

## Ergänzungen zum Kapitel

# Wärmelehre

**2. Hauptsatz (Kreisprozesse)** (Kap. 9.1, 9.2)

**Dämpfe und reale Gase** (Kap. 13.1, 13.2, 13.3)

**Wärmestrahlung** (Kap. 25.1, 25.2, 25.3)

(,Kompaktkurs Physik', H. Pfeifer, H. Schmiedel und R. Stannarius)

Prof. Dr. Dr. h.c. Harry Pfeifer  
Prof. Dr. Herbert Schmiedel  
Prof. Dr. Ralf Stannarius



# Kompaktkurs Physik

mit virtuellen Experimenten und Übungsaufgaben

August 2004

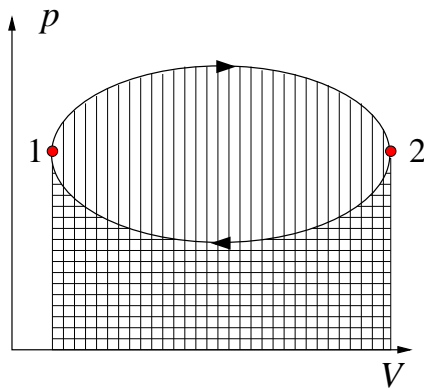
B. G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH,  
Wiesbaden

## 9 Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik

*Werner Heisenberg: Der erste Trunk aus dem Becher der Naturwissenschaft macht atheistisch, aber auf dem Grund des Bechers wartet Gott.*

### 9.1 Der Carnot-Zyklus

Wir beginnen mit der Definition von rechts- bzw. linksläufigen Zyklen (Zyklus = **Kreisprozess**, cycle): Bei einem **rechtsläufigen Zyklus** (clockwise cycle) werden die verschiedenen Zustände im  $p$ - $V$ -Diagramm im Uhrzeigersinn durchlaufen.

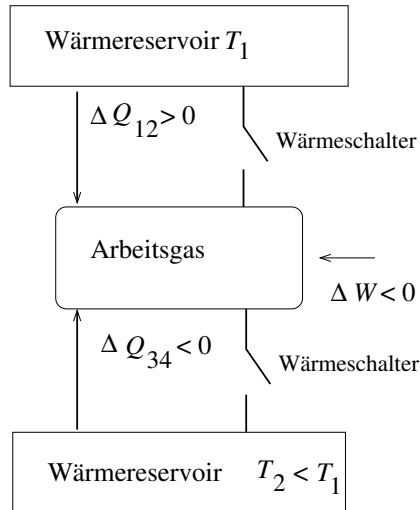


**Abbildung 51.** Beispiel für einen rechtsläufigen Zyklus

A 43 A 44

Dies ist schematisch in der Abb.51 dargestellt, wo man vom Ausgangszustand 1 zunächst über höhere Drücke nach 2 und dann bei niedrigeren Drücken wieder zurück nach 1 gelangt. Die senkrecht schraffierte Fläche  $A_{||}$  wird durch das Integral  $\int_1^2 p dV$  auf dem oberen Weg und die horizontal schraffierte Fläche  $A_{=}$  durch das entsprechende Integral auf dem unteren Weg gegeben, so dass sich wegen  $\delta W = -pdV$  (s.S.112) für die am System insgesamt verrichtete Arbeit  $\oint \delta W = -\oint p dV = -A_{||} + A_{=} < 0$  ergibt: *Bei einem rechtsläufigen Zyklus verrichtet das System Arbeit*, d.h. es wandelt Wärmeenergie in mechanische Energie um (**Wärmekraftmaschine**, heat engine). Wenn dagegen der Zyklus entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird (**linksläufiger Zyklus**, anticlockwise cycle), folgt analog  $\oint \delta W > 0$ , was bedeutet, dass man am System Arbeit verrichten muss. Diese wird verwendet, um Wärmeenergie zu transportieren. Dient der Transport zur Abkühlung eines Raumes, wobei die Wärmeenergie einem großen Reservoir, z.B. der Umgebung, zugeführt wird, so spricht man

von einer **Kältemaschine** (refrigeration machine). Wenn man aber einem Raum auf diese Weise, d.h. durch periodische Wiederholung eines linksläufigen Zyklus, Wärmeenergie zuführt, die einem großen Reservoir, z.B. dem Grundwasser, entzogen wird, so nennt man die Anlage eine **Wärmepumpe** (heat pump). A 45 A 46  
 Beim **Carnot-Zyklus** (Carnot cycle, Sadi Carnot 1796-1832) wird vorausgesetzt, dass alle Zustandsänderungen reversibel erfolgen.



**Abbildung 52.** Schematische Darstellung einer Apparatur zur Realisierung des Carnot-Zyklus. Da das Arbeitsgas nach Vollendung eines Zyklus wieder die gleiche innere Energie wie am Anfang besitzt, gilt  $\Delta Q_{12} + \Delta Q_{34} + \Delta W = 0$ . Ein Beispiel für den Verlauf von Druck und Volumen für 1 Mol Luft als Arbeitsgas mit  $T_1 = 1000\text{ K}$  und  $T_2 = 500\text{ K}$  zeigt die Abb.53

Einen Prozess bezeichnet man als **reversibel** (reversible), wenn das System dabei nur thermodynamische Gleichgewichtszustände (charakterisiert durch Zustandsgrößen wie z.B.  $p$ ,  $T$ ) durchläuft. Dies bedeutet insbesondere, (1.) dass die Reibung vernachlässigbar sein muss, denn nur unter dieser Bedingung wird verhindert, dass mechanische Energie **irreversibel** (irreversibly), d.h. unumkehrbar, in Wärmeenergie übergeht (**Dissipation**, dissipation), (2.) dass sich bei einem thermischen Kontakt des Systems mit der Umgebung die Temperaturen von System und Umgebung nur infinitesimal unterscheiden, denn nur dann kann das System durch eine *einheitliche* Temperatur beschrieben werden, und (3.) dass es im System nur infinitesimale Druckdifferenzen geben darf, denn dann kann man es mit einem *einheitlichen* Druck beschreiben.

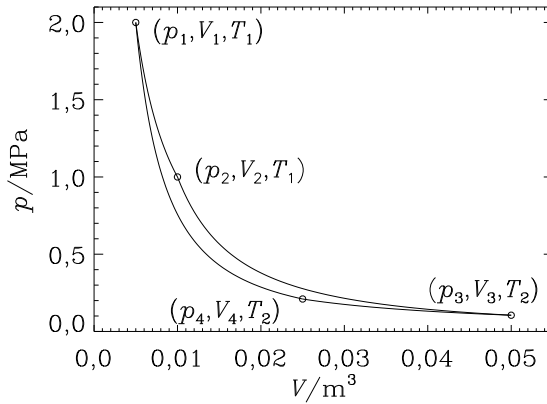
Der Carnot-Zyklus besteht aus zwei isothermen ( $1 \rightarrow 2$  und  $3 \rightarrow 4$ ) und zwei adiabatischen ( $2 \rightarrow 3$  und  $4 \rightarrow 1$ ) Zustandsänderungen, also aus insgesamt vier Takten (s.Abb.53). Im 1. Takt ( $1 \rightarrow 2$ ) dehnt sich das Gas, das aus  $n$  Molen eines idealen Gases bestehe (die Erweiterung auf nichtideale Gase findet man im Abschn.9.2 auf S.123), isotherm vom Volumen  $V_1$  auf  $V_2$  im Kontakt mit einem heißen Reservoir der Temperatur  $T_1$  aus (in Abb.52 ist der obere Wärmeschalter geschlossen). Für

die dabei zugeführte Wärmeenergie  $\Delta Q_{12}$  und die am Gas verrichtete Arbeit  $\Delta W_{12}$  folgt nach einer kleinen Zwischenrechnung

$$\Delta Q_{12} = -\Delta W_{12} = nRT_1 \ln(V_2/V_1). \quad (186)$$

Für die am Gas verrichtete Arbeit  $\Delta W_{12}$  gilt (s.S.112)  $\Delta W_{12} = -\int_{V_1}^{V_2} p dV$ . Unter Verwendung der Zustandsgleichung für ideale Gase (s. Gl.(161), S.98)  $p = nRT_1/V$  liefert die Integration  $\Delta W_{12} = -nRT_1 \ln(V_2/V_1)$ . Die zugeführte Wärmeenergie  $\Delta Q_{12}$  ergibt sich aus dem 1. Hauptsatz (s. Gl.(179), S.111) mit  $\Delta U_{12} = 0$  (isotherme Zustandsänderung) zu  $\Delta Q_{12} = -\Delta W_{12}$ .

A 47 A 48



**Abbildung 53.** Beispiel eines Carnot-Zyklus (Isothermen  $1 \rightarrow 2$  und  $3 \rightarrow 4$ , Adiabaten  $2 \rightarrow 3$  und  $4 \rightarrow 1$ ) im  $p$ - $V$ -Diagramm für 1 Mol Luft (Adiabatenkoeffizient  $\gamma = 1,4$ ) als Arbeitsgas mit  $T_1 = 1000$  K und  $T_2 = 500$  K

Im 2. Takt ( $2 \rightarrow 3$ ) (beide Wärmeschalter in Abb.52 sind geöffnet) dehnt sich das Gas adiabatisch vom Volumen  $V_2$  auf  $V_3$  aus, wobei die Temperatur von  $T_1$  auf  $T_2$  absinkt. Wegen der adiabatischen Zustandsänderung, d.h.  $\Delta Q_{23} = 0$ , folgt für die dabei am Gas verrichtete Arbeit  $\Delta W_{23}$  aus Gl.(179), S.111, mit  $\Delta U_{23} = nC_V^m(T_2 - T_1)$

$$\Delta W_{23} = nC_V^m(T_2 - T_1). \quad (187)$$

Im 3. Takt wird das Gas isotherm vom Volumen  $V_3$  auf ein bestimmtes Volumen  $V_4$  (s.u.) im Kontakt mit einem kalten Reservoir der Temperatur  $T_2$  komprimiert (in Abb.52 ist der untere Wärmeschalter geschlossen). Es ergibt sich analog zu Gl.(186)

$$\Delta Q_{34} = -\Delta W_{34} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right). \quad (188)$$

Der 4. Takt schließlich (beide Wärmeschalter in Abb.52 sind geöffnet) besteht aus einer adiabatischen Kompression von  $V_4$  auf  $V_1$ . Dabei erwärmt sich das Gas. Die bisher noch nicht festgelegte Größe von  $V_4$  muss nun so gewählt werden, dass die Erwärmung wieder auf die ursprüngliche Temperatur  $T_1$  führt, damit der Zyklus geschlossen ist. Für die beim 4. Takt am Gas verrichtete Arbeit  $\Delta W_{41}$  gilt analog zu Gl.(187)

$$\Delta W_{41} = nC_V^m(T_1 - T_2). \quad (189)$$

Für die insgesamt am Gas verrichtete Arbeit  $\Delta W = \Delta W_{12} + \Delta W_{23} + \Delta W_{34} + \Delta W_{41}$  folgt durch Einsetzen der Gln.(186)-(189) und unter Verwendung der dritten Poisson-Gleichung (s.Gl.(183), S.113)

$$\Delta W = -nR(T_1 - T_2) \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right). \quad (190)$$

Aus  $\Delta W = \Delta W_{12} + \Delta W_{23} + \Delta W_{34} + \Delta W_{41}$  erhält man durch Einsetzen der Gln.(186)-(189)  $\Delta W = -nRT_1 \ln(V_2/V_1) - nRT_2 \ln(V_4/V_3)$ . Die dritte Poisson-Gleichung (s. die Gln.(183), S.113) liefert für den 2. Takt  $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$  und für den 3. Takt  $T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$ . Die Division dieser beiden Gleichungen durcheinander gibt  $V_2/V_1 = V_3/V_4$  und damit folgt für  $\Delta W$  die Gl.(190).

A 49 A 50

Die von uns gewählte Umlaufrichtung (rechtsläufiger Zyklus) bedeutet, dass wir den Carnot-Zyklus als Wärmekraftmaschine behandelt haben. Der **Wirkungsgrad** (efficiency)  $\eta_{\text{WK}}$  einer Wärmekraftmaschine ist definiert als Quotient aus der von der Maschine verrichteten Arbeit ( $-\Delta W$ ) und der ihr vom heißen Reservoir zugeführten Wärmeenergie ( $+\Delta Q_{12}$ )

$$\eta_{\text{WK}} = \frac{-\Delta W}{\Delta Q_{12}} = \frac{\Delta Q_{12} + \Delta Q_{34}}{\Delta Q_{12}}. \quad (191)$$

Für eine Carnot-Maschine folgt durch Einsetzen der Gln.(190) und (186)

$$\eta_{\text{WK}}^{\text{Carnot}} = \left( \frac{-\Delta W}{\Delta Q_{12}} \right)_{\text{Carnot}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (192)$$

Von der zugeführten Wärmeenergie  $\Delta Q_{12}$  wird also nur der Bruchteil  $\eta_{\text{WK}}$  in mechanische Energie umgewandelt, der Rest wird bei der Temperatur  $T_2$  an das kalte Reservoir (Kühler) abgegeben. Dies erfolgt beim 3. Takt. Für diese Wärmeenergie ( $-\Delta Q_{34}$ ) ergibt sich aus Gl.(188) unter Verwendung der Beziehung  $V_2/V_1 = V_3/V_4$  (s. den kleingedruckten Text nach Gl.(190))

$$-\Delta Q_{34} = nRT_2 \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right). \quad (193)$$

Setzt man für  $T_1$  und  $T_2$  die Temperaturen ein, die beim Ottomotor auftreten (Kühlertemperatur  $T_2 \approx 350$  K, Temperatur nach Zünden des Benzin-Luft-Gemisches  $T_1 \approx 2700$  K), so würde sich nach Gl.(192) ein Wirkungsgrad von 0,87 ergeben, der noch deutlich über dem Idealwert von 0,56 für den Ottomotor bei einer Verdichtung von 8 liegt (s.S.115).

Für die Verwendung des Carnot-Prozesses als **Wärmepumpe** (heat pump) muss der Zyklus entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen und die an das wärmere Reservoir abgegebene Wärmeenergie ( $-\Delta Q_{12}$ ) möglichst groß gemacht werden. Der Wirkungsgrad  $\eta_{WP}$  einer Wärmepumpe ist durch das Verhältnis von  $-\Delta Q_{12}$  und der zugeführten Arbeit  $\Delta W$  gegeben

$$\eta_{WP} = \frac{-\Delta Q_{12}}{\Delta W} \quad (194)$$

und es folgt aus Gl.(192) für den Carnot-Prozess

$$\eta_{WP}^{\text{Carnot}} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \quad (195)$$

Dieser Wirkungsgrad ist wegen  $T_1 > T_2$  stets größer als 1.

Als Anwendungsbeispiel wollen wir die Wirkungsgrade für (ideale) Wohnungsheizungen betrachten: Für Öl-, Gas- oder Kohleheizungen liegt der Wirkungsgrad bei ca. 70%, d.h. 1 J chemische Energie gibt 0,7 J Wärmeenergie. Bei einer elektrischen Wohnungsheizung ist der Wirkungsgrad der Kraftwerke entscheidend. Er liegt bei der Verwendung von fossilen Brennstoffen in der Nähe von 40%, d.h. 1 J chemische Energie liefert nur 0,4 J Wärmeenergie. Bei einer elektrisch betriebenen Wärmepumpe mit einer gewünschten Zimmertemperatur von 23°C und unter Verwendung des Grundwassers mit z.B. 8°C als das kalte Reservoir folgt für den größtmöglichen Wirkungsgrad  $0,4 \cdot 296 / (296 - 281) = 7,89$ , also 789%. Dies bedeutet, dass durch 1 J chemische Energie 7,89 J Wärmeenergie erzeugt werden.

