

Ergänzungen zum Kapitel

Elektrizitätslehre

Elektrische Gleichfelder (Kap. 16.1 bis 16.6)

Magnetfelder (Kap. 18.1 bis 18.4)

(,Kompaktkurs Physik', H. Pfeifer, H. Schmiedel und R. Stannarius)

Prof. Dr. Dr. h.c. Harry Pfeifer
Prof. Dr. Herbert Schmiedel
Prof. Dr. Ralf Stannarius



Kompaktkurs Physik

mit virtuellen Experimenten und Übungsaufgaben

August 2004

B. G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH,
Wiesbaden

16 Elektrische Gleichfelder (Elektrostatik)

Michael Faraday: Ich weiß nicht, für was das einmal gut sein wird. Aber ich weiß, dass Sie Steuern darauf nehmen werden (zu einem Politiker auf die Frage nach dem Sinn seiner Experimente).

16.1 Elektrische Ladungen

Elektrische Ladungen (electric charges) spielen eine wesentliche Rolle bei vielen, äußerlich ganz unterschiedlichen Erscheinungen. Zu diesen gehören die Gewitter, die moderne Erzeugung von Licht, die Anziehung von Papierschnitzeln durch einen geriebenen Körper, die Rotation des Ankers bei einem Elektromotor usw. Die folgenden fünf Eigenschaften elektrischer Ladungen sind von besonderer Bedeutung:

(1) *Es gibt zwei Arten von elektrischen Ladungen.* Reibt man beispielsweise einen Porzellanstab mit Leder, so trägt danach das Porzellan die eine Sorte von Ladungen, die man als positive Ladungen bezeichnet. Ein mit Wolle geriebener Plaststab dagegen lädt sich negativ auf, denn seine Ladungen lassen sich durch die des Porzellans kompensieren und umgekehrt. Nach der **Coehn'schen Regel** (Alfred Coehn 1863-1938) entstehen positive Ladungen i.Allg. auf dem Stoff mit der höheren Dielektrizitätszahl (s.S.180). Bereits Thales von Milet (um 600 v. Chr.) war die Eigenschaft des Bernsteins (griechisch = elektron) bekannt, nach dem Reiben leichte Körperchen anzuziehen. Entscheidend für die Entstehung dieser Ladungen ist aber nicht die Reibung, sondern die innige Berührung zwischen zwei Stoffen, weshalb man die Bezeichnung **Reibungselektrizität** (frictional electricity) nicht zu wörtlich nehmen sollte.

(2) *Die Summe der Ladungen bleibt in einem abgeschlossenen System immer erhalten.* Dieser **Ladungserhaltungssatz** (charge conservation law) ist stärker als der Satz von der Erhaltung der Masse, da diese im Gegensatz zur Ladung von der Bewegung abhängt (s.S.296).

(3) *Ladungen sind gequantelt.* Die **Elementarladung** (elementary charge, Betrag der Ladung eines Elektrons) gehört zu den Naturkonstanten, und zwar gilt [COD98]

$$e = 1,602176462(63) \cdot 10^{-19} \text{ As.} \quad (260)$$

Die Einheit der elektrischen Ladung ist die Amperesekunde (As), für die man die Bezeichnung **Coulomb** (Symbol C, nach Charles Augustin de Coulomb 1736-1886) eingeführt hat. Das **Ampere** (Symbol A, nach André Marie Ampère 1775-1836) ist eine der Grundeinheiten des SI und wird durch die magnetische Kraft zwischen bewegten elektrischen Ladungen definiert (s.S.211). Den Quotienten Watt/Ampere nennt man **Volt** (Symbol V, nach Alessandro Volta 1745-1827). Die Ladung des Elektrons ist $-e$ und die des einfachsten Atomkerns, des Protons, $+e$.

In den letzten Jahren hat man die Existenz von Elementarteilchen nachgewiesen (Quarks), deren Ladung $\pm(2/3)e$ bzw. $\mp(1/3)e$ ist. Allerdings existieren diese Quarks (s.S.564) nicht als freie Teilchen.

(4) *Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab und ungleichnamige ziehen sich an mit einer Kraft, die umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstands ist.* Quantitativ erhält man die Kraft, die eine **Punktladung** (point charge) q durch eine andere Punktladung Q erfährt, mit Hilfe des **Coulomb-Gesetzes** (Coulomb law)

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad (261)$$

wobei \vec{r} den Ortsvektor von Q nach q (s.Abb.71) bezeichnet. \vec{F} heißt elektrostatische oder **Coulomb-Kraft** (Coulomb force). ϵ_0 ist die **Influenzkonstante**, die auch **elektrische Feldkonstante** oder **Permittivität des Vakuums** (permittivity of vacuum) genannt wird. Es gilt

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c_0^2} \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \quad (262)$$

mit $c_0 = 299792458 \text{ m/s}$ (Lichtgeschwindigkeit im Vakuum). Die Größe

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \approx 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (263)$$

nennt man **Induktionskonstante** oder **magnetische Feldkonstante** oder auch **Permeabilität des Vakuums** (permeability of vacuum).

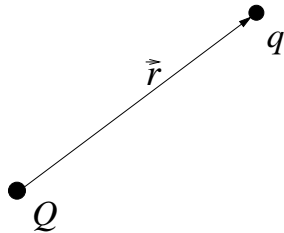


Abbildung 71. Zur Kraft (s.Gl.(261)), die von der Punktladung Q auf die Punktladung q ausgeübt wird

Für gleichnamige Ladungen ist das Produkt qQ größer als null, so dass \vec{F} nach Gl. (261) die gleiche Richtung wie \vec{r} besitzt, was einer Abstoßung entspricht. Die Proportionalitätskonstante $1/(4\pi\epsilon_0)$ in Gl.(261) legt die Einheit der elektrischen Ladung fest. Dass sie neben der Konstanten ϵ_0 noch den Faktor 4π enthält, hängt damit zusammen, dass das Coulomb-Gesetz im Gegensatz z.B. zum Gravitationsgesetz

(Gl. (50), S.32) nicht zu den Grundgesetzen der Physik gehört. Gl.(261) folgt vielmehr, wie wir noch zeigen werden, aus einer der vier Maxwell-Gleichungen (s.Tab.56, S.277).

