallintensität** oder **Schallstärke** (sound intensity) genannt wird, aus der Beziehung

$$\vec{j}_W = \rho_W \vec{v}_P. \quad (157)$$

Die Energieflussdichte stellt also die Energie dar, die in 1 Sekunde durch 1 m<sup>2</sup> senkrecht zur Strahlrichtung transportiert wird. In der Akustik ist es üblich, an Stelle der Energieflussdichte, den **Schallpegel** (sound intensity level)  $L$  mit der Einheit **Dezibel** (decibel, dB) anzugeben:

$$\frac{L}{\text{dB}} = 10 \lg \left( \frac{j_W}{j_{0W1000}} \right). \quad (158)$$

lg bezeichnet den 10-er Logarithmus und die Größe  $j_{0W1000}$  die sog. Hörschwelle für 1000 Hz (s.S.95), die gleich  $10^{-12} \text{ W/m}^2$  ist.

Als Beispiel, welche Werte die charakteristischen Größen eines Schallfeldes annehmen können, betrachten wir einen Lautsprecher, der in den vor ihm liegenden Halbraum gleichmäßig eine Leistung  $P = 100 \text{ W}$  abstrahlt. Im Abstand  $x = 2 \text{ m}$  ergeben sich dann folgende Zahlenwerte: Für die Energieflussdichte folgt definitionsgemäß  $j_W = P/(4\pi x^2/2) \approx 4 \text{ W/m}^2$  und für den Schallpegel nach Gl.(158)  $L \approx 126 \text{ dB}$ . Gl.(157) liefert mit  $v_P \approx 330 \text{ m/s}$  für die Energiedichte  $\rho_W = j_W/v_P \approx 12 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^3$ . Die Amplitude  $\hat{v}_x$  der Verschiebungsgeschwindigkeit ergibt sich aus Gl.(156) zu  $\hat{v}_x = (2\rho_W/\rho)^{1/2} \approx 0,14 \text{ m/s}$  und für die Druckamplitude  $\hat{p}$  folgt aus Gl.(154)  $\hat{p} = \hat{v}_x \rho v_P \approx 60 \text{ Pa}$ , was um mehr als drei Zehnerpotenzen kleiner ist als der statische Luftdruck ( $p_s \approx 0,1 \text{ MPa}$ ). Die Verschiebungsamplitude  $\hat{\xi} = \hat{p}/(\rho \omega v_P)$  (s.Gl.(155)) hängt von der Frequenz ab. Für den **Kammerton a** (concert pitch) mit  $f = 440 \text{ Hz}$  ergibt sich  $\hat{\xi} \approx 50 \mu\text{m}$ .

#### 5.4.2 Die Lautstärke

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, was wir empfinden, wenn auf unser Ohr eine bestimmte Energieflussdichte trifft. Wir nehmen zunächst an, es handele sich um eine harmonische Schallwelle, d.h. um einen Ton, mit der Frequenz 1000 Hz. Gemittelt über eine große Anzahl von gesunden Personen stellt man fest, dass die sog. **Hörschwelle** (threshold of hearing oder reference-sound intensity)  $j_{0W1000}$  bei  $10^{-12} \text{ W/m}^2$  liegt. Dies bedeutet, dass der Ton für Energieflussdichten  $j_W$  kleiner als  $10^{-12} \text{ W/m}^2$  nicht mehr vernommen wird. Bezeichnen wir mit  $\delta j_W$  den *Unterschied* zwischen zwei Energieflussdichten, den man mit dem Ohr gerade noch feststellen kann, so findet man experimentell, dass diese Differenz mit der Größe der Energieflussdichte anwächst, d.h. es gilt  $\delta j_W \propto j_W$ . Diese Beziehung, die auch

für optische Wahrnehmungen und andere Sinnesempfindungen Gültigkeit besitzt, heißt **Weber-Fechner'sches Grundgesetz** (Weber-Fechner law, Ernst Heinrich Weber 1795-1878, Gustav Theodor Fechner 1801-1887). Man definiert deshalb die Lautstärke für 1000 Hz mit der Einheit **Phon** (phon) durch die Gleichung

$$\frac{A_{1000}}{\text{Phon}} = 10 \lg \left( \frac{j_{W1000}}{j_{0W1000}} \right). \quad (159)$$

$\lg$  bezeichnet, wie auch in Gl.(158), den 10-er Logarithmus. Damit ergibt sich für den gerade noch wahrnehmbaren Unterschied in den Energieflussdichten, die von zwei Schallquellen mit der gleichen Frequenz (im vorliegenden Fall 1000 Hz) herrühren, ein konstanter Wert, nämlich ca. 3 Phon.