Bei der Verwendung des Carnot-Prozesses zur Kälteerzeugung (**Kältemaschine**, refrigeration machine) muss der Zyklus ebenfalls entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen werden, jedoch soll hier die dem kalten Reservoir entzogene Wärmeenergie ( $\Delta Q_{34}$ ) möglichst groß sein. Der Wirkungsgrad  $\eta_{KM}$  wird demzufolge durch das Verhältnis von  $\Delta Q_{34}$  und der am System verrichteten Arbeit  $\Delta W$  gegeben:

$$\eta_{KM} = \frac{\Delta Q_{34}}{\Delta W}. \quad (196)$$

Aus den Gln. (193) und (190) folgt für den Carnot-Prozess

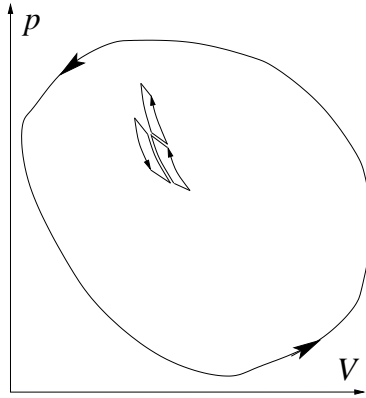
$$\eta_{KM}^{\text{Carnot}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (197)$$

Für eine ideale Kältemaschine zur Abkühlung von Zimmertemperatur ( $T_1 = 300 \text{ K}$ ) auf die Temperatur des flüssigen Heliums ( $T_2 = 4 \text{ K}$ ) ergibt sich nach Gl.(197) ein Wirkungsgrad von nur 0,014. Dies bestätigt die allgemeine Erfahrung, dass die Erzeugung tiefer Temperaturen kostenaufwendig ist.

Aus Gl.(192) folgt mit  $-\Delta W = \Delta Q_{12} + \Delta Q_{34}$  (1. Hauptsatz) zunächst die Beziehung  $(\Delta Q_{12} + \Delta Q_{34})/\Delta Q_{12} = (T_1 - T_2)/T_1$ , woraus sich  $1 + \Delta Q_{34}/\Delta Q_{12} = 1 - T_2/T_1$  oder  $\Delta Q_{12}/T_1 + \Delta Q_{34}/T_2 = 0$  ergibt. Bezeichnen wir allgemein die bei einer Temperatur  $T_i$  zugeführte Wärmeenergie mit  $\Delta Q_i$ , so lässt sich die letztere Gleichung in der Form

$$\frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} = 0 \quad (198)$$

schreiben. Da man den Quotienten  $\Delta Q_i/T_i$  als (zugeführte) **reduzierte Wärmeenergie** (reduced heat) bezeichnet, besagt Gl.(198), dass *beim Carnot-Zyklus die Summe der zugeführten reduzierten Wärmeenergien verschwindet*. Wenn aber bei den Zustandsänderungen irreversible Anteile, wie z.B. Reibungsverluste enthalten sind (es ist dann natürlich kein Carnot-Zyklus mehr), dann wird der Wirkungsgrad  $\eta_{\text{WK}}$  kleiner als  $\eta_{\text{WK}}^{\text{Carnot}} = (T_1 - T_2)/T_1$  und die Summe der zugeführten reduzierten Wärmeenergien kleiner als null.



**Abbildung 54.** Zerlegung eines beliebigen Zyklus im  $p$ - $V$ -Diagramm in (differentiell kleine) Teilzyklen bestehend aus je 2 Isothermen und 2 Adiabaten (s.Abb.49, S.114)

Ein beliebiger Zyklus lässt sich im  $p$ - $V$ -Diagramm in differentiell kleine Teilzyklen zerlegen, die aus jeweils zwei Isothermen und zwei Adiabaten entsprechend den 4 Takten beim Carnot-Zyklus bestehen (s.Abb.54). Da sich aber auf den gemeinsamen Isothermen und Adiabaten benachbarter Teilzyklen die Beträge  $\Delta Q/T$  kompensieren, weil sie entgegengesetzt durchlaufen werden, bleibt nur die Randkurve übrig und es folgt  $\sum_i \Delta Q_i/T_i \leq 0$ , oder nach dem Übergang zu differentiell kleinen Größen,



$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0, \quad (199)$$

wobei das "kleiner als" für irreversible und das Gleichheitszeichen für reversible Zyklen steht. Diese Beziehung gilt entsprechend der obigen Ableitung zunächst nur für ideale Gase. Nach dem 2. Hauptsatz der Wärmelehre gilt sie aber allgemein.

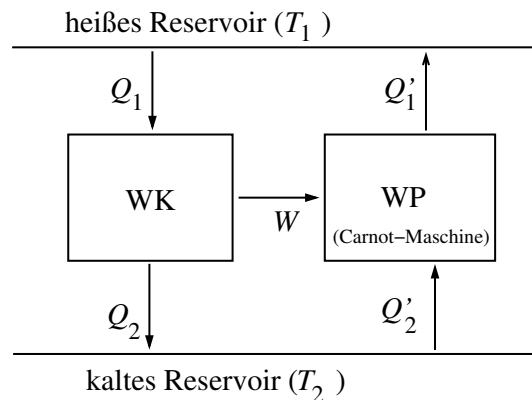
## 9.2 Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik

Der **2. Hauptsatz der Thermodynamik** (second law of thermodynamics) ist, ebenso wie der 1. Hauptsatz (der Energiesatz), ein Erfahrungssatz. Er ist nur scheinbar komplizierter als der 1. Hauptsatz, da er oft ganz verschieden formuliert wird. Wir werden im Folgenden vier äquivalente Formulierungen kennenlernen.

Die einfachste und aus der täglichen Erfahrung unmittelbar ableitbare Formulierung stammt von Rudolf Emanuel Clausius (1822-1888) und lautet:

*Wärmeenergie geht ohne äußere Beeinflussung stets von dem wärmeren zum kälteren Körper über.*

Als Ergebnis eines solchen Übergangs von Wärmeenergie erwärmt sich der kältere Körper auf Kosten des wärmeren Körpers, der sich dabei abkühlt, bis eine einheitliche Temperatur, die **Mischungstemperatur** (mixing temperature), erreicht ist. Zu einer zweiten Formulierung gelangen wir durch die Kopplung einer beliebigen Wärmekraftmaschine (WK) mit einer idealen Wärmepumpe (WP, Carnot-Maschine) entsprechend Abb.55: Die Wärmekraftmaschine nimmt vom heißen Reservoir ( $T_1$ )



**Abbildung 55.** Kopplung von einer beliebigen Wärmekraftmaschine (WK) mit einer Carnot-Maschine, die hier als Wärmepumpe (WP) betrieben wird, zum Beweis, dass der Wirkungsgrad einer beliebigen Wärmekraftmaschine höchstens gleich dem einer Carnot-Wärmekraftmaschine sein kann

die Wärmeenergie  $Q_1 > 0$  auf, gibt an das kalte Reservoir ( $T_2$ ) die Wärmeenergie

$Q_2 > 0$  ab und verrichtet die Arbeit  $W > 0$ , die der Carnot-Maschine zugeführt wird. Der Wirkungsgrad der Wärmekraftmaschine beträgt dabei  $\eta_{\text{WK}} = W/Q_1$ . Die von der Carnot-Maschine an das heiße Reservoir abgegebene Wärmeenergie ist  $Q'_1 = W/\eta_{\text{WK}}^{\text{Carnot}}$ . Wegen des 2. Hauptsatzes muss  $Q_1 \geq Q'_1$  gelten, d.h.  $W/\eta_{\text{WK}} \geq W/\eta_{\text{WK}}^{\text{Carnot}}$ , und damit folgt

$$\eta_{\text{WK}} \leq \eta_{\text{WK}}^{\text{Carnot}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (200)$$

Diese Beziehung besagt,

*dass alle Maschinen einen kleineren oder höchstens den gleichen Wirkungsgrad besitzen, wie die im Abschn. 9.1, S. 117ff., beschriebenen Carnot-Maschinen*

(zweite Formulierung des 2. Hauptsatzes).

Das Gleichheitszeichen in der Beziehung (200) gilt, wenn WK eine Carnot-Maschine ist. Arbeitet diese Carnot-Maschine nicht mit einem idealen Gas, sondern mit einem beliebigen Stoff, dann ändert dies nicht ihren Wirkungsgrad, denn, wäre ihr Wirkungsgrad größer als der mit einem idealen Gas arbeitenden Carnot-Maschine, könnte man nach Abbildung 55 mit der Kombination dieser beiden Carnot-Maschinen gegen den zweiten Hauptsatz verstoßen. Eine analoge Betrachtung kann man für den Fall führen, dass der Wirkungsgrad kleiner wäre.

Auf der Unabhängigkeit des Wirkungsgrades einer Carnot-Maschine vom Arbeitsgas gründet sich die thermodynamische Messung von Temperaturen (**thermodynamische Temperaturskala**, thermodynamic temperature scale). Die Gl.(192), S.120, führt eine Messung von Temperaturdifferenzen auf Energiemessungen ( $\Delta W$ ,  $\Delta Q_{12}$ ) zurück. Die Situation ist ähnlich wie beim Gasthermometer, bei dem Drücke gemessen werden (s.S.58). Der Vorteil gegenüber dem Gasthermometer besteht darin, dass bei der Carnot-Maschine kein ideales Gas verwendet werden muss. Um Temperaturmessungen mit hoher Genauigkeit durchführen zu können, werden Fixpunkte für die thermodynamische Temperatur festgelegt. Einige definierende Fixpunkte der **Internationalen Temperaturskala von 1990** (ITS-90, international temperature scale of 1990) sind [LID90] die Erstarrungspunkte des Kupfers (1357,77 K), des Aluminiums (933,473 K) und des Indiums (429,7485 K), die Tripelpunkte (s.S.160) von Wasser (273,16 K), von Argon (83,8058 K) und von Neon (24,5561 K). Zwischen 0,65 K und 5 K wird die Temperatur durch den Dampfdruck des Heliums definiert.

Zu einer dritten Formulierung des 2. Hauptsatzes gelangt man unter Verwendung der Tatsache, dass der Wirkungsgrad  $\eta_{\text{WK}}$  einer realen Wärmekraftmaschine höchstens gleich dem Wirkungsgrad  $\eta_{\text{WK}}^{\text{Carnot}}$  einer Carnot-Maschine sein kann: Aus  $\eta_{\text{WK}} \leq \eta_{\text{WK}}^{\text{Carnot}}$  folgt mit  $\eta_{\text{WK}}^{\text{Carnot}}$  nach Gl.(192), S.120, dass die von einer realen Wärmekraftmaschine verrichtete Arbeit ( $-\Delta W$ ) kleiner oder gleich dem Ausdruck  $\Delta Q_{12}(T_1 - T_2)/T_1$  sein muss. Das Ergebnis, dass dieser Ausdruck für  $T_1 = T_2$  verschwindet, besagt in Worten:

*Es gibt keine periodisch arbeitende Maschine, die in der Lage ist, Arbeit zu verrichten und die dabei lediglich ein Wärmereservoir abkühlt.*

Eine solche Maschine würde man als **Perpetuum mobile 2. Art** (perpetual motion machine of the second kind) bezeichnen. Die Formulierung des 2. Hauptsatzes, wonach ein Perpetuum mobile 2. Art unmöglich ist, stammt von Lord Kelvin (= William Thomson 1824-1907). Sie schließt aus, dass beispielsweise ein Schiff für seine Fortbewegung das riesige Reservoir an Wärmeenergie der Weltmeere ausnutzt, indem es aus diesem Reservoir Wärmeenergie aufnimmt, ohne einen Teil der entnommenen Wärmeenergie an die Umgebung (Luft) abzugeben.

Der Zusatz "periodisch arbeitend" ist wichtig, denn für eine einmalige isotherme Expansion von z.B.  $n$  Molen eines idealen Gases vom Volumen  $V_1$  auf  $V_2$  gilt (s.S.119)  $\Delta W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = -nRT \ln(V_2/V_1)$ . Diese Größe ist negativ, d.h. es wird von dem Gas Arbeit verrichtet, oder, mit anderen Worten, mechanische Energie abgegeben. Diese Energie stammt von der Wärmeenergie  $\Delta Q$ , die dem Gas bei der Expansion zugeführt werden musste: Nach dem 1. Hauptsatz gilt  $\Delta Q + \Delta W = \Delta U$  und wegen der Isothermie  $\Delta U = 0$ . Somit wird die gesamte dem Gas zugeführte Wärmeenergie  $\Delta Q$  in die mechanische Energie  $-\Delta W$  umgewandelt.

Ü 52

Ü 53

Ü 54

Ü 55

## 13 Dämpfe und reale Gase

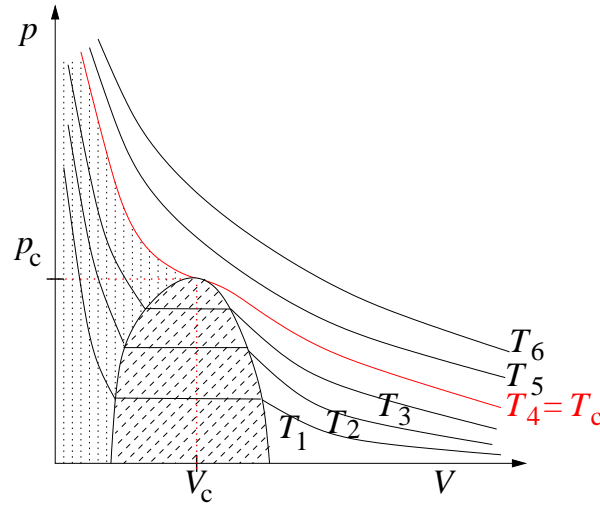
*Georg Christoph Lichtenberg: Acht Bände hat er geschrieben.  
Er hätte gewiss besser getan, er hätte acht Bäume gepflanzt  
oder acht Kinder gezeugt.*

### 13.1 Die Van-der-Waals-Gleichung, Virialentwicklung

Als **Dampf** (vapor), genauer gesagt als **gesättigten Dampf** (saturated vapor), bezeichnet man das Gas, das sich in einem abgeschlossenen Volumen über einer Flüssigkeit bildet. Ein derartiges Gas heißt auch **reales Gas** (real gas). Dessen Druck im Gleichgewicht mit der Flüssigkeit bei der gegebenen Temperatur heißt Sättigungsdampfdruck. Für **Wasserdampf** gibt es im Englischen wegen der großen technischen Bedeutung ein eigenes Wort (steam). **Ungesättigter Dampf** (unsaturated vapor) liegt vor, wenn der Dampfdruck niedriger ist als der Sättigungsdampfdruck. **Überhitzter Dampf** (superheated vapor) besitzt eine höhere Temperatur als der gesättigte Dampf. Mit Vergrößerung des Volumens bei konstanter Masse (Stoffmenge) erfolgt schließlich der Übergang zum **idealen Gas** (ideal gas). Den Druck des gesättigten Dampfes bezeichnen wir mit  $p_{sv}$ , wobei sv an saturated vapor erinnern soll.  $p_{sv}$  ist stoffspezifisch und hängt von der Temperatur ab, aber nicht vom Volumen. Den dampfförmigen, den flüssigen und den festen Zustand eines Stoffes nennt man seine drei **Aggregatzustände** (aggregation states). Demgegenüber bezeichnet man als **Phasen** (phases) homogene Gebiete eines Stoffes, die durch unterschiedliche Anordnung der Teilchen charakterisiert sind. Zu den Phasen zählen also neben den drei Aggregatzuständen evtl. noch verschiedene **Modifikationen** (polymorphs) des Stoffes im festen Zustand. Beispielsweise sind Graphit und Diamant zwei Modifikationen des festen Kohlenstoffes.