Bei der Strukturbildung der Materie aus Atomen und Molekülen sind die elektrischen Wechselwirkungen von wesentlicher Bedeutung. Demgegenüber wird die Bewegung der Himmelskörper durch das Gravitationsgesetz beherrscht. Es liegt also nahe, das Verhältnis der Coulomb-Kraft F_C zur Gravitationskraft F_G für das einfachste Atom, bestehend aus einem Proton als Kern und einem an diesen Kern gebundenen Elektron zu bestimmen. Aus den Gln.(50), S.32, und (261) folgt $F_C/F_G = e^2/(4\pi\epsilon_0 G m_e m_p)$ und nach Einsetzen der Zahlenwerte für die Naturkonstanten (s.S.1245ff.) $\lg(F_C/F_G) = 39,4 \approx 40$. Diese Zahl 40 tritt auch bei den folgenden Vergleichen zwischen Weltall (Gravitation) und Atom (Coulomb-Kraft) auf. Das **Hubble-Gesetz** (Hubble law, Edwin Powell Hubble 1889-1953) besagt, dass sich alle Objekte des Weltalls voneinander entfernen (Modell einer explodierenden Granate), wobei für die Fluchtgeschwindigkeit $v = H \cdot r$ gilt. r ist der Abstand des betreffenden Objekts von unserem Sonnensystem und $H = (1,7 \pm 0,2) \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ die Hubble-Konstante. Damit folgt für das Alter des Weltalls $T_W \approx 1/H$ oder ca. $5,88 \cdot 10^{17} \text{ s}$. Der Radius R_W des Weltalls kann aus dem Abstand der am weitesten entfernten Galaxie (RD1) zu ca. $12 \cdot 10^9 \text{ ly} \approx 10^{26} \text{ m}$ abgeschätzt werden. Die Masse M_W des Weltalls schließlich ergibt sich aus der Dichte $\rho_W \approx 10^{-25} \text{ kg/m}^3$, die man aus astrophysikalischen Messungen ermittelt hat, und dem Volumen $R_W^3 \approx 10^{78} \text{ m}^3$ zu $M_W \approx 10^{53} \text{ kg}$. Mit der Masse des Protons $m_p \approx 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, seinem Radius $r_p \approx 10^{-15} \text{ m}$ und der Zeit t_p , die eine elektromagnetische Welle braucht, um die Strecke $2r_p$ zurückzulegen (Dauer der *starken Wechselwirkung*, s.S.530), d.h. $t_p \approx 10^{-23} \text{ s}$, ergibt sich $\lg(R_W/r_p) \approx 41 \approx 40$; $\lg(T_W/t_p) \approx 41 \approx 40$ und $\lg(M_W/m_p) \approx 79,8 \approx 2 \cdot 40$. Gegenwärtig kann niemand sagen, ob dies eine bloße Zahlenspielerlei (**Kabbalistik**, kabbalism) ist oder ob sich dahinter eine physikalische Gesetzmäßigkeit verbirgt, wie einige Wissenschaftler (Sir Arthur Stanley Eddington 1882-1944, u.a.) vermuten.

(5) *Bewegte elektrische Ladungen erzeugen ein Magnetfeld.* Diese Eigenschaft wird im Abschn.18, S.198ff., ausführlich behandelt. Ü 80

16.2 Elektrische Feldstärke, elektrisches Potential, elektrische Spannung

Coulomb-Kräfte sind, wie die Gravitation, additiv. Das heißt, die Kraft, die auf eine Punktladung q durch mehrere Punktladungen Q_1, Q_2, \dots ausgeübt wird, findet man durch vektorielle Addition der nach Gl.(261) berechneten Einzelkräfte $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$. Bei einer stetigen Ladungsverteilung ist diese in differentielle Teilladungen dQ' zu zerlegen und die Summe durch das Integral zu ersetzen, so dass sich

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dQ' \quad (264)$$

ergibt. \vec{r} und \vec{r}' sind (abweichend von der Bezeichnung in Abb.71) die Ortsvektoren der Punktladungen q bzw. dQ' von einem beliebigen Bezugspunkt aus. Nach Gl.(264) ist die auf q ausgeübte Kraft gleich dem Produkt aus q und einer Größe, die nur von der Ladungsverteilung und dem Ort \vec{r} abhängt, an dem sich q befindet. Diese Größe, also der Quotient \vec{F}/q , wird **elektrische Feldstärke** (electric field strength) an der Stelle \vec{r} genannt und mit dem Symbol \vec{E} bezeichnet:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}. \quad (265)$$

Ihre Einheit ist V/m, denn dieser Quotient ergibt sich aus $\text{N}(\text{As})^{-1}$ durch Erweiterung mit m und unter Beachtung von $1 \text{ Nm} = 1 \text{ VAs}$. Zur anschaulichen Darstellung eines elektrischen Feldes zeichnet man **elektrische Feldlinien** (electric field lines oder electric lines of force). Eine Feldlinie beschreibt den Weg, auf dem man fortschreiten muss, um immer der Richtung der Kraft zu folgen, die auf eine positive Punktladung ausgeübt wird. Demzufolge verlaufen elektrische Feldlinien von positiven zu negativen Ladungen. Wegen der Eindeutigkeit der Kraftrichtung können sich elektrische Feldlinien nicht schneiden. Einige Beispiele zeigt Abb.72.

A 61 A 62 A 63

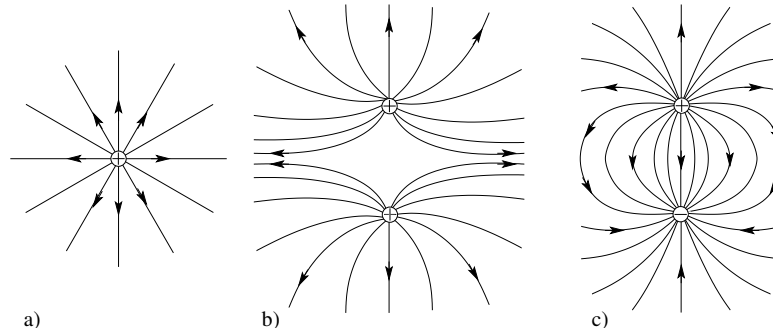


Abbildung 72. Elektrische Feldlinien für a) eine positive Punktladung, b) zwei gleichgroße positive Punktladungen (vektorielle Addition zweier in vertikaler Richtung gegeneinander verschobener Bilder wie bei a), c) eine positive und eine gleichgroße negative Punktladung (vektorielle Subtraktion zweier in vertikaler Richtung gegeneinander verschobener Bilder wie bei a)

Verschiebt ein Experimentator eine positive Punktladung q längs der differentiellen Wegstrecke $d\vec{r}$, so gilt für die differentielle Arbeit $dW^{(e)}$, die er dabei verrichten muss (zur Bezeichnungsweise s.S.21) $dW^{(e)} = -\vec{F}^{(e)} \cdot d\vec{r}$ oder, unter Verwendung

von Gl.(265), $dW^{(e)} = -q\vec{E} \cdot d\vec{r}$. Wenn $dW^{(e)}$ größer null ist, so bedeutet dies, dass sich die potentielle Energie der Ladung q um diesen Betrag vergrößert. Für die gesamte potentielle Energie der Ladung q an der Stelle \vec{r} in Bezug auf \vec{r}_0 folgt demnach

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}, \vec{r}_0) = -q \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'. \quad (266)$$

Der Quotient aus potentieller Energie und Ladung q heißt **elektrisches Potential** (electric potential), für das sich aus Gl.(266)

$$U(\vec{r}, \vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad (267)$$

ergibt. Die Einheit des elektrischen Potentials ist das Volt (V). Für die Umkehrung von Gl.(267) gilt

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } U(\vec{r}, \vec{r}_0). \quad (268)$$

A 64

A 65

Die Differenz zweier elektrischer Potentiale heißt **elektrische Spannung** (voltage oder electric voltage).