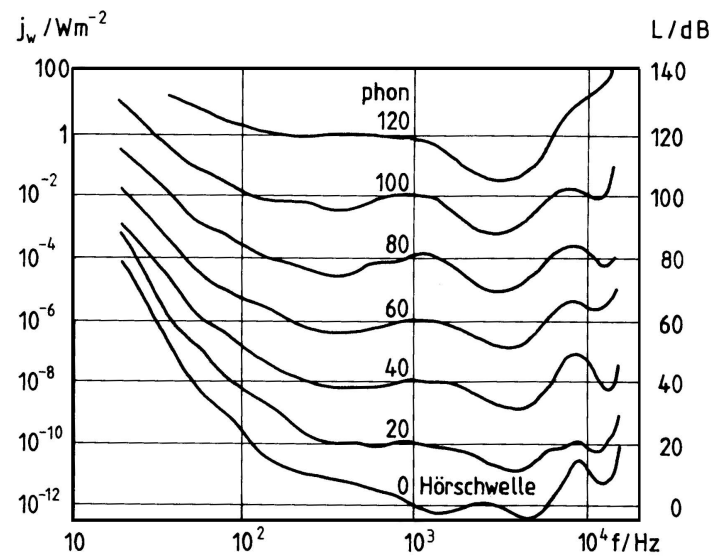
Der Proportionalitätsfaktor im Weber-Fechner'schen Gesetz  $\delta j_W \propto j_W$  kann gleich 1 gesetzt werden, da  $\delta j_W = j_{0W}$  für  $j_W = j_{0W}$  gilt. Die Differenz zweier Lautstärken, die gerade noch unterschieden werden können, ergibt sich deshalb nach Gl.(159) zu  $10 \lg[(j_{W1000} + \delta j_{W1000})/j_{0W1000}] - 10 \lg[j_{W1000}/j_{0W1000}] = 10 \lg[2j_{W1000}/j_{0W1000}] - 10 \lg[j_{W1000}/j_{0W1000}] = 10 \lg 2 \approx 3,01$  Phon.

Die **Lautstärke** (loudness level)  $A$  beschreibt quantitativ die Empfindung eines Beobachters, wenn auf sein Ohr von einer Schallquelle mit der Frequenz  $f$  die Energieflussdichte  $j_W$  trifft. Das Ergebnis von Vergleichsmessungen über eine Vielzahl von Personen lässt sich in der Form

$$\frac{A}{\text{Phon}} = K_f 10 \lg \left( \frac{j_W}{j_{0Wf}} \right) \quad (160)$$

schreiben, wobei  $j_{0Wf}$  die Hörschwelle bei der Frequenz  $f$  bezeichnet und  $K_f$  ein ebenfalls von der Frequenz abhängiger empirischer Proportionalitätsfaktor ist. In der Abb.44 sind Kurven gleicher Lautstärke  $A$  in Abhängigkeit von der Frequenz  $f$  und der Energieflussdichte  $j_W$  bzw. dem Schallpegel  $L$  (s.Gl.(158)) dargestellt.

Bei nichtharmonischen Schallwellen muss über die durch Abb.44 gegebenen Frequenzabhängigkeiten gemittelt werden. Einige Zahlenbeispiele für derartige gemittelte Lautstärken zeigt die Tab.18. Gehörschädigungen treten bereits ab ca. 85 Phon auf. Oberhalb von 120 Phon sind Gehörschädigungen sogar nach kurzer Einwirkung möglich.



**Abbildung 44.** Kurven gleicher Lautstärke  $A$  in der Einheit Phon in Abhängigkeit von der Frequenz  $f$  und der Energieflussdichte  $j_W$  bzw. dem Schallpegel  $L$  (s.Gl.(158), S.95)

**Tabelle 18.** Einige Beispiele für gemittelte Lautstärken  $\langle A \rangle$  in Phon

	Frequenzbereich in Hz	$\langle A \rangle$ / Phon
untere Hörschwelle		0
Blätterrauschen	500 - 2500	15
gedämpfte Unterhaltungssprache	500 - 2500	40
lautes Sprechen	1000 - 4000	60
Motorrad in 7 m Entfernung	10 - 5000	80
Niethämmer in 1 m Entfernung		110
Schmerzschwelle		130



Physikalisches Praktikum

Schenk, W.; Kremer, F.; Beddies, G.; Franke, Th.;

Galvosas, P.; Rieger, P. - Schenk, W.; Kremer, F. (Hrsg.)

2014, XIV, 397 S. 325 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-00665-5