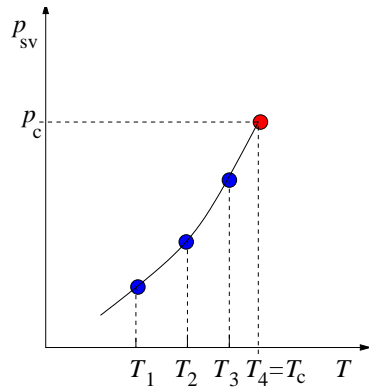
In Abb.62 ist das  $p$ - $V$ -Diagramm einer bestimmten Stoffmenge (z.B. 1 kg) für den Bereich schematisch dargestellt, in dem nur der gasförmige oder der flüssige oder beide Aggregatzustände auftreten können.

Im schräg schraffierten Gebiet liegt der Stoff in diesen beiden Zuständen vor, man spricht von der **Koexistenz** (coexistence) des flüssigen und des gasförmigen Aggregatzustandes. Demzufolge muss der Druck gleich dem Sättigungsdampfdruck  $p_{sv}$  und damit unabhängig vom Volumen sein (horizontale Geradenstücke in Abb.62). Im punktierten Gebiet ist das Volumen, das der vorgegebenen Stoffmenge zur Verfügung steht, so klein, dass der Stoff nur im flüssigen Aggregatzustand existieren kann. Dies bedingt einen sehr starken Anstieg des Drucks mit abnehmendem Volumen. Für große Volumina dagegen ( $V \rightarrow \infty$ ) erfolgt der Übergang zum idealen Gas, so dass der Druck entsprechend Gl.(161), S.98, umgekehrt proportional zum Volumen abnehmen muss. Oberhalb einer gewissen Temperatur, die man als **kritische Temperatur** (critical temperature)  $T_c$  des Stoffes bezeichnet, gibt es keinen Unterschied mehr zwischen dem flüssigen und dem gasförmigen Aggregatzustand. Der Druck, bei



**Abbildung 62.** Schematische Darstellung des  $p$ - $V$ -Diagramms eines Stoffes im Bereich flüssig/gasförmig. Der kritische Punkt ist durch den Wendepunkt der Isothermen  $T_4 = T_c$  mit dem kritischen Druck  $p = p_c$  und dem kritischen Volumen  $V = V_c$  gegeben. Wurde das Diagramm für 1 kg des Stoffes aufgenommen, so ist die kritische Dichte  $\rho_c = 1 \text{ kg}/V_c$ .

dem das Gebiet der Koexistenz verschwindet, nennt man den **kritischen Druck** (critical pressure)  $p_c$ . An dieser Stelle besitzt die Isotherme der kritischen Temperatur einen Wendepunkt. Wenn das  $p$ - $V$ -Diagramm für eine Masse  $m$  des Stoffes dargestellt wird, ist das zugehörige **kritische Volumen** (critical volume)  $V_c$  mit der **kritischen Dichte** (critical density) über die Beziehung  $\rho_c = m/V_c$  verknüpft. Am kritischen Punkt wird die Dichte der Flüssigkeit  $\rho_{\text{liq}}$  gleich der Dichte des gesättigten Dampfes  $\rho_{\text{sv}}$ . Die aus Abb.62 entnehmbare Abhängigkeit des Dampfdrucks  $p_{\text{sv}}$  von der Temperatur  $T$  ist schematisch in Abb.63 dargestellt.



**Abbildung 63.** Dampfdruckkurve entsprechend den horizontalen Geradenstücken im  $p$ - $V$ -Diagramm von Abb.62

Die Dampfdruckkurve endet bei der kritischen Temperatur  $T_c$ , da oberhalb davon kein Unterschied mehr zwischen Flüssigkeit und Dampf besteht. Bei  $T = T_c$  wird  $\rho_{\text{liq}} = \rho_{\text{sv}}$ . Die Tab.29 enthält einige Zahlenwerte für den Dampfdruck von Wasser.

**Tabelle 29.** Der Sättigungsdampfdruck  $p_{\text{sv}}$  des Wassers in kPa für Temperaturen  $\vartheta$  in °C zwischen 0 °C und der kritischen Temperatur 373,99 °C [LID90]. Man beachte die Umrechnung  $T/\text{K} = \vartheta/^\circ\text{C} + 273,15$

$\vartheta / ^\circ\text{C}$	$p_{\text{sv}} / \text{kPa}$	$\vartheta / ^\circ\text{C}$	$p_{\text{sv}} / \text{kPa}$
0	0,61129	25	3,1690
0,01	0,61173	50	12,344
5	0,87260	100	101,32
10	1,2281	200	1553,6
15	1,7056	300	8583,8
20	2,3388	373,99	22064

Eine Flüssigkeit siedet, wenn ihr Dampfdruck gleich dem äußeren Luftdruck ist. Bei dieser Temperatur, die man als **Siedetemperatur** (boiling point)  $T_b$  bezeichnet, muss also die Dampf Bildung nicht nur an der Oberfläche, sondern auch im Inneren erfolgen. Es bilden sich die bekannten Blasen, die allerdings bei einer gleichmäßigen Temperaturverteilung nur im oberen Teil der Flüssigkeit auftreten, da in den tieferen Schichten zum äußeren Luftdruck noch der Schweredruck der Flüssigkeit hinzukommt. Unter verringertem Luftdruck siedet die Flüssigkeit schon bei niedrigeren Temperaturen. Dies erklärt, warum man in den Bergen Speisen länger als im Tal kochen muss, bis sie gar sind und weshalb durch Kochen in Drucktöpfen Energie gespart werden kann. Das Sieden unter verringertem Druck wird in der Technik bei der sog. Vakuumdestillation verwendet.

In der Tab.30 sind für Wasser, schweres Wasser, Ammoniak, Kohlendioxid und Helium die kritischen Drücke und Temperaturen sowie die Siedetemperaturen für einen äußeren Druck von 101,325 kPa zusammengestellt.

Das in Abb.62 dargestellte Verhalten kann näherungsweise durch die empirische **van-der-Waals-Gleichung** (van der Waals equation, Johannes Diderik van der Waals 1837-1923)

$$(p + a(n/V)^2)(V - nb) = nRT \quad (237)$$

beschrieben werden. Hierin bezeichnet  $p$  den Druck (in Pa),  $V$  das Volumen (in  $\text{m}^3$ ),  $T$  die Temperatur (in K),  $n$  die Stoffmenge (in mol) des Gases und  $R$  die allgemeine Gaskonstante ( $R = 8,314472(15) \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$  [COD98]),  $a$  und  $b$  sind die **van-der-Waals-Konstanten** (van der Waals coefficients), für die man einige Zahlenwerte in der Tab.31 findet.

**Tabelle 30.** Kritischer Druck  $p_c$  in MPa, kritische Temperatur in  $^{\circ}\text{C}$  ( $\vartheta_c$ ) und Siedetemperatur bei einem äußeren Druck von 101,325 kPa in  $^{\circ}\text{C}$  ( $\vartheta_b$ ) [LID90]. Bei  $\text{CO}_2$  bezeichnet  $\vartheta_b$  die Sublimationstemperatur in  $^{\circ}\text{C}$  (s. S.162). Man beachte die Umrechnung  $T / \text{K} = \vartheta / ^{\circ}\text{C} + 273,15$

Stoff	kritischer Druck $p_c$ in MPa	kritische Temperatur $\vartheta_c$ in $^{\circ}\text{C}$	Siedetemperatur $\vartheta_b$ in $^{\circ}\text{C}$
Wasser ( $\text{H}_2\text{O}$ , water)	22,064	+373,99	+100
schweres Wasser ( $\text{D}_2\text{O}$ , heavy water)	21,671	+370,74	+101,42
Ammoniak ( $\text{NH}_3$ , ammonia)	11,4	+132,5	−33,35
Kohlendioxid ( $\text{CO}_2$ , carbon dioxide)	7,37	+31	−78,5 (Sublimation)
Helium ( $^4\text{He}$ , helium)	0,227	−267,96	−268,93

Zur Interpretation der van-der-Waals-Gleichung vergleichen wir sie mit der Zustandsgleichung des idealen Gases (Gl.(161), S.98). Es folgt

$$p_{\text{ideal}} = p + a(n/V)^2 \quad (238)$$

und

$$V_{\text{ideal}} = V - n b. \quad (239)$$

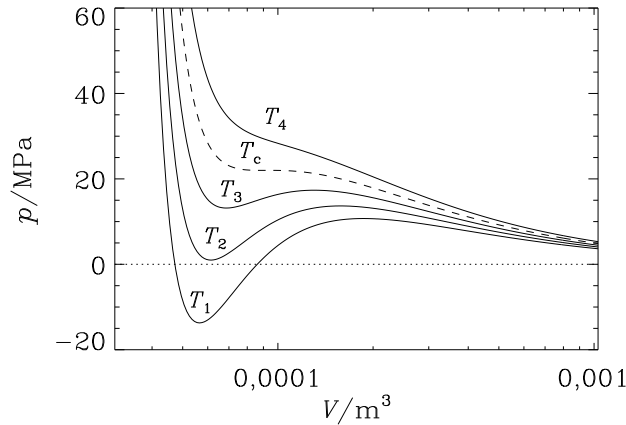
Der tatsächliche Druck  $p$  ist also um den Term  $a(n/V)^2$ , der **Binnendruck** (internal pressure) genannt wird, kleiner als der des idealen Gases  $p_{\text{ideal}}$ . Die Ursache dafür sind die Anziehungskräfte zwischen den Teilchen, die beim idealen Gas vernachlässigt werden. Andererseits folgt aus Gl.(239), dass das tatsächliche Volumen  $V$  um den als **Kovolumen** (internal volume) bezeichneten Term  $nb$  größer ist als das Volumen des idealen Gases  $V_{\text{ideal}}$ . Dies wird verständlich, da beim idealen Gas angenommen wurde, dass die Teilchen kein Eigenvolumen besitzen, sondern punktförmig sind.

Der näherungsweise Charakter der van-der-Waals-Gleichung (Gl.(237)) äußert sich darin, dass sie das Verhalten im Gebiet der Koexistenz der beiden Aggregatzustände (schräg schraffiertes Gebiet in Abb.62, S.146) nicht richtig wiedergibt. In Abb.64 sind

**Tabelle 31.** Van-der-Waals-Konstanten für Kohlendioxid, Wasser und Wasserstoff [LID90]

Stoff	$a / \text{Pa m}^6 \text{mol}^{-2}$	$b / \text{m}^3 \text{mol}^{-1}$
Kohlendioxid ( $\text{CO}_2$ , carbon dioxide)	0,364	$4,267 \cdot 10^{-5}$
Wasser ( $\text{H}_2\text{O}$ , water)	0,554	$3,049 \cdot 10^{-5}$
Wasserstoff ( $\text{H}_2$ , hydrogen)	0,0248	$2,661 \cdot 10^{-5}$

die nach Gl.(237) für 1 Mol Wasser unter Verwendung der van-der-Waals-Konstanten nach Tab.31 berechneten Isothermen dargestellt. A 59



**Abbildung 64.** Isothermen für 1 Mol Wasser berechnet nach der van-der-Waals-Gleichung (s.Gl.(237)) und unter Verwendung der Zahlenwerte von Tab.31.  $T_1 = 500$  K,  $T_2 = 550$  K,  $T_3 = 600$  K,  $T_c \approx 647$  K,  $T_4 = 700$  K

Man erkennt, dass die Ergebnisse im Gebiet der Koexistenz nicht richtig sein können. Einerseits sind negative Werte für den Druck physikalisch unsinnig und andererseits findet man experimentell auch nicht den S-förmigen Kurvenverlauf. Dieser Kurve kann man aber den Sättigungsdampfdruck  $p_{sv}$ , also die Ordinate des horizontalen Stückes des tatsächlichen Kurvenverlaufs (s.Abb.62, S.146) entnehmen, indem man eine horizontale Gerade für die betreffende Isotherme so zieht, dass der Inhalt der von der Horizontalen und dem oberen Schleifenstück begrenzten Fläche gleich dem Inhalt der Fläche zwischen der Horizontalen und dem unteren Schleifenstück ist (**Maxwell-Konstruktion**, Maxwell construction).

Geringe Teile der von der van-der-Waals-Gleichung gelieferten S-förmigen Schleife können bei entsprechender Sorgfalt (Beobachtung von labilen Zuständen) experimentell realisiert werden: Wenn bei Verringerung des Volumens infolge einer Abwesenheit von Kondensationskeimen keine Flüssigkeitsausscheidung (Tröpfchenbildung) stattfindet, kann das Gas einen höheren Druck als den Sättigungsdampfdruck annehmen (**übersättigter Dampf**, supersaturated vapor). Andererseits kann sich eine Flüssigkeit unter einem geringeren Druck als dem Sättigungsdampfdruck befinden, ohne zu sieden (**Siedeverzug**, delay in boiling). Allerdings sind diese Zustände labil.

Bei Gültigkeit der van-der-Waals-Gleichung lassen sich das kritische Volumen  $V_c$  und die kritische Temperatur  $T_c$  in einfacher Weise aus der Stoffmenge  $n$ , der Gaskonstanten  $R$  und den van-der-Waals-Konstanten  $a$  und  $b$  berechnen.



Die Differentiation der van-der-Waals-Gleichung (Gl.(237), S.147)  $p = nRT(V - nb)^{-1} - a(n/V)^2$  nach dem Volumen liefert  $dp/dV = -nRT(V - nb)^{-2} + 2an^2V^{-3}$ . Nullsetzen dieser Ableitung gibt die 1. Bedingung  $(V - nb)^2(RT)^{-1} = V^3(2an)^{-1}$ . Damit es sich um einen Wendepunkt handelt, muss auch die 2. Ableitung  $d^2p/dV^2 = 2nRT(V - nb)^{-3} - 6an^2V^{-4}$  verschwinden. Die daraus folgende 2. Bedingung  $(V - nb)^3(RT)^{-1} = V^4(3an)^{-1}$  dividieren wir durch die erste, womit sich  $V = V_c = 3nb$  ergibt. Dieses Ergebnis setzen wir in die 1. Bedingung ein und erhalten schließlich  $T = T_c = 8a/(27bR)$ .