Als Beispiel betrachten wir das Feld, das von einer Punktladung $Q > 0$ erzeugt wird. Die elektrische Feldstärke folgt aus Gl.(265), S.169, mit Gl.(261), S.167, zu $\vec{E}(\vec{r}) = (4\pi\epsilon_0)^{-1}(Q/r^3)\vec{r}$. Für das elektrische Potential mit dem Bezugspunkt im Unendlichen ($\vec{r}_0 = \infty$) ergibt sich durch Einsetzen dieses Ausdrucks in Gl.(267) $U(\vec{r}, \infty) = (4\pi\epsilon_0)^{-1}Q/r$ und für die potentielle Energie einer Punktladung q die Gleichung $E_{\text{pot}} = (4\pi\epsilon_0)^{-1}Qq/r$ (**Coulomb-Energie**, Coulomb energy)

Ü 81

Ü 82

16.3 Leiter im elektrischen Feld

Unter einem elektrischen **Leiter** (conductor) wollen wir im Folgenden einen Körper verstehen, in dem elektrische Ladungen frei verschiebbar sind. Bei einem solchen Leiter müssen im Gleichgewichtszustand (Elektrostatik) die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sein:

1.) Elektrische Ladungen, die auf den Leiter gebracht oder durch ein elektrisches Feld erzeugt wurden, sitzen nur an der Oberfläche des Körpers

und

2.) Die elektrischen Feldlinien stehen senkrecht auf dieser Fläche.

Die 2. Bedingung, die auch besagt, dass die Oberfläche eine **Äquipotentialfläche** (equipotential surface) sein muss, ergibt sich daraus, dass jede Feldstärkekomponente parallel zur Oberfläche solange zu einer Verschiebung der Ladungen führen würde (Coulomb-Kraft), bis diese Feldstärkekomponente verschwindet. In analoger Weise lässt sich auch die 1. Bedingung begründen, d.h. das Fehlen von elektrischen (Netto-) Ladungen im Inneren des Leiters.

Im Folgenden betrachten wir vier Anwendungen dieser beiden Bedingungen:

(1) Das elektrische Feld einer Ladung Q , die sich vor einer ebenen Leiterplatte befindet, kann einfach durch **elektrische Spiegelung** (electric mirror reflection) konstruiert werden: Eine virtuelle Ladung entgegengesetzten Vorzeichens im gleichen Abstand hinter der Ebene der Leiterplatte sichert, dass die Feldlinien senkrecht auf dem Leiter stehen (s. Abb. 73).

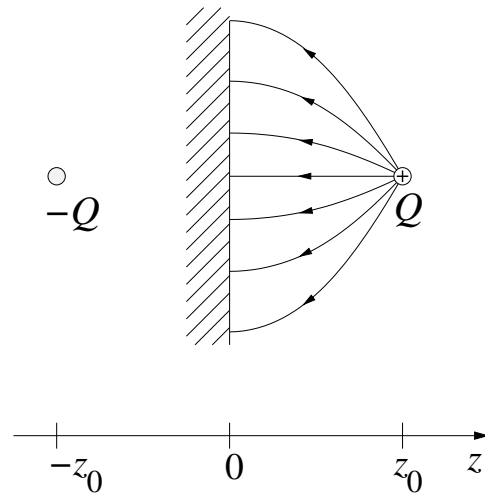


Abbildung 73. Das für $z \geq 0$ vorhandene elektrische Feld der Ladung Q , die sich im Abstand z_0 vor einer ebenen Leiterplatte befindet, ist das gleiche, als ob die Leiterplatte nicht vorhanden wäre, aber dafür eine Ladung $-Q$ im gleichen Abstand hinter dieser Ebene sitzen würde

Für die Kraft, mit der die Ladung Q von der ebenen Leiterplatte angezogen wird, muss also gelten

$$F_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(2z_0)^2}. \quad (269)$$

(2) Da sich in einem Leiter die elektrischen Ladungen auf der Oberfläche verteilen, kann man das Innere des Leiters entfernen, ohne dass sich an dieser Ladungsverteilung etwas ändert. Wegen der nicht vorhandenen Ladungen muss außerdem (s. Gl. (272), S. 174) das elektrische Feld im Inneren eines hohlen Leiters null sein. Oft genügt es sogar, wenn die Oberfläche von einem Metallnetz gebildet wird. Derartige **Faraday-Käfige** (Faraday cages, Michael Faraday 1791-1867) werden zur Abschirmung elektrischer Felder verwendet.

Personen in Metallfahrzeugen (PKW, Bahnen, Flugzeuge) sind aus diesem Grund i.Allg. vor Gewittern geschützt. Allerdings kann der Blitzeinschlag mit einer starken lokalen Erhitzung verbunden sein und z.B. zu Löchern in der Außenwand eines Flugzeuges oder sogar zur Fluguntüchtigkeit führen.

(3) Ladungen, die man mit einer Metallkugel, die sich an einem isolierenden Griff befindet (elektrischer Löffel), durch eine Öffnung an die Innenwand eines hohlen Leiters bringt, wandern sofort an die Außenseite, so dass die Innenwand ladungsfrei bleibt. Durch Wiederholung kann man auf diese Weise im Prinzip sehr große Ladungen speichern (**Faraday-Becher**, Anwendung beim Van-de-Graaff-Generator).

(4) An den Spitzen elektrischer Leiter treten bei entsprechend hohen Spannungen elektrische Entladungen auf, die man als **Spitzenentladungen** (corona discharges) bezeichnet. In der Natur beobachtet man sie als **Sankt-Elms-Feuer** (Saint Elmo's fire) z.B. an den Schiffsmasten vor dem Einsetzen eines Gewitters. Dies beruht darauf, dass das elektrische Feld, das ja an jeder Stelle des Leiters senkrecht zur Oberfläche steht, ungefähr proportional zum reziproken Krümmungsradius der Oberfläche an der betreffenden Stelle ist ($E_{\perp} \propto 1/R$). Damit werden dann u.U. so hohe Feldstärken erreicht, dass eine selbstständige Gasentladung (s.S.253) einsetzt.