Neben der van-der-Waals-Gleichung gibt es noch zahlreiche andere Möglichkeiten, das Verhalten realer Gase analytisch zu beschreiben. Eine allgemeine besteht darin, den Druck durch eine Reihenentwicklung nach dem Quotienten  $n/V$  darzustellen:

$$p = \frac{nRT}{V} (1 + A_{(T)}(n/V) + B_{(T)}(n/V)^2 + \dots). \quad (240)$$

Man bezeichnet dies als **Virialentwicklung** (virial expansion) und die Koeffizienten  $A_{(T)}, B_{(T)}$  usw. als **Virialkoeffizienten** (virial coefficients). Sie hängen nur von der Temperatur ab und sind charakteristische Größen des betreffenden Gases. Die Temperatur, für die der erste Virialkoeffizient verschwindet, nennt man die **Boyle-Temperatur** (Boyle temperature, Robert Boyle 1627-1691)  $T_B$ . Bei dieser Temperatur kann das reale Gas noch am ehesten durch die Zustandsgleichung des idealen Gases (Gl.(161), S.98) beschrieben werden. Für Wasser ergibt sich, wenn man die Gültigkeit der van-der-Waals-Gleichung voraussetzt,  $T_B = 2185$  K. A 60 Ü 68

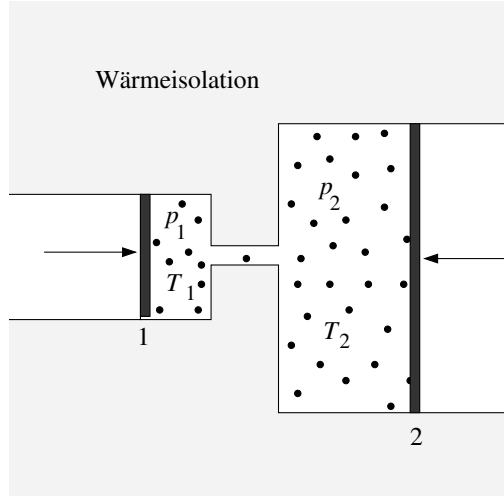
Schreibt man die van-der-Waals-Gleichung (Gl.(237), S.147) in der Form  $p = nRTV^{-1} (1 - nb/V)^{-1} - a(n/V)^2$ , so liefert die Entwicklung des ersten Summanden  $p = nRTV^{-1}[1 + nb/V + (nb/V)^2 + \dots] - nRTV^{-1}[an/(RTV)]$  oder  $p = nRTV^{-1}[1 + (b - a/RT)(n/V) + b^2(n/V)^2 + \dots]$ , woraus man durch Vergleich mit der Virialentwicklung (Gl.(240))  $A_{(T)} = b - a/RT$  und  $B_{(T)} = b^2$  erhält. Die erste Gleichung liefert für die Boyle-Temperatur  $T_B = a/Rb$ .

### 13.2 Der Joule-Thomson-Effekt

Die Anziehungskräfte zwischen den Teilchen eines realen Gases (Term  $a$  in der van-der-Waals-Gleichung, Gl.(237), S.147) und ihre Eigenvolumina (Term  $b$ ) sind die Ursache für den **Joule-Thomson-Effekt** (Joule-Thomson effect, James Prescott Joule 1818-1889, William Thomson = Lord Kelvin 1824-1907), der bei der Kühlung und Gasverflüssigung eine wichtige Anwendung gefunden hat. Das reale Gas wird von dem Kolben 1 mit dem konstanten Anfangsdruck  $p_1$  und bei einer Anfangstemperatur  $T_1$  durch eine gedrosselte Leitung (z.B. eine Düse oder ein Rohrstück mit einem Wattepfropfen) hindurchgepresst. Auf der anderen Seite wird der Druck  $p_2 < p_1$  durch Verschiebung des Kolbens 2 aufrecht erhalten (s.Abb.65). Unter der

Voraussetzung, dass dieser Vorgang adiabatisch (Wärmeisolation!) verläuft und dass keine Reibung sowie Wirbel auftreten, ergibt sich aus dem 1. Hauptsatz (Gl.(180a), S.112) wegen  $\delta Q = 0$  die Gleichung  $U_2 - U_1 = (-p_2 V_2) - (-p_1 V_1)$ . Diese Beziehung besagt, dass die Größe  $U + pV$ , die als Enthalpie  $H$  bezeichnet wird (s.S.133), konstant ist:

$$H = U + pV = \text{const.} \quad (241)$$



**Abbildung 65.** Experimentelle Anordnung zum Nachweis des Joule-Thomson-Effektes

Aus dieser Gleichung ergibt sich für die Temperaturänderung

$$T_2 - T_1 = -\frac{1}{nC_p^m} \left( T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V \right) (p_1 - p_2). \quad (242)$$

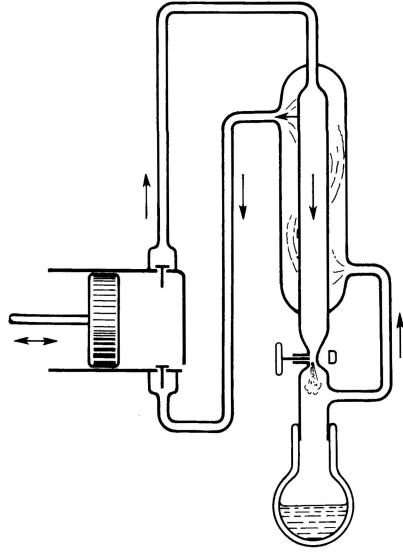
Wegen  $H = U + pV$  gilt  $\Delta H = \{\partial(U + pV)/\partial T\}_p \Delta T + \{\partial H/\partial p\}_T \Delta p$ . Auf Grund der Definition der molaren Wärmekapazität bei konstantem Druck  $C_p^m$  (s.S.107) kann man für den ersten Summanden  $nC_p^m \Delta T$  schreiben, wobei  $n$  die Anzahl der Mole bezeichnet. Für den zweiten Summanden folgt unter Verwendung der Gl.(214), S.133  $\{\partial H/\partial p\}_T = T(\partial S/\partial p)_T + V$ . Hierin lässt sich nun  $(\partial S/\partial p)_T$  noch durch  $-(\partial V/\partial T)_p$  ersetzen. Dies ist eine der sog. **Maxwell-Relationen** (Maxwell relations), die man folgendermaßen beweisen kann: Nach Gl.(215), S.133, gilt  $(\partial G/\partial T)_p = -S$  und  $(\partial G/\partial p)_T = V$ . Wegen der Vertauschbarkeit der Reihenfolge von partiellen Ableitungen muss also  $-(\partial S/\partial p)_T = (\partial V/\partial T)_p$  gelten. Damit folgt schließlich für  $\Delta H$  die Beziehung  $\Delta H = nC_p^m \Delta T + \{-(\partial V/\partial T)_p + V\} \Delta p$  und, wegen der Bedingung  $\Delta H = 0$ , die gesuchte Gl.(242).

Bei Gültigkeit der van-der-Waals-Gleichung (Gl.(237), S.147) folgt

$$T_2 - T_1 \propto -(2a - bRT)(p_1 - p_2). \quad (243)$$

Die Differentiation der Gl.(237), S.147, nach der Temperatur  $T$  bei konstantem Druck  $p$  liefert  $-2an^2V^{-3} \cdot (V - nb)(\partial V/\partial T)_p + [p + a(n/V)^2](\partial V/\partial T)_p = nR$ . Damit ergibt sich unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung (Terme proportional zu  $a^2$  und  $ab$ )  $(\partial V/\partial T)_p \approx (nR/p)[1 + a(n/V)^2/p]$ . Für den Term zwischen den großen Klammern in Gl.(242) folgt damit  $T(\partial V/\partial T)_p - V \approx (nRT/p)[1 + a(n/V)^2/p] - V$ . Ersetzt man hier  $nRT$  nach Gl.(237) und vernachlässigt wieder Terme höherer Ordnung, so ergibt sich  $T(\partial V/\partial T)_p - V \approx n^2(pV)^{-1} \cdot [2a - b(pV)/n]$ . Mit der Näherung  $pV \approx nRT$  folgt schließlich  $T(\partial V/\partial T)_p - V \propto 2a - bRT$ .

Wegen  $p_1 > p_2$  folgt für hohe Temperaturen  $T_2 > T_1$ , d.h. eine Erwärmung des Gases, während für niedrige Temperaturen eine Abkühlung auftritt. Die Temperatur, bei der sich  $T_2 = T_1$  ergibt, nennt man die **Inversionstemperatur** (inversion temperature)  $T_i$  des betreffenden Gases. Aus Gl.(243) folgt  $T_i = 2a/Rb$ . Für Drücke zwischen 0,1 und 10 MPa liegen die Inversionstemperaturen von Kohlendioxid, Luft, Wasserstoff und Helium bei ca. 1900 K, 660 K, 180 K bzw. 30 K.



**Abbildung 66.** Schematische Darstellung einer Linde-Maschine zur Luftverflüssigung

Beim **Linde-Verfahren** (Linde process, Carl von Linde 1842-1934), s.Abb.66, entspannt man Luft von ca. 20 MPa über ein Drosselventil auf etwa 2 MPa. Hierbei

tritt, da die Inversionstemperatur der Luft über der Zimmertemperatur liegt, eine Abkühlung ein. Sie beträgt ca. 45 K. Die abgekühlte Luft wird zurückgeleitet und dient zur Kühlung der nächsten zu entspannenden Luftmenge (**Gegenstromprinzip**, counter-current principle). Durch ständige Wiederholung wird die Luft schließlich so weit gekühlt, dass sie sich verflüssigt (**Luftverflüssigung**, liquefaction of air). Ü 69

### 13.3 Hygrometrie

Die **Hygrometrie** (hygrometry) befasst sich mit der Messung des Wassergehalts der Luft. Wegen der häufigen Temperaturänderungen in der freien Atmosphäre und der im Vergleich dazu langsamen Diffusion der Wassermoleküle in der Luft, wird i.Allg. die Sättigung entweder nicht erreicht oder die Atmosphäre sogar übersättigt. Als **maximale Feuchtigkeit** (maximum humidity) bezeichnet man die Dichte  $\rho_{sv}$  des Wasserdampfs in der Luft beim Sättigungsdampfdruck  $p_{sv}$  des Wassers. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen ergibt sich durch folgende Überlegung. Für die Dichte  $\rho_{sv}$  kann man unter Verwendung der molaren Masse  $M$  schreiben  $\rho_{sv} = nM/V$ . Andererseits gilt mit der Annahme, dass sich der Wasserdampf wie ein ideales Gas verhält (s.Gl.(161), S.98),  $p_{sv} = nRT/V$  oder  $n/V = p_{sv}(RT)^{-1}$ . Durch Einsetzen dieser Gleichung in die Beziehung für  $\rho_{sv}$  folgt dann sofort

$$\rho_{sv} = p_{sv} \frac{M}{RT}. \quad (244)$$

In Tab.32 sind experimentelle Werte für die Dichte  $\rho_{sv,exp}$  mit den nach Gl.(244) berechneten Werten ( $M = 18,015 \cdot 10^{-3}$  kg/mol) verglichen. Man erkennt, dass die Gl.(244) eine relativ gute Näherung darstellt. Als **absolute Feuchtigkeit** (absolute humidity) bezeichnet man die tatsächliche Dichte  $\rho$  des Wasserdampfs in der Luft und als **relative Feuchtigkeit** (relative humidity) die Größe

$$r_h = 100 \left( \frac{\rho}{\rho_{sv}} \right). \quad (245)$$

Der **Taupunkt** (dew point) ist diejenige Temperatur (man beachte, dass ja  $\rho_{sv}$  mit abnehmender Temperatur kleiner wird, s.Tab.32), bei der  $r_h$  den Wert 100% erreicht. Bei einer Temperaturabsenkung unter den Taupunkt kondensiert der Wasserdampf. Eine spiegelnde Metalloberfläche, die unter den Taupunkt abgekühlt wird, beschlägt sich mit feinen Wassertröpfchen und aus dem so bestimmten Taupunkt lässt sich dann unter Verwendung der Tab.32 die relative Feuchtigkeit  $r_h$  bestimmen (**Taupunkthygrometer**, dew-point hygrometer). In der Praxis verwendet man meist die Eigenschaft von organischen Fasern, ihre Länge in Abhängigkeit von der Feuchtigkeit zu ändern. Derartige **Haarhygrometer** (hair hygrometer) müssen aber kalibriert werden. Ü 70 Ü 71

**Tabelle 32.** Experimentelle Werte  $\rho_{\text{sv,exp}}$  [KOH96] und nach Gl.(244) berechnete Werte  $\rho_{\text{sv}}$  für die Dichte von gesättigtem Wasserdampf für verschiedene Temperaturen  $\vartheta$  und die zugehörigen Dampfdrücke  $p_{\text{sv}}$  [LID90]. Man beachte die Umrechnung  $T/\text{K} = \vartheta/^\circ\text{C} + 273,15$

Temperatur $\vartheta$ in $^\circ\text{C}$	Dampfdruck $p_{\text{sv}}$ in kPa	Experimentelle Dichte $\rho_{\text{sv,exp}}$ in $\text{kgm}^{-3}$	Berechnete Dichte $\rho_{\text{sv}}$ in $\text{kgm}^{-3}$
0	0,61129	0,00485	0,00485
5	0,87260	0,00680	0,00679
10	1,2281	0,00940	0,00940
15	1,7056	0,01282	0,01282
20	2,3388	0,01729	0,01729
25	3,1690	0,02304	0,02303
30	4,2455	0,03037	0,03034
35	5,6267	0,03961	0,03956

## 25 Wärmestrahlung

*Niels Bohr: Wer von der Quantentheorie nicht schockiert ist, hat sie nicht verstanden.*

### 25.1 Grundbegriffe, Photometrie

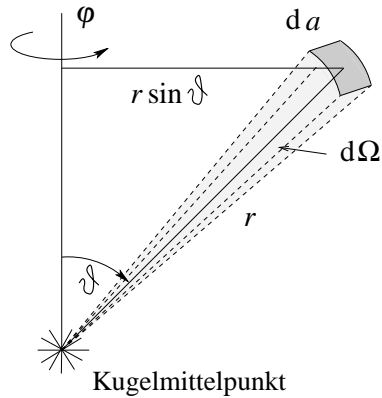
Unter **Wärmestrahlung** (thermal radiation oder temperature radiation) versteht man die Gesamtheit der elektromagnetischen Wellen, die von einem makroskopischen Körper infolge der thermischen Bewegung seiner Bausteine abgestrahlt wird. Die **Photometrie** (photometry) befasst sich mit der quantitativen Charakterisierung dieser elektromagnetischen Strahlung. Bei der **subjektiven Photometrie** (subjective photometry) wird das menschliche Auge als Detektor verwendet. Die auf diese Weise erhaltenen **visuellen** (visual quantities) oder **lichttechnischen Größen** (luminous quantities) kennzeichnen wir im Folgenden durch den Index  $v$ . Bei der **objektiven Photometrie** (objective photometry) ergeben sich dagegen die von der spektralen Empfindlichkeit des menschlichen Auges unabhängigen **strahlungsphysikalischen Größen** (radiant quantities), die keinen besonderen Index erhalten. Die Empfindlichkeit des menschlichen Auges (s.S.329) zeigt bei höheren Lichtintensitäten (Tagsehen) ein Maximum in der Nähe von 555 nm und geht nach null für  $\lambda_0 \geq 750$  nm und  $\lambda_0 \leq 350$  nm.

Wenn man eine gelblichgrüne Lichtquelle ( $\lambda_0 \approx 555$  nm) genauso hell empfindet wie eine rote Lichtquelle ( $\lambda_0 \approx 750$  nm), so strahlt die rote eine um viele Größenordnungen höhere Leistung ab. Wir müssen also streng zwischen visuellen und strahlungsphysikalischen Größen unterscheiden.