Zur Begründung der Beziehung $E_{\perp} \propto 1/R$ gehen wir von den Gleichungen aus, die wir im kleingedruckten Text auf S.170 abgeleitet hatten. Die Ladung der Kugel mit dem Radius R ergibt sich aus ihrem Potential U zu $Q = 4\pi\epsilon_0 RU$. Setzt man dies in die Beziehung für die elektrische Feldstärke $E_{\perp} = (4\pi\epsilon_0)^{-1}Q/R^2$ ein, so folgt $E_{\perp} = U/R$.

Ü 83 Ü 84

16.4 Kapazität, Energiedichte des elektrischen Feldes

Wenn man an zwei Leiter, die isoliert voneinander befestigt sind, eine Spannung U anlegt, so wird auf dem einen Leiter eine bestimmte positive Ladung Q und auf dem anderen eine gleichgroße negative Ladung $-Q$ gespeichert. Q wächst linear mit der Spannung U an. Der Proportionalitätsfaktor hängt nur von der Geometrie der beiden Leiter und der Art des isolierenden Materials ab und wird **Kapazität** (capacitance) C genannt

$$Q = CU. \quad (270)$$

Für die Einheit der Kapazität ergibt sich der Quotient As/V, wofür man die Bezeichnung **Farad** (farad, Symbol F, nach Michael Faraday 1791-1867) eingeführt hat. Die beiden isoliert voneinander angebrachten Leiter bezeichnet man als **Kondensator** (capacitor). Für eine Metallkugel mit dem Radius R_1 , die im Vakuum

konzentrisch von einer zweiten Metallkugel mit dem Radius $R_2 > R_1$ umgeben ist (**Kugelkondensator**, spherical capacitor), ergibt sich die Kapazität zu

$$C = 4\pi\epsilon_0(1/R_1 - 1/R_2)^{-1}. \quad (271)$$

Wegen der Kugelsymmetrie besitzt die elektrische Feldstärke im Gebiet zwischen den beiden Kugeln ($R_1 < r < R_2$) nur eine r -Komponente, die den gleichen Wert besitzt, als wenn sich die gesamte Ladung (Q) der inneren Kugel im Mittelpunkt befinden würde, d.h. es gilt (s. den kleingedruckten Text auf S.170) $E_r = Q(4\pi\epsilon_0 r^2)^{-1}$. Damit folgt aus Gl.(267), S.170, $U(R_1, R_2) = Q(4\pi\epsilon_0)^{-1}(1/R_1 - 1/R_2)$ und wegen $C = Q/U$ die gesuchte Gl.(271).

Ein zweites einfaches Beispiel ist der **ideale Plattenkondensator** (parallel-plate capacitor). Den Feldlinienverlauf zeigt die Abb.74. Unter der Voraussetzung, dass der Plattenabstand ℓ klein gegen den Durchmesser der Platten ist, kann man die Randgebiete (in denen die Feldlinien gekrümmt verlaufen) vernachlässigen und damit das gesamte elektrische Feld als homogen annehmen (idealer Plattenkondensator). Ein elektrisches Feld heißt **homogen** (uniform electric field oder homogeneous electric field), wenn \vec{E} im betrachteten Raumgebiet nicht vom Ort abhängt. A 66 A 67

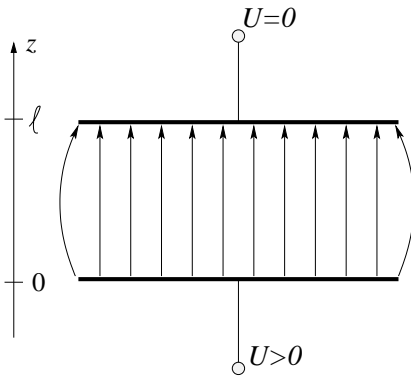


Abbildung 74. Bei einem idealen Plattenkondensator sind zwei gleich große Platten (die Fläche einer Platte sei A) mit einem sehr kleinen Abstand ($\ell \ll A^{1/2}$) parallel zueinander angeordnet, so dass die Gebiete, in denen die Feldlinien gekrümmt verlaufen, vernachlässigt werden können. Das elektrische Feld existiert damit nur im Inneren des Kondensators und ist homogen

Obwohl damit beim idealen Plattenkondensator, ähnlich wie beim Kugelkondensator, eine sehr einfache elektrische Feldverteilung vorliegt, lässt sich aber hier das Coulomb-Gesetz nicht zur Berechnung der Kapazität verwenden. Es ist deshalb notwendig, jetzt diejenige Grundgleichung einzuführen, die das Coulomb-Gesetz als Spezialfall enthält und mit deren Hilfe die Kapazität beliebig komplizierter Kondensatoren berechnet werden kann. Sie lautet

$$\oint_{(A)} \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{a} = Q \quad (272)$$

und ist eine der vier Maxwell-Gleichungen (James Clerk Maxwell 1831-1879). Sie wird im angloamerikanischen Schrifttum als Gauss law (Carl Friedrich Gauß 1777-1855) und im vorliegenden Buch als **verallgemeinertes Coulomb-Gesetz** bezeichnet. Ihre Bedeutung geht aus Abb.75 hervor: Eine elektrische Ladung Q , die aus

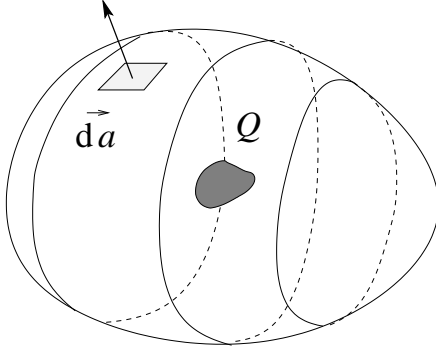


Abbildung 75. Zur Bedeutung bzw. Anwendung der Gl.(272). $d\vec{a}$ stellt ein Flächenelement auf der geschlossenen Fläche um die Ladung Q dar

beliebig vielen punktförmigen Ladungen bestehen kann und/oder durch eine stetig verteilte Ladung gegeben ist, werde von einer Fläche (closed surface) umschlossen. Für jedes **Flächenelement** (surface element) $d\vec{a}$ (die Richtung von $d\vec{a}$ steht senkrecht auf der Fläche und ist nach außen gerichtet) wird dann das skalare Produkt mit der dort herrschenden elektrischen Feldstärke \vec{E} gebildet und nach Multiplikation mit ε_0 über die gesamte Fläche integriert. Falls die Fläche nicht im Vakuum verläuft, ist der Term $\varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{a}$ vorher noch mit der relativen Dielektrizitätskonstanten ε_r (s.S.180) des Materials an der betreffenden Stelle zu multiplizieren.

Zur Ableitung des Coulomb-Gesetzes aus Gl.(272) betrachten wir den Spezialfall, dass Q eine Punktladung ist und wählen als Fläche eine Kugel mit dem Radius r um Q als Mittelpunkt. Für Vakuum ($\varepsilon_r = 1$) folgt dann aus Gl.(272), da \vec{E} wegen der Symmetrie nur eine radiale Komponente E_r haben kann, $\varepsilon_0 E_r 4\pi r^2 = Q$. Damit ergibt sich für die Kraft auf eine Punktladung q im Abstand r von der Punktladung Q der Ausdruck $F_r = qE_r = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} qQ/r^2$.

Für den idealen Plattenkondensator (s.Abb.74) im Vakuum ($\varepsilon_r = 1$) wählen wir die geschlossene Fläche als eine flache Dose, die die untere Platte umschließt. Da das elektrische Feld nur den oberen Deckel der Dose durchsetzt und die positive z -Richtung besitzt, ergibt sich aus Gl.(272) $\varepsilon_0 E_z A = Q$ und unter Verwendung des Zusammenhangs zwischen dem elektrischen Feld und der Spannung

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{\ell}. \quad (273)$$

Gemäß Abb.74, S.173, sitzt die positive Ladung Q auf der unteren Platte ($z = 0$), so dass sich für das elektrische Potential dieser Platte gegenüber der oberen Platte ($z = \ell$) nach Gl.(267), S.170) $U = -\int_{\ell}^0 E_z dz$ oder $U = E_z \ell$ ergibt. Mit $Q = \varepsilon_0 E_z A$ folgt dann für die durch Gl.(270), S.172, definierte Kapazität $C = Q/U$ die Gl.(273).

Als drittes Beispiel wollen wir die Kapazität eines **Koaxialkabels** (coaxial cable) berechnen, dessen Länge ℓ groß gegen den Radius r_a des Außenleiters sei (s.Abb.76). Für die geschlossene Fläche in Gl.(272) wählen wir den Mantel eines koaxialen Zylinders, für dessen Radius r gelte $r_i < r < r_a$.

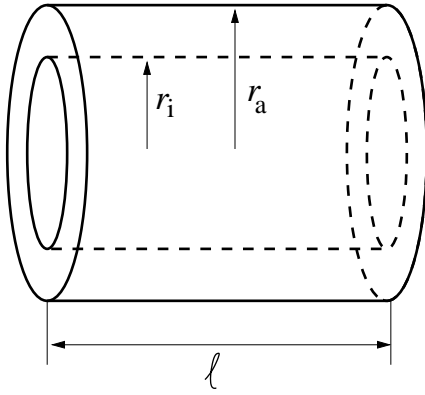


Abbildung 76. Koaxialkabel der Länge ℓ . Die Radien des Innen- bzw. des Außenleiters werden mit r_i bzw. r_a bezeichnet und es gelte $\ell \gg r_a$

Da die elektrische Feldstärke aus Symmetriegründen nur eine radiale Komponente E_r besitzt, folgt aus Gl.(272), S.174, für den Fall $\varepsilon_r = 1$ (Vakuum) die Beziehung $\varepsilon_0 E_r(r) 2\pi r \ell = Q$, wobei Q die (positive) Ladung auf dem Innenleiter bezeichnet. Unter Verwendung des Zusammenhangs zwischen elektrischem Feld und Potential ergibt sich dann für die Kapazität

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{\ell}{\ln(r_a/r_i)}. \quad (274)$$

Da auf dem Innenleiter die positive Ladung sitzt, besitzt dieser nach Gl.(267), S.170, gegenüber dem Außenleiter das elektrische Potential $U = -\int_{r_a}^{r_i} E_r dr$, woraus sich nach Einsetzen von $E_r = Q/(\varepsilon_0 2\pi r \ell)$ die Beziehung $U = Q(\varepsilon_0 2\pi \ell)^{-1} \ln(r_a/r_i)$ ergibt. Damit folgt für die Kapazität $C = Q/U$ die Gl.(274).

Schaltet man mehrere Kondensatoren mit den Kapazitäten C_1, C_2, C_3, \dots parallel (**Parallelschaltung**, parallel connection oder parallel arrangement, s. Abb. 77a), so verhält sich die Gesamtschaltung wie *ein* Kondensator mit der Kapazität

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots, \quad (275)$$

während sich für die **Serien-** oder **Reihenschaltung** (series connection oder series arrangement, s. Abb. 77b)

$$1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3 + \dots \quad (276)$$

ergibt.

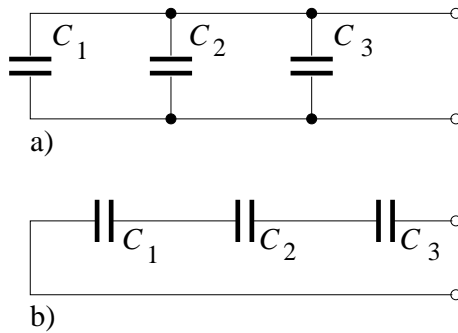


Abbildung 77. a) Parallelschaltung und b) Serienschaltung von Kondensatoren

Bei der Parallelschaltung liegt an jedem Kondensator die gleiche Spannung U an, so dass für die Ladung auf dem i -ten Kondensator $Q_i = C_i U$ gilt. Die Gesamtladung ergibt sich also zu $Q = \sum C_i U$, woraus $C = \sum C_i$ folgt. Bei der Serienschaltung sind die Ladungen auf den einzelnen Kondensatoren gleich. Dies folgt aus dem Satz von der Erhaltung der Ladung, angewandt auf die Schaltung vor und nach Anlegen der Spannung U . Danach muss z.B. die Ladung auf der rechten Platte von C_1 entgegengesetzt gleich der Ladung auf der linken Platte von C_2 sein. Andererseits addieren sich hier die einzelnen Spannungen, so dass $U = \sum U_i = \sum Q/C_i$ gilt, oder $U/Q = 1/C = \sum (1/C_i)$.