Die Einheit der **Lichtstärke** (luminous power)  $I_v$ , die zu den Grundeinheiten des SI gehört, ist die **candela** (cd). Sie wird folgendermaßen definiert:

*Eine Lichtquelle, die monochromatisches Licht der Frequenz  $5,40 \cdot 10^{14}$  Hz (entsprechend einer Vakuumwellenlänge  $\lambda_0$  von 555 nm) emittiert, besitzt die Lichtstärke 1 cd, wenn sie in der betreffenden Richtung pro Raumwinkeleinheit die Leistung (1/683) W abstrahlt.*

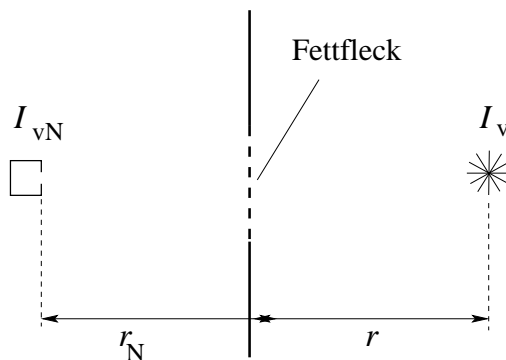
Bezeichnet man mit  $da$  ein differentielles Flächenelement auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius  $r$  um die betrachtete Lichtquelle, so ist der differentielle Raumwinkel  $d\Omega$  durch die Beziehung  $d\Omega = r^{-2}da$  mit  $da = (r \sin \vartheta d\varphi)(r d\vartheta)$  definiert (s.Abb.222), d.h. es gilt  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ . Die Einheit des **Raumwinkels** (solid angle) heißt **Steradian** (steradian, sr).



**Abbildung 222.** Zur Definition des differentiellen Raumwinkels  $d\Omega$ : Das Flächenelement  $da$  einer Kugeloberfläche mit dem Radius  $r$  besitzt die Größe  $r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  und das dazugehörige Raumwinkелеlement ist definiert als  $d\Omega = da/r^2 = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ . Daher gilt für das Integral über alle Richtungen  $\oint d\Omega = 4\pi$

Im Allgemeinen ist die Lichtstärke einer Lichtquelle abhängig von der Richtung, aus der man sie betrachtet. Eine **punktförmige Lichtquelle** (point light source) stellt eine Idealisierung in der Hinsicht dar, dass ihre Lichtstärke unabhängig von der Richtung ist. Nach dem bisher Gesagten besitzt also eine monochromatische punktförmige Lichtquelle mit der Vakuumwellenlänge  $\lambda_0 = 555 \text{ nm}$  und der Strahlungsleistung  $\Phi$  eine von der Richtung unabhängige Lichtstärke  $I_v$ , für die  $I_v/\text{cd} = (683/4\pi)\Phi/\text{W}$  gilt.

Die Messung von Lichtstärken erfolgt oft durch Vergleich mit einer Lichtquelle bekannter Lichtstärke, die wir als Normal bezeichnen. Relativ einfach sind die Verhältnisse dann, wenn die unbekannte Lichtquelle und das Normal die gleiche Farbe besitzen. Bei nicht zu hohen Ansprüchen an die Messgenauigkeit ist das in Abb. 223 schematisch dargestellte **Fettfleckphotometer** nach Bunsen (grease spot photometer oder Bunsen photometer, Robert Wilhelm Bunsen 1811-1899) gut geeignet.



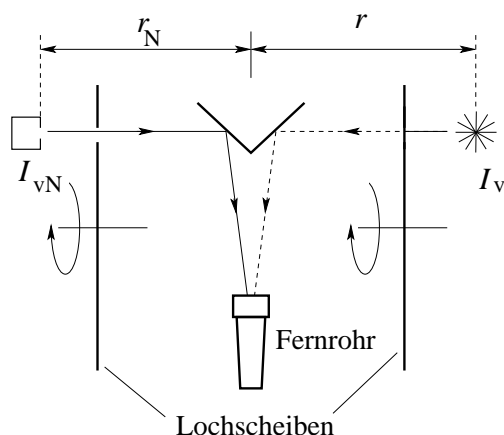
**Abbildung 223.** Fettfleckphotometer nach Bunsen.  $I_{vN}$  ist die Lichtstärke des Normal und  $I_v$  die zu messende Lichtstärke. Der Fettfleck wird unsichtbar, wenn die Gl.(536) erfüllt ist

Wenn die Lichtquelle mit der bekannten Lichtstärke  $I_{vN}$  sehr nahe an das mit einem Fettfleck versehene durchscheinende Papier herangebracht wird, erscheint der Fettfleck, von der Seite der zu messenden Lichtquelle aus gesehen, hell auf dunklem Untergrund. Bei großer Entfernung dagegen sieht man ihn dunkel auf hellem Untergrund. Er verschwindet, wenn die von beiden Seiten auf den Fleck der Fläche  $dS$  einfallenden Strahlungsleistungen (s. Poynting-Vektor, S.286) gleich sind. Es muss damit gelten  $I_{vN}r_N^{-2}dS = I_v r^{-2}dS$  oder

$$I_v = I_{vN} \left( \frac{r}{r_N} \right)^2. \quad (536)$$

Besitzen das Normal und die zu messende Lichtquelle unterschiedliche Farben, so versagt dieses Verfahren, da der Fettfleck für keine Stellung zum Verschwinden gebracht werden kann. Relativ gute Ergebnisse liefert in einem solchen Fall das in der Abb.224 schematisch dargestellte **Flimmerphotometer** (flicker photometer). Die zwei Spiegel und das Fernrohr sind so eingerichtet, dass man von den beiden Lichtquellen einen räumlich nicht aufgelösten Farbeindruck in der Mitte des Gesichtsfeldes erhält. Die rotierenden Lochscheiben blenden abwechselnd das Normal ( $I_{vN}$ ) bzw. die zu messende Lichtquelle ( $I_v$ ) ab und man beobachtet bei nicht zu hohen Tourenzahlen ( $\leq 10$  Hz) ein Flimmern, das verschwindet, wenn die Gl.(536) erfüllt ist.

Um einen Begriff von der Größe der Einheit candela zu vermitteln, sei erwähnt, dass in der Richtung maximaler Abstrahlung eine 40 W-Glühlampe eine Lichtstärke von ca. 40 cd, eine 40 W-Leuchtstofflampe von ca. 200 cd und eine 100 W-Glühlampe von ca. 130 cd besitzt.



**Abbildung 224.** Flimmerphotometer. Das im Fernrohr sichtbare Flimmern zwischen den Farben des Normal und der zu messenden Lichtquelle verschwindet, wenn die Gl.(536) erfüllt ist



Der **Lichtstrom** (luminous flux)  $\Phi_v$  wird dadurch definiert, dass eine Lichtquelle mit der Lichtstärke  $I_v$  in den differentiellen Raumwinkel  $d\Omega$  (s. Abb. 222, S. 408) den Lichtstrom  $d\Phi_v = I_v d\Omega$  abstrahlt. Für den gesamten Lichtstrom  $\Phi_v$  einer Lichtquelle mit der vom Raumwinkel  $\Omega$  (zur Einheit sr, s. S. 407) abhängigen Lichtstärke  $I_v(\Omega)$  gilt also

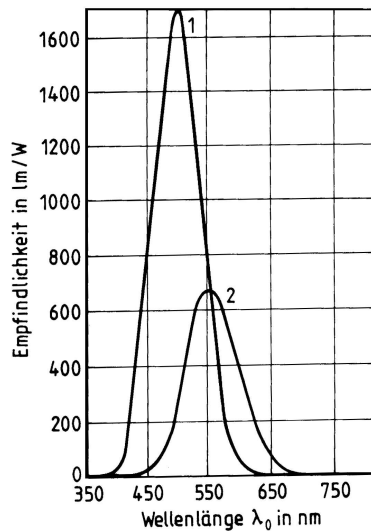
$$\Phi_v = \oint I_v(\Omega) d\Omega. \quad (537)$$

Für die Einheit des Lichtstromes, cd·sr, hat man die Bezeichnung **Lumen** (lumen, lm) eingeführt. Der gesamte Lichtstrom, den eine Leuchtdiode abstrahlt, ist ca.  $10^{-2}$  lm. Bei einer 60 W-Glühlampe beträgt er ca. 730 lm und bei einer 40 W-Leuchtstofflampe ca. 2300 lm.

Wenn eine monochromatische Lichtquelle mit der Vakuumwellenlänge  $\lambda_0 = 555$  nm einen **Energiestrom** (eine **Strahlungsleistung**, radiant flux oder radiated power)  $\Phi$  aussendet, so gilt für den zugehörigen Lichtstrom  $\Phi_v$  auf Grund der Definition der candela

$$\Phi_v = K_m \Phi \quad \text{mit} \quad K_m = 683 \frac{\text{lm}}{\text{W}}. \quad (538)$$

$K_m$  wird als **photometrisches Strahlungsäquivalent** (luminous efficacy oder visibility factor) bezeichnet. Für andere Wellenlängen ist der Proportionalitätsfaktor zwischen  $\Phi_v$  und  $\Phi$  kleiner. Er ergibt sich aus der Empfindlichkeitskurve des menschlichen Auges für Helladaption und nimmt, wie man aus der Kurve 2 von Abb. 225 ersieht, sowohl nach größeren als auch nach kleineren Wellenlängen hin stark ab.



**Abbildung 225.** Empfindlichkeit des menschlichen Auges in Abhängigkeit von der Vakuumwellenlänge  $\lambda_0$ . Die Kurve 1 ist für Dunkeladaption (Stäbchensehen, s. S. 329). Ihr Maximum liegt bei 507 nm. Die Kurve 2 gilt für Helladaption (Zäpfchensehen, s. S. 329) mit dem Maximum bei 555 nm

Wenn auf ein Flächenelement  $da$  der Lichtstrom  $d\Phi_v$  (unter einem beliebigen Winkel) auffällt, dann wird die **Beleuchtungsstärke** (illuminance)  $E_v$  dieser Fläche definiert durch

$$E_v = \frac{d\Phi_v}{da}. \quad (539)$$

Ihre Einheit  $\text{lm}/\text{m}^2 = \text{cd} \cdot \text{sr}/\text{m}^2$  nennt man **Lux** (lux) und bezeichnet sie mit lx.

Eine punktförmige Lichtquelle mit der Lichtstärke  $I_v$  befinde sich im Abstand  $\ell$  vor einer ebenen Fläche. Wir betrachten ein Flächenelement  $da$  dieser Ebene, das von der Projektion der Lichtquelle auf die Ebene den Abstand  $b$  besitze. Dann beträgt der Abstand  $r$  zwischen der Lichtquelle und  $da$  nach Pythagoras  $r = (\ell^2 + b^2)^{1/2}$ . Der Lichtstrom durch  $da$  ist  $I_v d\Omega$  mit  $d\Omega = r^{-2}(da) \cos \vartheta$  und  $\cos \vartheta = \ell/r$ , so dass sich für die Beleuchtungsstärke  $E_v = I_v d\Omega/da = I_v ar^{-3}$  ergibt.

Charakteristische Zahlenwerte für die Beleuchtungsstärke findet man in der Tab.80.

**Tabelle 80.** Charakteristische Zahlenwerte für Beleuchtungsstärken

Lichtquelle bzw. Bedingungen	Beleuchtungsstärke
Nachthimmel, weitab von Städten, kein Mond, Wolkendecke	30 $\mu\text{lx}$ Grenze des menschlichen Sehens
Vollmond	0,2 lx · Auflösungsvermögen des Auges (s.Tab.69, S.329) um den Faktor 10 verringert · Empfindlichkeit von guten Videokameras
Wohnzimmerbeleuchtung	50 - 150 lx
Arbeitsplatzbeleuchtung	100 - 1000 lx
Mittagssonne im Sommer, keine Wolken	70000 lx

Während bei einer punktförmigen Lichtquelle die Lichtstärke definitionsgemäß unabhängig von der Richtung ist, gilt dies bei flächenhaften Lichtquellen i.Allg. nicht mehr. Wir nehmen an, dass die strahlende Fläche eben sei, dass sie die Größe  $da$  besitze und fragen nach der Lichtstärke  $I_v$ , die in derjenigen Richtung gemessen wird, die gegenüber der Senkrechten auf  $da$  um den Winkel  $\vartheta$  (Polarwinkel) geneigt ist. Dann lassen sich drei Fälle unterscheiden.

1. Fall: Die Lichtstärke  $I_v$  hängt nicht von  $\vartheta$  ab. Dies lässt sich z.B. dadurch realisieren, dass man die Fläche gleichmäßig mit punktförmigen Lichtquellen belegt. Die resultierende Lichtstärke ist dann gleich der Summe der Lichtstärken der einzelnen Lichtquellen.

2. Fall: Die Fläche ist mattweiß (z.B. Gipskarton) und wird von Fremdlicht beleuchtet; oder der Strahler ist ein schwarzer Körper, der z.B. durch ein Loch der Fläche

$da$  in einem innen geschwärzten Kasten angenähert werden kann (s. den kleingedruckten Text auf S.416). Dann gilt das **Lambert-Gesetz** (Lambert law, Johann Heinrich Lambert 1728-1777)

$$I_v = I_{v0} \cos \vartheta. \quad (540)$$

Flächenhafte Lichtquellen, die das Lambert-Gesetz befolgen, heißen **Lambert-Strahler** (Lambert radiator).

Im 3., dem allgemeinen Fall ist  $I_v$  weder unabhängig von  $\vartheta$  noch proportional zu  $\cos \vartheta$ . Zum Beispiel zeigen Projektionsleinwände, Leuchtdioden, die Antikathode von Röntgenröhren oder auch die Sonnenoberfläche eine stärkere Abnahme der Lichtstärke mit wachsendem  $\vartheta$  als nur nach dem Kosinus. Die letztere Tatsache folgt aus der leicht nachprüfaren Beobachtung, dass die Sonnenscheibe am Rand dunkler ist als in der Mitte.

Die **Leuchtdichte** (luminance oder brightness oder photometric brightness)  $L_v$  eines Flächenelementes  $da$  wird folgendermaßen definiert: Wenn man in der Richtung  $\vartheta$  die Lichtstärke  $dI_v$  misst, dann besitzt  $da$  die Leuchtdichte

$$L_v = \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{dI_v}{da}. \quad (541)$$

Mit dieser Definition wird die Leuchtdichte für einen Lambert-Strahler unabhängig von  $\vartheta$ . Die Einheit der Leuchtdichte ergibt sich aus Gl.(541) zu  $\text{cd}/\text{m}^2$ . Sie besitzt keinen besonderen Namen. Die früher übliche Einheit  $\text{cd}/\text{cm}^2$  wurde **Stilb** (stilb, vom Griechischen "glänzen") genannt.

Wir betrachten eine Fläche, die alles auffallende Licht diffus reflektiert (ideale mattweiße Fläche) und fragen nach ihrer Leuchtdichte, wenn sie mit der Beleuchtungsstärke  $E_v$  bestrahlt wird. Für den Lichtstrom, den die Fläche  $da$  in den Raumwinkel  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  abstrahlt, gilt  $d\Phi_{v,\text{refl}} = (dI_v)d\Omega$  mit  $dI_v = L_v(da) \cos \vartheta$  (Lambert-Strahler). Der gesamte Lichtstrom  $d\Phi_{v,\text{refl}}^{\text{tot}}$  wird damit zu  $d\Phi_{v,\text{refl}}^{\text{tot}} = L_v(da) \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ . Das Integral lässt sich leicht mit Hilfe der Substitution  $\xi = \cos \vartheta$  lösen und es ergibt sich  $d\Phi_{v,\text{refl}}^{\text{tot}} = L_v(da)\pi$ . Andererseits folgt aus der Definition der Beleuchtungsstärke  $E_v$  (s.S.411) für den auf die Fläche  $da$  einfallenden Lichtstrom  $d\Phi_v = E_v da$ . Gleichsetzen der Ausdrücke für  $d\Phi_v$  und  $d\Phi_{v,\text{refl}}^{\text{tot}}$  liefert das Ergebnis  $L_v = E_v/\pi$ .

Für den Lichtstrom  $\Phi_v$ , den ein Lambert-Strahler in den Halbraum ( $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ ;  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) abstrahlt, wenn man für seine Lichtstärke senkrecht zur Fläche ( $\vartheta = 0$ ) den Wert  $I_{v0}$  misst, ergibt sich durch Einsetzen von Gl.(540) in die Gl.(537), S.410, und Integration die Beziehung

$$\Phi_v = I_{v0}\pi. \quad (542)$$

Der Gesamtstrom von Lichtquellen  $\Phi_v$  lässt sich leicht mit Hilfe einer **Ulbricht-Kugel** (integrating sphere) ermitteln. Diese besteht aus einer Hohlkugel (Radius  $R$ ), in die die zu

messende Lichtquelle gebracht wird. Die Kugelinnenwand ist mit einer möglichst idealen mattweißen Schicht überzogen. Man erreicht für den Bruchteil  $\rho$  der auffallenden Strahlung, der diffus reflektiert wird, Werte zwischen 0,9 und 0,99. Die Beleuchtungsstärke  $E_v$  einer kleinen Fläche  $a \ll \pi R^2$  (Fenster in der Kugelwand), die durch einen Schirm vor der direkten Bestrahlung durch die Lichtquelle geschützt wird, ist dann proportional zu  $\Phi_v$ , und zwar folgt aus dem Energiesatz  $E_v = \rho \Phi_v [(4\pi R^2 - a)(1 - \rho) + a]^{-1}$ . Die Ulbricht-Kugel kann auch verwendet werden, um einen Lichtstrom zu messen, der durch das Fenster  $a$  eintritt. Zu diesem Zweck bringt man einen Detektor an einer Stelle der inneren Kugeloberfläche an, die nicht direkt von diesem Lichtstrom getroffen wird.

Der pro Flächeneinheit in den Halbraum abgestrahlte Lichtstrom wird als **spezifische Lichtausstrahlung** (luminous exitance oder luminous emittance)  $M_v$  bezeichnet. In der Tab.81 sind die im vorliegenden Abschnitt behandelten visuellen Größen (Index v) den strahlungsphysikalischen Größen gegenübergestellt.

**Tabelle 81.** Vergleich der visuellen und der entsprechenden strahlungsphysikalischen Größen (sr ist die Einheit des Raumwinkels, s.S.407)

Visuelle Größen (Index v)	Strahlungsphysikalische Größen
Lichtstärke (luminous intensity) $I_v$ Definition: s.S.407 Einheit: cd	Strahlstärke (radiant intensity) $I$ Definition: $I = d\Phi/d\Omega$ Einheit: W/sr
Lichtstrom (luminous flux) $\Phi_v$ Definition: $\Phi_v = \oint I_v d\Omega$ Einheit: cd·sr = lm	Energiestrom (Strahlungsleistung, radiant flux) $\Phi$ Def.: Die von der Strahlung übertragene Leistung Einheit: W
Beleuchtungsstärke (illuminance) $E_v$ Definition $d\Phi_v/da$ Einheit: cd · sr/m <sup>2</sup> = lx	Bestrahlungsstärke (irradiance) $E$ Definition: $E = d\Phi/da$ Einheit: W/m <sup>2</sup>
Leuchtdichte (luminance) $L_v$ Definition: $L_v = (\cos \vartheta)^{-1} dI_v/da$ Einheit: cd/m <sup>2</sup> früher: cd/cm <sup>2</sup> = Stilb	Strahldichte (radiance) $L$ Definition: $L = (\cos \vartheta)^{-1} dI/da$ Einheit: Wm <sup>-2</sup> sr <sup>-1</sup>
Spezifische Lichtausstrahlung (luminous emittance) $M_v$ Definition: Der pro Flächeneinheit in den Halbraum abgestrahlte Lichtstrom Einheit: lm/m <sup>2</sup> früher: lm/cm <sup>2</sup> = Phot	Spezifische Ausstrahlung (radiant emittance) $M$ Definition: Die pro Flächeneinheit in den Halbraum abgestrahlte Leistung  Einheit: W/m <sup>2</sup>

Durch Kombination der Beziehungen für die Strahlstärke  $I$  und die Strahldichte  $L$  ergibt sich für die Leistung, die von einem Flächenelement  $da$  in den differentiellen

Raumwinkel  $d\Omega$  abgestrahlt wird, die Beziehung

$$d\Phi = L \cos \vartheta \, da \, d\Omega. \quad (543)$$

Ü 157

Ü 158

## 25.2 Strahlungsformeln

Wir bezeichnen mit  $d\Phi_f$  die Leistung, die von einem Flächenelement  $da$  im Frequenzintervall von  $f$  bis  $f + df$  bei der Temperatur  $T$  in den Raumwinkel  $d\Omega$  abgestrahlt wird. Dann definiert man die **spektrale Strahldichte** (spectral radiance)  $L_f(\vartheta, T)$  durch die Gleichung

$$d\Phi_f = L_f \cos \vartheta \, da \, d\Omega \, df. \quad (544)$$

Der Zusammenhang mit der in Tab.81 definierten Strahldichte  $L$  ergibt sich unter Beachtung von Gl.(543) zu

$$\int_0^\infty L_f \, df = L. \quad (545)$$

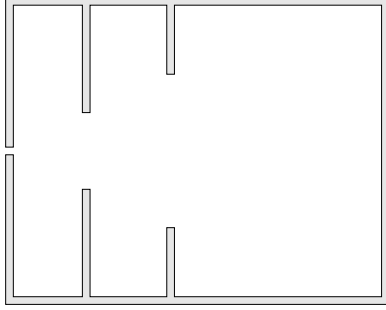
Der **spektrale Absorptionskoeffizient** (spectral absorptance)  $\beta_f(\vartheta, T)$ , der nicht mit dem auf S.397 eingeführten Extinktionskoeffizienten  $\alpha$  verwechselt werden darf, ist das Verhältnis aus der Strahlungsleistung, die von einem Körper bei der Temperatur  $T$  im Frequenzintervall von  $f$  bis  $f + df$  absorbiert wird, zu der Strahlungsleistung, die im gleichen Frequenzintervall unter dem Winkel  $\vartheta$  auf den Körper fällt. Analog definiert man den **spektralen Reflexionskoeffizienten** (spectral reflectance)  $\gamma_f(\vartheta, T)$  so, dass

$$\beta_f + \gamma_f = 1 \quad (546)$$

gilt. Ein **schwarzer Körper** (black body) absorbiert per definitionem *alle* auf fallende Strahlung. Für derartige Körper, die wir im Folgenden mit dem Index  $s$  kennzeichnen wollen, gilt also

$$\beta_{fs} = 1. \quad (547)$$

Ein schwarz gestrichener oder berußter Körper erfüllt die Bedingung (547) nur unvollkommen, sehr gut dagegen ein kleines Loch in der Wand eines innen geschwärzten Hohlkörpers (s. Abb.226). Lichtstrahlen, die durch das Loch ins Innere gelangen, werden vielfach reflektiert und wegen der Schwärzung der Wände jedesmal stark in ihrer Intensität geschwächt, weshalb nur eine geringe Wahrscheinlichkeit besteht, dass einfallendes Licht durch das Loch wieder nach außen gelangt. Dieses erscheint daher absolut schwarz. Heizt man aber die Wände des Hohlraums auf, so wird die aus der Öffnung austretende Strahlung bei höheren Temperaturen vom menschlichen Auge wahrgenommen: Das Loch beginnt bei Temperaturen ab ca. 650°C zu leuchten,



**Abbildung 226.** Praktische Realisierung eines schwarzen Körpers durch das Loch in der Wand eines innen geschwärzten Hohlkörpers. Die Seitenbleche sind ebenfalls geschwärzt und reduzieren zusätzlich die Wahrscheinlichkeit, dass einfallendes Licht wieder durch das Loch austritt. Wenn die absolute Temperatur  $T$  des Körpers größer als null ist, wirkt der schwarze Körper selbst als Strahler (**Hohlraumstrahler**, hohlraum radiator)

zunächst tiefrot und schließlich grellweiß (Wien'sches Verschiebungsgesetz, s.S.420). Wegen der Realisierung des schwarzen Körpers durch derartige Hohlräume bezeichnet man die Strahlung des schwarzen Körpers, die **schwarze Strahlung** (blackbody radiation), auch oft als **Hohlraumstrahlung** (cavity radiation).

Das **Kirchhoff'sche Strahlungsgesetz** (Kirchhoff's law of radiation, Gustav Robert Kirchhoff 1824-1887) besagt, dass die spektrale Strahldichte  $L_f$  eines beliebigen Körpers proportional zu seinem spektralen Absorptionskoeffizienten  $\beta_f$  ist und dass die Proportionalitätskonstante für alle Körper den gleichen Wert besitzt. Auf Grund der Definition des schwarzen Körpers (s.Gl.(547)) folgt, dass diese Proportionalitätskonstante gleich der spektralen Strahldichte  $L_{fs}$  des schwarzen Körpers sein muss. Damit lässt sich das Kirchhoff'sche Strahlungsgesetz in der folgenden Form schreiben

$$\frac{L_f}{\beta_f} = L_{fs}. \quad (548)$$

Das Kirchhoff'sche Strahlungsgesetz beweisen wir für den Spezialfall senkrechter Strahlung ( $\vartheta = 0$ ). Das betrachtete System bestehe aus einem Lichtwellenleiter (s.S.309), der auf der einen Seite senkrecht an die Oberfläche eines schwarzen Körpers und auf der anderen Seite senkrecht an die Oberfläche eines beliebigen Körpers angekoppelt ist. Beide Körper sollen nur über den Lichtwellenleiter Energie austauschen können und sich im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur  $T$  befinden. Der schwarze Körper emittiert dann im Frequenzintervall  $df$  die Strahlungsleistung  $\Delta\Phi_{fs} = L_{fs}A df \Delta\Omega$ , wobei  $A$  die Querschnittsfläche des Lichtwellenleiters und  $\Delta\Omega$  das Intervall des Raumwinkels bezeichnet, in dem der Lichtwellenleiter die Strahlung überträgt (s. den kleingedruckten Text auf S.309). Von dieser Leistung absorbiert der nichtschwarze Körper den Anteil  $\beta_f \Delta\Phi_{fs}$  und reflektiert den Rest  $(1 - \beta_f) \Delta\Phi_{fs}$ . Außerdem emittiert der nichtschwarze Körper im gleichen Frequenzintervall  $df$  die Strahlungsleistung  $\Delta\Phi_f = L_f A df \Delta\Omega$ . Wegen des vorausgesetzten thermischen Gleichgewichts muss gelten  $\Delta\Phi_{fs} = (1 - \beta_f) \Delta\Phi_{fs} + \Delta\Phi_f$ . Nach Einsetzen der Ausdrücke für  $\Delta\Phi_{fs}$  und  $\Delta\Phi_f$  folgt  $L_{fs} = (1 - \beta_f) L_{fs} + L_f$  und damit die gesuchte Gleichung  $L_f = \beta_f L_{fs}$ .

Die **spektrale Energiedichte** (spectral energy density)  $\rho_s(f, T)$  der schwarzen Strahlung wird folgendermaßen definiert: Wir betrachten einen Hohlraum, der von schwarzen Wänden begrenzt wird und der sich im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur  $T$  befindet. Dann ist  $\rho_s(f, T)d\mathbf{f}dV$  die Energie, die das Volumenelement  $dV$  infolge der elektromagnetischen Strahlung mit Frequenzen zwischen  $f$  und  $f + d\mathbf{f}$  enthält. Es lässt sich zeigen, dass  $\rho_s$  mit der spektralen Strahldichte  $L_{fs}$  des schwarzen Körpers (s.S.414) in folgender Weise zusammenhängt:

$$\rho_s(f, T) = \frac{4\pi}{c_0} L_{fs}, \quad (549)$$

wobei  $c_0$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bezeichnet.

Ein kleines Loch der Fläche  $da$  in der Wand des Hohlraums soll das thermische Gleichgewicht nicht stören. Da die Hohlraumstrahlung über den Raumwinkel  $4\pi$  isotrop verteilt ist und sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, folgt für die Leistung, die durch das Loch im Frequenzintervall von  $f$  bis  $f + d\mathbf{f}$  in den Raumwinkel  $d\Omega$  abgestrahlt wird,  $d\Phi_{fs} = (da)(\cos \vartheta)c_0(d\Omega/4\pi)\rho_s d\mathbf{f}$ . Durch Vergleich mit der auf den schwarzen Körper angewandten Gl.(544), S.414, erhält man die Beziehung  $L_{fs} = (c_0/4\pi)\rho_s$ , d.h. die gesuchte Gl.(549). Außerdem ersieht man, dass  $L_{fs}$  nicht von  $\vartheta$  abhängt, oder, mit anderen Worten, dass  $da$  ein Lambert-Strahler ist.

Mit Hilfe dieser Gleichung findet man leicht für die Strahlungsleistung, die von der schwarzen Fläche  $da$  im Frequenzintervall von  $f$  bis  $f + d\mathbf{f}$  in den Halbraum abgestrahlt wird, d.h. für die spezifische Ausstrahlung des schwarzen Körpers,

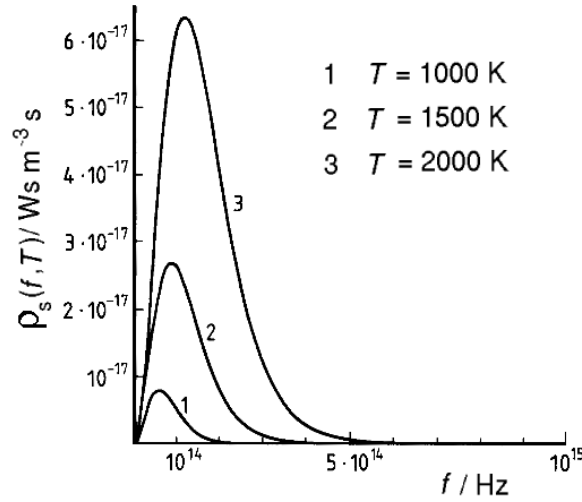
$$M_s = \left( \int_{(2\pi)} L_{fs} \cos \vartheta d\Omega \right) da d\mathbf{f} = \frac{c_0}{4} \rho_s(f, T) da d\mathbf{f}. \quad (550)$$

Für die spezifische Ausstrahlung gilt auf Grund der Definition der spektralen Strahldichte  $L_f$  (s.Gl.(544), S.414)  $(\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} L_{fs} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi) da d\mathbf{f}$ . Einsetzen der Gl.(549) führt auf das Integral  $(\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi) c_0 (4\pi)^{-1} \rho_s da d\mathbf{f}$ . Wegen  $\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \pi$  ergibt sich daraus die Gl.(550).