Zur Berechnung der Energie W , die in einem Kondensator bzw. in dem zugehörigen elektrischen Feld gespeichert ist, betrachten wir einen idealen Plattenkondensator (s. Abb. 74, S. 173), dessen Feldraum $V = A\ell$ mit einem Dielektrikum der relativen Dielektrizitätskonstante ε_r ausgefüllt sei und der die Ladung Q trage. Dann ergibt sich

$$W = \frac{Q^2}{2C}. \quad (277)$$

Auf der unteren Platte des Kondensators (s.Abb.74, S.173) sitze zunächst die Ladung Q' . Um eine differentielle Ladung dQ' von der oberen zur unteren Platte zu transportieren, muss vom Experimentator (s.S.21) die Arbeit $dW^{(e)} = -\int_{\ell}^0 (E'_z dQ') dz = (E'_z dQ')\ell$ verrichtet werden. Mit $E'_z = Q'(\varepsilon_r \varepsilon_0 A)^{-1}$ (s.Gl.(272), S.174) folgt $dW^{(e)} = Q'\ell(\varepsilon_r \varepsilon_0 A)^{-1} dQ'$, woraus sich nach der Integration von $Q' = 0$ bis $Q' = Q$ die Beziehung $W^{(e)} = Q^2/(2C)$ mit $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 A/\ell$ ergibt. Wegen $W^{(e)} = W$ ist dies identisch mit der gesuchten Gl.(277).

Diese Energie steckt im elektrischen Feld, und zwar ergibt sich für die **Energiedichte** (energy density)

$$W/V = \int_0^{\vec{D}} \vec{E}' \cdot d\vec{D}', \quad (278)$$

wobei \vec{D} die elektrische Flussdichte $\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$ (s.S.183) bezeichnet.

In der Gleichung $dW^{(e)} = -(E'_z dQ')\ell$ ersetzen wir Q' gemäß Gl.(272), S.174, durch die Beziehung $Q' = D'_z A$, so dass mit $V = A\ell$ und $E'_z dD'_z = \vec{E}' \cdot d\vec{D}'$ (skalares Produkt, s.S.21) die gesuchte Gl.(278) folgt.

Für den Fall, dass ε_r eine Konstante ist, d.h. wenn ε_r nicht von der elektrischen Feldstärke abhängt, lässt sich Gl.(278) mit $\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$ integrieren und man erhält die Beziehung

$$W/V = \vec{E} \cdot \vec{D}/2. \quad (279)$$

Mit Hilfe von Gl.(277) kann man leicht die **Anziehungskraft** (attractive force) zwischen den beiden Platten des idealen Plattenkondensators berechnen. Der Einfachheit halber setzen wir $\varepsilon_r = 1$ (Vakuum). Die untere Platte (s.Abb.74, S.173) trage die positive Ladung Q . Sie sei im Raum bei $z = 0$ fixiert. Nun verschieben wir die obere Platte um $\delta\ell$ nach oben (virtuelle Verrückung). Dazu muss der Experimentator die Arbeit $\delta W^{(e)} = -F_z^{(e)}\delta\ell$ verrichten (s.S.21). Bezeichnen wir mit F_z die Kraft, mit der die obere Platte von der unteren angezogen wird, so folgt $\delta W^{(e)} = -F_z\delta\ell$. Andererseits ergibt sich aus Gl.(277) mit Gl.(273), S.175, $\delta W = Q^2(2\varepsilon_0 A)^{-1}\delta\ell$. Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke (Prinzip der virtuellen Verrückung) gibt $F_z = -Q^2(2\varepsilon_0 A)^{-1}$.

16.5 Elektrischer Dipol

Als **elektrischen Dipol** (electric dipole) bezeichnet man die Anordnung von zwei Punktladungen Q und $-Q$, die voneinander einen (kleinen) Abstand ℓ besitzen. Den Grenzfall eines **Punktdipols** (point dipole) erhält man, wenn ℓ nach null geht bei einem endlichen Wert für das Produkt $Q\ell$. Das **elektrische Dipolmoment** (electric dipole moment) \vec{p} ist ein Vektor mit dem Betrag $Q\ell$ und der *Richtung von $-Q$ nach $+Q$* (man beachte diese letztere Festlegung!). Für das elektrische Potential, das ein elektrischer Dipol für $\varepsilon_r = 1$ (Vakuum) an der Stelle \vec{r} erzeugt (s. Abb. 78), ergibt eine einfache Rechnung für $r \gg \ell$

$$U(\vec{r}, \infty) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \quad (280)$$

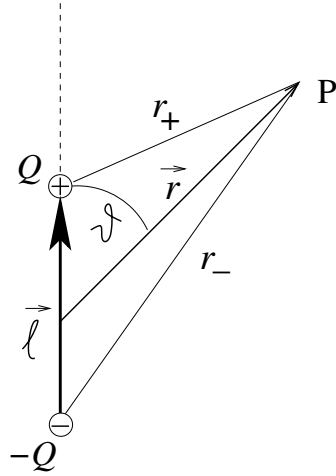


Abbildung 78. Zur Berechnung des elektrischen Potentials U und der elektrischen Feldstärke \vec{E} , die von einem elektrischen Dipol an der Stelle \vec{r} erzeugt wird

Für das elektrische Potential, das die Ladung $+Q$ an der Stelle P erzeugt, gilt nach dem kleingedruckten Text auf S. 170 $U_+(r_+, \infty) = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}Q/r_+$, wobei r_+ den Abstand zwischen der Punktladung $+Q$ und dem Punkt P bezeichnet. Mit dem Kosinussatz $r_+^2 = (\ell/2)^2 + r^2 - 2(\ell/2)r \cos \vartheta$ (s. Abb. 78) erhält man unter Berücksichtigung von $\ell/r \ll 1$ durch Reihenentwicklung $r_+ = r[1 - \ell(2r)^{-1} \cos \vartheta]$. Analog ergibt sich für das Potential der Ladung $-Q$ die Beziehung $U_-(r_-, \infty) = -(4\pi\varepsilon_0)^{-1}Q/r_-$ mit $r_- = r[1 + \ell(2r)^{-1} \cos \vartheta]$. Für das Potential des Dipols $U(\vec{r}, \infty) = U_+(r_+, \infty) + U_-(r_-, \infty)$ folgt damit $U(\vec{r}, \infty) = Q(4\pi\varepsilon_0 r^2)^{-1} \ell \cos \vartheta$, woraus man unter Verwendung des durch $\vec{p} = Q\vec{\ell}$ definierten Dipolmomentes die Gl. (280) erhält.

Wichtig an dieser Formel ist neben der Winkelabhängigkeit die Tatsache, dass das Potential quadratisch mit dem Abstand r abnimmt, während sich für eine Punktladung eine Abnahme proportional zu $1/r$ ergab (s. den kleingedruckten Text auf S.170).