Da diese Strahlungsleistung messtechnisch gut zugänglich ist, kann man auf diese Weise auch die spektrale Energiedichte  $\rho_s(f, T)$  der schwarzen Strahlung experimentell bestimmen. Das Ergebnis zeigt die Abb.227.

Bei großen und kleinen Frequenzen wird  $\rho_s$  sehr klein. Dazwischen besitzt es ein Maximum, das sich mit wachsender Temperatur nach höheren Frequenzen (kürzeren Wellenlängen) verschiebt (Wien'sches Verschiebungsgesetz, s.S.420).

Nachdem alle Versuche zur Erklärung der Frequenz- und Temperaturabhängigkeit von  $\rho_s$  aus den bisher bekannten Gesetzen der Physik gescheitert waren, trat Max Planck (1858-1947) am 14. Dezember 1900 im Hörsaal des Physikalischen Instituts



**Abbildung 227.** Die spektrale Energiedichte  $\rho_s(f, T)$  der schwarzen Strahlung als Funktion der Frequenz für verschiedene Temperaturen

der Berliner Universität vor die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft und zeigte, dass sich eine theoretische Begründung für die Funktion  $\rho_s(f, T)$  nur finden lässt, wenn man eine der bisherigen Physik gänzlich fremde Annahme zugrunde legt. Diese besteht darin, dass gewisse physikalische Größen, im vorliegenden Fall war es die Energie (eines harmonischen Oszillators mit der Eigenfrequenz  $f$ ), nicht beliebige Werte annehmen können, sondern quantisiert sind. Mit der hierdurch begründeten Quantentheorie und der 1905 von Albert Einstein (1879-1955) entwickelten Relativitätstheorie (s. Abschn. 20.3, S. 291ff.) begann eine neue Ära der Physik und man bezeichnet heute die Gesamtheit der zuvor gewonnenen physikalischen Erkenntnisse und Gesetze als **klassische Physik** (classical physics). Der wesentliche Punkt bei der von Max Planck vorgestellten Ableitung der Formel für  $\rho_s(f, T)$  war die Forderung, dass ein Resonator mit der Frequenz  $f$  Energie nicht in beliebigen Portionen abgeben oder aufnehmen kann, sondern nur in ganzzahligen Vielfachen des Energiequants (quantum of energy)  $hf$ , wobei die Naturkonstante  $h$  die Größe

$$h = 6,62606876(52) \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (551)$$

besitzt [COD99] und als **Planck-Konstante** oder **Planck'sches Wirkungsquantum** (Planck constant) bezeichnet wird. Mit dieser Forderung ergibt sich die **Planck'sche Strahlungsformel** (Planck's radiation formula) A 147

$$\rho_s(f, T) = \frac{8\pi hf^3}{c_0^3} \frac{1}{\exp(hf/kT) - 1}. \quad (552)$$



Die Bedingung für die Ausbildung stehender Wellen in *einer* Dimension der Länge  $\ell$  lautet  $\ell = n\lambda/2$ , wobei  $n$  eine ganze Zahl und  $\lambda$  die Wellenlänge bezeichnet. Diese Beziehung wenden wir auf die elektromagnetischen Wellen im Vakuum an, so daß  $\lambda$  die zur Frequenz  $f$  gehörige Vakuumwellenlänge  $\lambda_0 = c_0/f$  ist. Damit folgt für die Anzahl der stehenden Wellen (= Anzahl der Resonatoren) bei vorgegebener Länge  $\ell$  und Frequenz  $f$  die Gleichung  $n = 2\ell f/c_0$ . Die Erweiterung auf drei Dimensionen (Würfel mit der Kantenlänge  $\ell$ ) führt auf die Beziehung  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = (2\ell f/c_0)^2$ . Mit dieser Gleichung lässt sich die Anzahl der stehenden Wellen im Frequenzintervall von  $f$  bis  $f + df$  berechnen. Zu diesem Zweck gehen wir in das durch  $n_1$ ,  $n_2$  und  $n_3$  aufgespannte kartesische Koordinatensystem. Das Volumen zwischen den Radien  $2\ell f/c_0$  und  $2\ell(f + df)/c_0$  ist  $4\pi(2\ell f/c_0)^2 2(\ell/c_0)df$ . Da  $n_1$ ,  $n_2$  und  $n_3$  nur positiv sein dürfen, kommt lediglich der entsprechende Kugelschalenoktant in Frage und es ergibt sich für die Anzahl der stehenden Wellen  $(1/8)4\pi(2\ell f/c_0)^2 2(\ell/c_0)df$ . Diese Zahl ist noch mit dem Faktor 2 zu multiplizieren, da die elektromagnetischen Wellen zu den Transversalwellen gehören (es sind jeweils zwei Wellen gleicher Frequenz aber unterschiedlicher Polarisationsrichtungen möglich). Damit folgt für die Anzahl der stehenden Wellen pro Volumen der Ausdruck  $8\pi f^2 c_0^{-3} df$ . Dieses Ergebnis ist unabhängig von der Form des Hohlraumes, für den im vorliegenden Fall ein Würfel gewählt wurde. Die Planck'sche Quantisierungsbedingung besagt, dass ein Resonator nur die diskreten Energien  $E_n = nhf$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  annehmen kann, so dass sich für die mittlere Energie (s. Boltzmann-Verteilung, S.103) die Beziehung  $\langle E \rangle = [\sum_n nhf \exp(-nhf/kT)] / [\sum_n \exp(-nhf/kT)]^{-1}$  ergibt, wobei  $k$  die Boltzmann-Konstante und  $T$  die Temperatur bezeichnet. Nun gilt  $\sum_n \exp(-nhf/kT) = [1 - \exp(-hf/kT)]^{-1}$  (s.A.6.4, S.1261, geometrische Reihe). Differenziert man die linke und die rechte Seite dieser Gleichung nach  $-1/(kT)$ , so folgt außerdem  $\sum_n nhf \exp(-nhf/kT) = [hf \exp(-hf/kT)] \cdot [1 - \exp(-hf/kT)]^{-2}$ . Einsetzen dieser beiden Gleichungen in die Beziehung für  $\langle E \rangle$  liefert  $\langle E \rangle = [hf \exp(-hf/kT)] [1 - \exp(-hf/kT)]^{-1}$  oder  $\langle E \rangle = hf [\exp(hf/kT) - 1]^{-1}$ . Wir sehen, dass sich dieser Ausdruck für  $hf \ll kT$  vereinfacht zu  $\langle E \rangle = kT$ , dem Ergebnis der klassischen Physik. Unter Verwendung der oben abgeleiteten Anzahl  $8\pi f^2 c_0^{-3} df$  der stehenden Wellen pro Volumeneinheit und der Formel für die mittlere Energie  $\langle E \rangle$  jeder dieser Wellen, folgt  $\rho_s(f, T)df = (8\pi f^3 hc_0^{-3} df) [\exp(hf/kT) - 1]^{-1}$  oder  $\rho_s(f, T) = 8\pi f^3 hc_0^{-3} [\exp(hf/kT) - 1]^{-1}$ , d.h. die Gl.(552).

Von Albert Einstein (1879-1955) stammt eine Ableitung der Planck'schen Strahlungsformel, die davon ausgeht, dass die Teilchen der Hohlraumwand, die mit der schwarzen Strahlung in Wechselwirkung stehen, ständig Photonen (s. den kleingedruckten Text auf S.404) emittieren und absorbieren. Die mittlere Dichte (mittlere Anzahl pro Volumeneinheit) der dadurch im Hohlraum vorhandenen Photonen mit Frequenzen zwischen  $f$  und  $f + df$  ist dann bis auf eine Proportionalitätskonstante gleich der gesuchten Größe  $\rho_s(f, T)df$ . Bei dieser Ableitung musste Einstein allerdings eine Annahme über die Emission von Photonen machen, die damals eine reine Hypothese darstellte und deren Richtigkeit erst Jahrzehnte später durch die Entwicklung des Lasers (s.S.333) bestätigt wurde: Wenn sich ein Teilchen in einem Zustand

mit der Energie  $E$  befindet, dann kann es bekanntlich ein auftreffendes Photon der Energie  $hf$  absorbieren, indem es in einen angeregten Zustand mit der Energie  $E+hf$  übergeht. Nach Einstein kann das auftreffende Photon aber auch *mit der gleichen Wahrscheinlichkeit* das Teilchen vom angeregten Zustand in den Ausgangszustand der Energie  $E$  versetzen, wobei ein zweites Photon gleicher Frequenz und Phase entsteht (**induzierte Emission**, stimulated emission). Die bis dahin allein bekannte **spontane Emission** (spontaneous emission) von Photonen, d.h. der Übergang eines Teilchens von  $E+hf$  nach  $E$  ohne äußere Einwirkung, dominiert allerdings bei den üblichen thermischen Lichtquellen (Glühlampen, Gasentladungen usw.); denn es ergibt sich für den relativen Anteil  $r_{\text{ind}}$  der induzierten Emissionsübergänge der Ausdruck

$$r_{\text{ind}} = \exp\left(-\frac{hf}{kT}\right) \quad (553)$$

der bei  $T \approx 2200$  K und  $\lambda_0 \approx 550$  nm kleiner als  $10^{-5}$  ist.

Es sei  $n(f)$  bzw.  $n^*(f)$  die Dichte (Anzahl pro Volumeneinheit) der mit der Strahlung wechselwirkenden Teilchen in der Hohlraumwand, deren Resonanzfrequenz  $f$  ist und die im Grundzustand die Energie  $E_0$ , bzw. im angeregten Zustand die Energie  $E_0 + hf$  besitzen. Das Verhältnis der Dichten (Anzahl der Teilchen pro  $\text{m}^3$ ) ergibt sich nach der Boltzmann-Verteilung (s.S.103) zu  $n^*(f)/n(f) = \exp(-hf/kT)$ . Für die Anzahl der pro Zeit und Volumen absorbierten Photonen der Energie  $hf$  schreiben wir  $K_1 n(f) \rho_s(f, T)$ , wobei  $K_1$  ein Proportionalitätsfaktor ist. Die Anzahl der pro Zeit und Volumen emittierten Photonen der Energie  $hf$  folgt als Summe aus dem Beitrag der spontanen Emission  $K_2 n^*(f)$ , mit  $K_2$  als einem zweiten Proportionalitätsfaktor, und dem der induzierten Emission  $K_1 n^*(f) \rho_s(f, T)$ . Im thermischen Gleichgewicht muss demnach gelten  $K_1 n(f) \rho_s(f, T) = K_1 n^*(f) \rho_s(f, T) + K_2 n^*(f)$ . Unter Verwendung der obigen Formel für das Verhältnis  $n^*(f)/n(f)$  erhalten wir  $\rho_s(f, T) = (K_2/K_1) [\exp(hf/kT) - 1]^{-1}$ . Die Einstein'sche Ableitung liefert also die Planck'sche Strahlungsformel (s.Gl.(552)), wenn man für den Quotienten der beiden Proportionalitätsfaktoren  $K_2/K_1$  die Größe  $8\pi hf^3/c_0^3$  einsetzt. Diese Tatsache erlaubt eine Berechnung des relativen Anteils  $r_{\text{ind}}$  der induzierten Emissionsübergänge an der Gesamtemission. Definitionsgemäß gilt  $r_{\text{ind}} = [K_1 n^*(f) \rho_s(f, T)] / [K_1 n^*(f) \rho_s(f, T) + K_2 n^*(f)]^{-1}$ . Setzen wir hier die obige Gleichung  $\rho_s(f, T) = (K_2/K_1) \cdot [\exp(hf/kT) - 1]^{-1}$  ein, so folgt  $r_{\text{ind}} = \exp(-hf/kT)$ , d.h. die Gl.(553).

Um die spektrale Energiedichte der schwarzen Strahlung nach Gl.(552) als Funktion der Vakuumwellenlänge  $\lambda_0$  darzustellen, genügt es nicht,  $f$  durch  $c_0/\lambda_0$  zu ersetzen; denn es muss ja außerdem die Bedingung  $\int_0^\infty \rho_s(f, T) df = \int_0^\infty \rho_s(\lambda_0, T) d\lambda_0$  (Gleichheit der Energiedichten) erfüllt werden. Man erhält A 148

$$\rho_s(\lambda_0, T) = \frac{8\pi hc_0}{\lambda_0^5} \frac{1}{\exp[hc_0/(\lambda_0 kT)] - 1}. \quad (554)$$

Die Bedingung für die Gleichheit der Energiedichten  $\int_0^\infty \rho_s(f, T) df = \int_0^\infty \rho_s(\lambda_0, T) d\lambda_0$  wird erfüllt durch  $\rho_s(\lambda_0, T) = \rho_s(f, T) |df/d\lambda_0|$ . Wegen  $f = c_0/\lambda_0$  oder  $|df/d\lambda_0| = c_0/\lambda_0^2$  folgt  $\rho_s(\lambda_0, T) = \rho_s(f, T) c_0/\lambda_0^2$  und damit nach Einsetzen von Gl.(552) die gesuchte Gl.(554). Das Produkt  $2\pi h c_0^2$  wird mitunter als **erste Strahlungskonstante** (first radiation constant) und der Quotient  $hc_0/k$  als **zweite Strahlungskonstante** (second radiation constant) bezeichnet.

Das Maximum dieser Funktion tritt auf, wenn die Bedingung  $d\rho_s(\lambda_0, T)/d\lambda_0 = 0$  erfüllt ist. Einsetzen von Gl.(554) führt auf die Beziehung  $5\{1 - \exp[-hc_0/(\lambda_{0,\max} kT)]\} = hc_0/(\lambda_{0,\max} kT)$ . Das Ergebnis der numerischen Lösung [LID90]

$$\lambda_{0,\max} T = 2,897756(24) \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \quad (555)$$

wird **Wien'sches Verschiebungsgesetz** (Wien's displacement law, Wilhelm Wien 1864-1928) genannt.

Als Nächstes wollen wir die Gesamtleistung berechnen, die von einem Quadratmeter eines schwarzen Körpers in den Halbraum abgestrahlt wird. Nach Tab.81, S.413, ist dies gleich der spezifischen Ausstrahlung einer schwarzen Fläche ( $M_s$ ). Unter Verwendung des Ausdrucks (550), S.416, und der Planck'schen Strahlungsformel erhält man nach Integration über den gesamten Frequenzbereich von 0 bis  $\infty$  das **Stefan-Boltzmann-Gesetz** (Stefan-Boltzmann law, Joseph Stefan 1853-1893, Ludwig Boltzmann 1844-1906)

$$M_s = \sigma T^4. \quad (556)$$

Die dabei auftretende Größe [COD99]

$$\sigma = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4}{c_0^2 h^3} = 5,670400(40) \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \quad (557)$$

wird **Stefan-Boltzmann-Konstante** (Stefan-Boltzmann constant) genannt.

Der Ausdruck (550), S.416, liefert die Gleichung  $M_s = (c_0/4) \int_0^\infty \rho_s(f, T) df$ . Mit der Planck'schen Strahlungsformel (Gl.(552)) folgt  $M_s = 2\pi h c_0^{-2} \int_0^\infty f^3 [\exp(hf/kT) - 1]^{-1} df$ . Die Substitution  $hf/kT = \xi$  führt auf  $M_s = 2\pi h c_0^{-2} (kT/h)^4 \int_0^\infty \xi^3 [\exp \xi - 1]^{-1} d\xi$ . Mit dem Integral  $\int_0^\infty \xi^3 [\exp \xi - 1]^{-1} d\xi = \pi^4/15$  (s.S.1260) ergibt sich  $M_s = (2\pi^5/15) h^{-3} c_0^{-2} k^4 T^4$ .