Unter Verwendung der Gl.(268), S.170, erhält man aus Gl.(280) für die Feldstärke des elektrischen Dipols

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\vec{p} - \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^2} \vec{r} \right). \quad (281)$$

Für die x -Komponente der elektrischen Feldstärke gilt nach Gl.(268), S.170, $E_x = -\partial U/\partial x$. Setzen wir hier das Potential nach Gl.(280) ein, so folgt unter Beachtung von $\vec{p} \cdot \vec{r} = p_x x + p_y y + p_z z$ und $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ durch Differentiation nach x der Ausdruck $E_x = -(4\pi\epsilon_0 r^3)^{-1} [p_x - 3(\vec{p} \cdot \vec{r}) r^{-2} x]$. Analoge Beziehungen ergeben sich für E_y und E_z , womit Gl.(281) bewiesen ist.

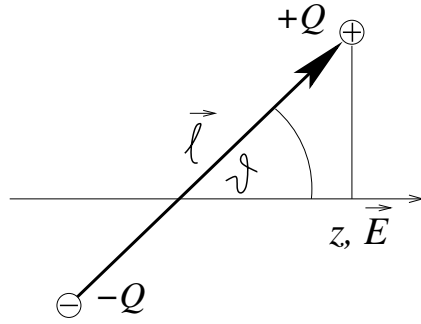


Abbildung 79. Elektrischer Dipol in einem homogenen elektrischen Feld, das parallel zur z -Richtung verläuft

Ein elektrischer Dipol \vec{p} befinde sich in einem homogenen elektrischen Feld \vec{E} . Der Winkel zwischen beiden sei ϑ (s. Abb.79). Dann erfährt dieser Dipol ein Drehmoment

$$\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (282)$$

und besitzt bezüglich der zum elektrischen Feld senkrechten Orientierung die potentielle Energie

$$W_{\text{pot}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (283)$$

Die Ladung $+Q$ erfährt eine Kraft EQ in Richtung von \vec{E} und die Ladung $-Q$ eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft. Für den Betrag des dadurch erzeugten Drehmoments (s.S.40) folgt also $EQ(\ell/2) \sin \vartheta + EQ(\ell/2) \sin \vartheta$ oder $|\vec{E}| \cdot |\vec{p}| \sin \vartheta$, wobei ϑ den Winkel zwischen der Richtung des Dipolmoments und der elektrischen Feldstärke bezeichnet. Da das Drehmoment in die Abbildungsebene hineingerichtet ist (Rechtsschraube), kann man auf Grund der Definition des Vektorproduktes (s.S.11) schreiben $\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E}$. Um den elektrischen Dipol aus der senkrechten Richtung zu \vec{E} in die um den Winkel ϑ geneigte Richtung zu drehen, muss die Ladung $+Q$ um die Strecke $(\ell/2) \cos \vartheta$ in Richtung der wirkenden Kraft $Q\vec{E}$ bewegt werden. Dies führt zu einer Abnahme der potentiellen Energie um den Betrag $EQ(\ell/2) \cos \vartheta$. Ein gleichgroßer Term ergibt sich für die mit der Drehung verbundene Bewegung der Ladung $-Q$, so dass man - auf Grund der Definition des skalaren Produktes (s.S.21) - für die potentielle Energie des Dipols bezüglich seiner senkrechten Orientierung $W_{\text{pot}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ schreiben kann.

Ü 87

16.6 Dielektrika

Wir beginnen mit zwei Experimenten: Ein idealer Plattenkondensator habe im Vakuum die Kapazität C_v . Im ersten Experiment bringen wir auf diesen Kondensator die Ladung Q_v . Dies bedeutet, dass die eine Platte die Ladung $+Q_v$ und die andere die Ladung $-Q_v$ erhält. Dann messen wir die Spannung, für die gemäß Gl.(270), S.172, $U_v = Q_v/C_v$ gelten muss. Nach Ausfüllung des Raumes zwischen den beiden Platten mit einem isolierenden Stoff, den man als **Dielektrikum** (dielectric) bezeichnet, verringert sich die Spannung auf $U < U_v$. Im zweiten Experiment legen wir an die Platten des Kondensators eine konstante Spannung U_v an und messen die von ihm gespeicherte Ladung. Im Vakuum muss nach Gl.(270), S.172, $Q_v = C_v U_v$ gelten. Nach Ausfüllung mit dem Dielektrikum erhöht sich die Ladung auf $Q > Q_v$, und zwar um den gleichen Faktor, um den die Spannung im ersten Experiment abnahm. Diese experimentellen Befunde lassen sich dadurch erklären, dass das Dielektrikum die Kapazität des Kondensators vergrößert. Man schreibt

$$C = \varepsilon_r C_v, \quad (284)$$

wobei $\varepsilon_r \geq 1$ die **relative Dielektrizitätskonstante** oder **Permittivitätszahl** oder **Dielektrizitätszahl** (permittivity oder dielectric constant) des Materials ist, sofern dieses den gesamten Feldraum ausfüllt. Einige Zahlenwerte sind in Tab.36 zusammengestellt. A 68 A 69

Wenn das elektrische Feld, das auf das Dielektrikum einwirkt, zeitlich periodisch ist, so hängt ε_r von der Frequenz f ab, d.h. es gilt $\varepsilon_r = \varepsilon_r(f)$. Für Stoffe, die aus polaren Molekülen bestehen, wie z.B. Wasser, tritt die Frequenzabhängigkeit bereits im

Tabelle 36. Experimentelle Werte für die relative Dielektrizitätskonstante ε_r einiger Stoffe [LID90]. ϑ bezeichnet die Temperatur in °C. Man beachte die Umrechnung $T/K = \vartheta/^\circ\text{C} + 273,15$

Stoff	$\vartheta / ^\circ\text{C}$	ε_r
Polystyrol (polystyrene)	25	$2,55 \pm 0,01$
Silizium (Si, silicon)	20	11,8
Germanium (Ge, germanium)	20	16,0
Wasser (H ₂ O, water)	0	87,90
	20	80,20
	60	66,73
	100	55,51
Methanol (CH ₃ OH, methanol)	20	33,62
	25	32,63
Benzol (C ₆ H ₆ , benzene)	20	2,284
	25	2,274
Stickstoff (N ₂ , nitrogen) 0,1 MPa	20	1,000547
Sauerstoff (O ₂ , oxygen) 0,1 MPa	20	1,000495
Luft (dry air, CO ₂ free) 0,1 MPa	20	1,000537

MHz-Bereich auf und führt zu einer monotonen Abnahme von ε_r . So verringert sich die relative Dielektrizitätskonstante des Wassers auf ca. 1,8, wenn man zu Frequenzen von der Größenordnung 10^{14} Hertz (Frequenzbereich des Lichtes, s.S.289) übergeht. Die Ursache dafür wird auf S.187 behandelt. Abgesehen von dieser monotonen Abnahme findet man noch bei *allen* Stoffen oberhalb von ca. 10^{12} Hz Bereiche, in denen ε_r eine charakteristische Frequenzabhängigkeit zeigt, wie sie schematisch in der oberen Abbildung von Abb.156, S.316, für die Größe $n \propto \sqrt{\varepsilon_r}$ dargestellt ist. Die Ursachen dafür werden auf S.187 erläutert. Die Werte in Tab.36 gelten für $f \rightarrow 0$.