Unter der Annahme, dass die Sonne ein schwarzer Strahler ist, lässt sich die Oberflächentemperatur  $T_S$  der Sonne sowohl mit Hilfe des Stefan-Boltzmann-Gesetzes als auch des Wien'schen Verschiebungsgesetzes berechnen. Die **extraterrestrische Solarkonstante** (solar constant)  $S_S$ , das ist die Leistung, die an der äußeren Grenze der Erdatmosphäre beim mittleren Sonnenabstand senkrecht auf  $1 \text{ m}^2$  einfällt (Energiestromdichte), hat den Wert [LID90]

$$S_S = (1395 \pm 30) \text{ W/m}^2. \quad (558)$$

Nennen wir den Sonnenradius  $r_S$ , so folgt aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz (s.Gl. (556)) für die von der Sonnenoberfläche nach außen abgestrahlte Gesamtleistung  $\sigma T_S^4 4\pi r_S^2$ . Dieser Wert muss gleich dem Produkt aus  $S_S$  und der Kugeloberfläche  $4\pi r_{SE}^2$  sein, wenn  $r_{SE}$  den mittleren Abstand der Erde von der Sonne bezeichnet. Daraus folgt  $T_S \approx 5800 \text{ K}$ .

Aus der Gleichung  $\sigma T_S^4 4\pi r_S^2 = S_S 4\pi r_{SE}^2$  ergibt sich  $T_S = (S_S/\sigma)^{1/4} (r_{SE}/r_S)^{1/2}$ . Einsetzen der Zahlenwerte  $S_S = 1395 \text{ W/m}^2$ ,  $\sigma = 5,6705 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$ ,  $r_{SE} = 149,6 \cdot 10^9 \text{ m}$  und  $r_S = 696 \cdot 10^6 \text{ m}$  liefert  $T_S = 5806 \text{ K}$ .

Das Maximum der spektralen Verteilung des Sonnenlichtes liegt bei einer Wellenlänge, für die das menschliche Auge unter ungünstigen Lichtverhältnissen (Dunkeladaption) seine maximale Empfindlichkeit besitzt (ca. 500 nm nach Abb. 225, S. 410). Mit Hilfe des Wien'schen Verschiebungsgesetzes (Gl. (555)) erhält man daraus  $T_S \approx 5800 \text{ K}$ .

Das Sonnenspektrum stimmt in seiner Intensitätsverteilung für  $\lambda_0 \geq 600 \text{ nm}$  recht gut mit dem Planck'schen Strahlungsgesetz (Gl. (554)) überein. Im kurzwelligen Teil treten jedoch merkliche Abweichungen sowohl nach niedrigeren als auch nach höheren Intensitäten auf, da sich hier einerseits die vielen eng zusammenliegenden Absorptionslinien (Fraunhofer-Linien, s.S. 312) bemerkbar machen und da sich andererseits eine zusätzliche Strahlung aus den äußeren Schichten der Sonnenatmosphäre überlagert.

Ü 159

Ü 160

## 25.3 Pyrometrie / Farben

Die **Pyrometrie** (pyrometry) befasst sich mit der Messung von Temperaturen durch die von dem betreffenden Körper ausgesandte Wärmestrahlung. Moderne **Schmalband- oder Spektralpyrometer** (narrow-band pyrometers oder spectral pyrometers) verwenden infrarotempfindliche photoelektrische Zellen (s.S. 234) mit vorgeschalteten optischen Filtern. Bei den **optischen Pyrometern** (optical pyrometers) wird das Bild des strahlenden Körpers in einer Ebene erzeugt, in der sich ein Wolframfaden befindet. Dieser wird durch einen elektrischen Strom soweit aufgeheizt, bis er sich bei der Betrachtung durch ein Okular und Rotfilter nicht mehr von dem Bild des strahlenden Körpers abhebt. Bei den **Gesamtstrahlungs-pyrometern** (total-radiation pyrometers) schließlich wird die Wärmestrahlung über einen Hohlspiegel auf eine geschwärzte Folie fokussiert, die mit einer **Thermosäule** (thermopile) verbunden ist. Thermosäulen bestehen aus mehreren Thermoelementen (s.S. 520), die zur Erhöhung der pro vorgegebener Temperaturdifferenz erzeugten

Spannung in Reihe geschaltet sind. Alle Pyrometer müssen kalibriert werden. Dies geschieht durch Verwendung eines schwarzen Strahlers mit regelbarer Temperatur. Das Anzeigeinstrument des Pyrometers, dessen Ausschlag proportional zu dem erzeugten Strom ist, liefert dann unmittelbar eine Temperatur, die man als **schwarze Temperatur** (brightness temperature oder luminance temperature oder radiance temperature)  $T_s$  bezeichnet. Bei der Anwendung von Pyrometern muss man beachten, dass nur in den Fällen, bei denen der zu messende Körper ein schwarzer Strahler ist,  $T_s$  mit der wahren Temperatur  $T$  übereinstimmt. Wie man sich unter Verwendung des Kirchhoff'schen Strahlungsgesetzes (s.Gl.(548), S.415) leicht überlegen kann, gilt i.Allg.  $T \geq T_s$ . Neben der schwarzen Temperatur  $T_s$  wird mitunter auch die **Farbtemperatur** (color temperature)  $T_F$  eines strahlenden Körpers angegeben. Es ist diejenige Temperatur eines schwarzen Strahlers, bei der er in der gleichen Farbe leuchtet wie der strahlende Körper. Ein **grauer Strahler** (grey body) ist ein Körper, bei dem der spektrale Absorptionskoeffizient  $\beta_f$  (s.S.414) zwar kleiner als 1, aber keine Funktion der Frequenz ist. Für graue Strahler gilt demnach  $T_s < T$ , jedoch  $T_F = T$ .

Als **Grundfarben** (primary colors) bezeichnet man jeden Satz von drei Farben, durch deren Mischung der Farbeindruck "weiß" und - zumindest näherungsweise - jede beliebige Farbe des Spektrums erzeugt werden kann. Es gibt im Prinzip unendlich viele solche Sätze. Das menschliche Auge enthält drei Sorten von farbeempfindlichen Sensoren (Zäpfchen, s.S.329), für die man Absorptionsmaxima bei ca. 600 nm (rot), 550 nm (grün) und 450 nm (blau) gemessen hat. In der Technik werden ebenfalls drei Grundfarben benutzt. Wir bezeichnen mit  $I_r$ ,  $I_g$ ,  $I_b$  die Lichtstärken der bei TV-Bildröhren verwendeten Grundfarben mit den Vakuumwellenlängen 610 nm (rot), 537 nm (grün) bzw. 472 nm (blau) und führen deren relative Intensitäten

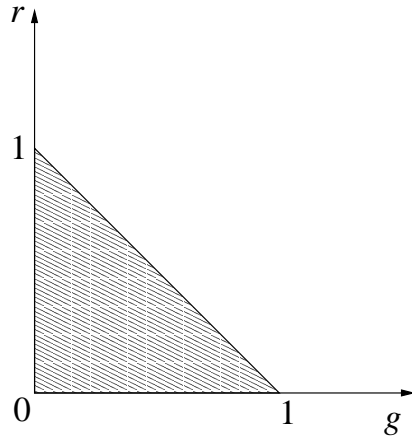
$$r = \frac{I_r}{I_r + I_g + I_b}; \quad g = \frac{I_g}{I_r + I_g + I_b}; \quad b = \frac{I_b}{I_r + I_g + I_b} \quad (559)$$

ein, so dass

$$r + g + b = 1 \quad (560)$$

gilt. Jede beliebige Farbe, die aus diesen drei Grundfarben erzeugt wird, lässt sich damit durch drei Größen charakterisieren, die Helligkeit, Sättigung und Farbton genannt werden. Die **Helligkeit** (luminosity) einer Farbe ist einfach die Summe aus den drei Lichtstärken  $I_r + I_g + I_b$ . Um die beiden anderen Größen zu definieren, wählen wir von den drei relativen Intensitäten  $r$ ,  $g$  und  $b$  zwei willkürlich aus, da sich die dritte mit Hilfe von Gl.(560) ergibt. Wir wählen  $r$  und  $g$  und erhalten wegen der Bedingungen  $0 \leq r \leq 1$  und  $0 \leq g \leq 1$  das in Abb.228 dargestellte **Farbdreieck** (chromaticity diagram). Durch jeden Punkt innerhalb dieses Dreiecks ist ein Wertetripel  $r$ ,  $g$  und  $b$  festgelegt, letzteres wegen Gl.(560). Je *reiner* eine Farbe ist, desto weiter außen liegt sie im Farbdreieck. Der Eindruck "weiß" ergibt sich für den Schwerpunkt des Dreiecks, d.h. bei  $r = g = 1/3$ , da dann  $r = g = b$  gilt.

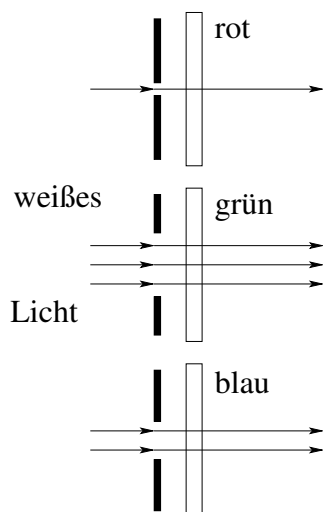
Als **Sättigung** (saturation) der Farbe bezeichnet man den Ausdruck  $(r - 1/3)^2 + (g - 1/3)^2 + (b - 1/3)^2$ . Der **Farbton** (hue) wird durch den Quotienten aus zwei der drei relativen Intensitäten, z.B. durch die Größe  $r/g$ , bestimmt.



**Abbildung 228.** Das mit den relativen Intensitäten  $r$  und  $g$  gebildete Farbdreieck ( $r$ - $g$ -Farbdreieck)

Der hier mit "weiß" bezeichnete Farbeindruck entsteht durch Mischung der drei gewählten Grundfarben mit gleicher Lichtstärke. Wenn andererseits im sichtbaren Bereich des Spektrums eine kontinuierliche Verteilung von elektromagnetischen Wellen mit konstanter Intensität vorliegt, das gilt näherungsweise für das Sonnenlicht, so entsteht ebenfalls der Farbeindruck weiß. Man muss also konsequenterweise das eine als *Grundfarbenweiß* und das andere als *Allfarbenweiß* bezeichnen, obwohl das menschliche Auge, im Gegensatz zu einem Spektrometer, nicht in der Lage ist, zwischen diesen beiden Fällen zu unterscheiden.

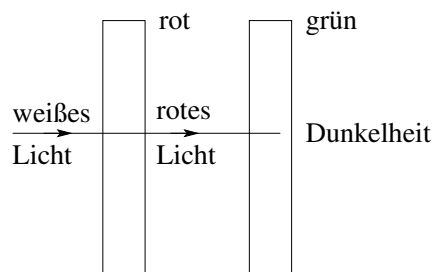
Das Prinzip einer experimentellen Anordnung zur Erzeugung von Farben durch Addition der drei Grundfarben mit vorgegebener relativer Intensität zeigt die Abb. 229. Es ist dies ein Beispiel für eine **additive Farbmischung** (additive mixing of colors). Die additive Farbmischung wird beim **Farbfernsehen** (color television) verwendet. Die Farbbildwiedergaberöhren (Dreistrahl-Maskenröhren) arbeiten mit drei Elektronenstrahlen, deren Intensitäten durch die drei vom Sender ausgestrahlten Farbsignale gesteuert werden. Man unterscheidet Lochmasken- und Schlitzmaskenröhren. Bei den ersteren sitzt dicht vor der Bildschirmschicht eine Lochmaske mit ebenso vielen Löchern, wie es Bildpunkte (Europa:  $625 \times 625$ , USA:  $525 \times 525$ ) gibt. Hinter jedem Loch befinden sich auf der Bildschirmschicht in jedesmal gleicher Anordnung drei Kriställchen, die beim Auftreffen von Elektronen rot, grün bzw. blau leuchten (**Lumineszenz**, luminescence). Die drei Elektronenstrahlen schneiden sich in der



**Abbildung 229.** Erzeugung von Farben durch Addition der drei Grundfarben mit vorgegebenen relativen Intensitäten. Von links fällt weißes Licht auf die drei Farbfilter. Mit den Blenden (Öffnungen einstellbarer Größe) werden die relativen Intensitäten  $r$ ,  $g$  und  $b$  eingestellt. Eine nicht gezeichnete Anordnung führt die drei farbigen Lichtbündel zusammen (additive Farbmischung)

Lochmitte, bringen das jeweilige Kriställchen in entsprechender Stärke zum Leuchten und springen danach zum nächsten Loch weiter.

Wenn dagegen aus einem Farbgemisch, z.B. aus weißem Licht, verschiedene Farben entfernt werden, spricht man von **subtraktiver Farbmischung** (subtractive mixing of colors). In der Abb. 230 soll von links weißes Licht einfallen. Das Rotfilter lässt nur die rote Komponente hindurch, d.h. es absorbiert die Grundfarben grün und blau. Das anschließende Grünfilter absorbiert rot und blau und würde nur grünes Licht hindurch lassen. Da dieses aber schon vom Rotfilter absorbiert wurde, ergibt sich Dunkelheit.



**Abbildung 230.** Beispiel einer subtraktiven Farbmischung. Das Rotfilter absorbiert die grünen und die blauen Komponenten des weißen Lichtes und lässt damit nur die rote Komponente hindurch, die vom grünen Filter absorbiert wird

Die rote Farbe einer Autokarosserie beispielsweise entsteht dadurch, dass von dem auffallenden weißen Licht die grünen und blauen Komponenten absorbiert ("subtrahiert") werden, so dass nur rotes Licht reflektiert wird.

Die subtraktive Farbmischung wird bei der **Farbphotographie** (color photography) technisch angewandt. Ein Farbfilm besteht im Prinzip aus drei dicht übereinander liegenden Schichten, die jeweils für eine der drei Grundfarben lichtempfindlich sind. Der Farbeindruck entsteht dann dadurch, dass bei der Beleuchtung des entwickelten Papierbildes mit weißem Licht an denjenigen Stellen des Bildes, die beispielsweise rot erscheinen sollen, die grünen und blauen Komponenten des Lichtes absorbiert werden.

Wenn man aus weißem Licht eine bestimmte Farbe absorbiert ("subtrahiert"), so erhält man die zugehörige **Komplementärfarbe** (complementary color). Zur Grundfarbe rot ist die Komplementärfarbe die Summe aus grün und blau, die man als *cyan* bezeichnet. Die Komplementärfarbe zu grün, d.h. die Summe aus rot und blau, heißt *purpur* und die Komplementärfarbe zu blau, d.h. die Summe aus rot und grün, nennt man *ockergelb*. Ein **Farbstoff** (dye) ist dadurch charakterisiert, dass er in einem bestimmten Wellenlängenbereich des sichtbaren Spektrums Licht absorbiert. Für die Breite dieses Bereichs gibt es ein Optimum, da eine zu große Breite zu einem hohen Grauanteil in der Farbe führt, während eine zu geringe Breite die betreffende Farbe verblassen lässt. A 149 A 150



Physikalisches Praktikum

Schenk, W.; Kremer, F.; Beddies, G.; Franke, Th.;

Galvosas, P.; Rieger, P. - Schenk, W.; Kremer, F. (Hrsg.)

2014, XIV, 397 S. 325 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-00665-5