Für die Verringerung der elektrischen Spannung im ersten Experiment gilt gemäß Gl.(284) $U/U_v = 1/\varepsilon_r$. Dies bedeutet, dass auch die elektrische Feldstärke um den Faktor $1/\varepsilon_r$ verringert wird. Die Ursache dafür sind Ladungen, die an der Oberfläche des Dielektrikums durch das Anlegen des elektrischen Feldes erzeugt werden und die man **Polarisationsladungen** (polarization charges) nennt. Im Gegensatz dazu bezeichnet man die Ladungen auf den Kondensatorplatten (hier Q_v) als **freie Ladungen** (free charges). Die Größe Q_p der Polarisationsladungen ergibt sich aus der Bedingung $Q_v - Q_p = Q_v/\varepsilon_r$ (s.Abb.80) zu

$$Q_p = Q_v(1 - 1/\varepsilon_r). \quad (285)$$

Man beachte, dass diese Gleichung nur für einen idealen Plattenkondensator (s.Abb.74, S.173) gilt, der vollständig mit dem Dielektrikum ausgefüllt ist.

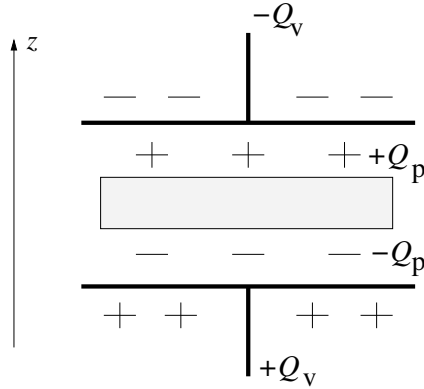


Abbildung 80. Die auf der Oberfläche des Dielektrikums durch Polarisation erzeugten Ladungen Q_p sind die Ursache für die Verringerung der elektrischen Feldstärke im Inneren des Dielektrikums

Polarisationsladungen in einem Leiter lassen sich experimentell leicht nachweisen, indem man zwei sich berührende Leiterplatten in das elektrische Feld bringt und so orientiert, dass die Platten senkrecht zur elektrischen Feldstärke stehen. Nach Trennung der beiden Platten im Feld sitzt dann auf der einen Platte die Polarisationsladung Q_p und auf der anderen $-Q_p$. Sind die Platten mit gut isolierenden Griffen versehen, so kann man die Ladungen mühelos aus dem Feld herausbringen und anschließend messen. Wenn das Feld von einem idealen Plattenkondensator herrührt, auf den die Ladung Q_v gebracht wurde (1. Experiment von S.180), so muss $Q_p = Q_v$ gelten, da im Inneren eines Leiters kein elektrisches Feld existieren darf. Dies bedeutet gemäß Gl.(285), dass die (statische) relative Dielektrizitätskonstante eines Leiters unendlich ist.

Das durch die Ladungen Q_p im Dielektrikum erzeugte Dipolmoment pro Volumen, d.h. die Größe $Q_p \ell / (A \ell)$, nennt man **elektrische Polarisation** (electric polarization). Da die Richtung des Dipolmomentes von der negativen zur positiven Ladung (s.S.178) festgelegt wurde, kann man die elektrische Polarisation als Vektor \vec{P} definieren und man erhält nach einer kleinen Zwischenrechnung

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}. \quad (286)$$

Für den Betrag der elektrischen Polarisation gilt definitionsgemäß $P = Q_p \ell / (A \ell)$, woraus mit Gl.(285) und unter Verwendung der Beziehung $Q_v = \varepsilon_0 A E_v$ (s. den kleingedruckten Text nach Gl.(273) auf S.175) folgt $P = \varepsilon_0 E_v (1 - 1/\varepsilon_r)$. Die Ersetzung von E_v durch $\varepsilon_r E$ schließlich liefert die gesuchte Gl.(286).

Die Größe $\varepsilon_r - 1$ wird **elektrische Suszeptibilität** (electric susceptibility) χ_e genannt. Die früher übliche **cgs-Suszeptibilität** (cgs susceptibility), für die wir κ_e schreiben, wurde durch die Beziehung $\kappa_e = (\varepsilon_r - 1)/(4\pi)$ definiert, so dass $\chi_e = 4\pi\kappa_e$

gilt. Korrekterweise muss man χ_e und entsprechend auch κ_e als **Volumenssuszeptibilitäten** bezeichnen, da \vec{P} als Dipolmoment pro Volumen definiert ist. Die Definitionen der **Massenssuszeptibilität** (mass susceptibility) und der **molaren Suszeptibilität** (molar susceptibility) kann man der Tab.37 entnehmen.

Tabelle 37. Die drei verschiedenen elektrischen Suszeptibilitäten

Bezeichnung	Definition	Einheit
Volumenssuszeptibilität	$\chi_e = \varepsilon_r - 1$	1
Massenssuszeptibilität	$\chi_{e, \text{ma}} = \chi_e / \rho$ (Dichte ρ)	m^3 / kg
molare Suszeptibilität	$\chi_{e, \text{mo}} = \chi_e M / \rho$ (molare Masse M)	m^3 / mol

Die Unterscheidung in freie Ladungen und Polarisationsladungen macht es notwendig, darauf hinzuweisen, dass die Größe Q im verallgemeinerten Coulomb-Gesetz (s.Gl.(272), S.174) nur die *freien Ladungen* bezeichnet, die sich innerhalb der geschlossenen Fläche befinden, denn diese sind die Ursache der elektrischen Erregung des leeren Raumes und der Polarisation der Dielektrika. Führt man den als **elektrische Flussdichte** oder **elektrische Verschiebung** (electric displacement) bezeichneten Vektor

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \quad (287)$$

ein, so erhält das verallgemeinerte Coulomb-Gesetz die einfache Form

$$\oint_{(A)} \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q. \quad (288)$$

Diese Gleichung besagt, dass der Fluss des Vektors \vec{D} durch die Oberfläche (A) , die das Volumen mit der freien Ladung Q umfasst, unabhängig davon ist, ob und in welcher Verteilung Dielektrika den Raum erfüllen. Der analoge Fluss der elektrischen Feldstärke dagegen wird wegen Gl.(287) auch durch die Dielektrika und damit auch durch die Polarisationsladungen bestimmt.

Während man die elektrische Feldstärke \vec{E} gemäß der Definition (s.Gl.(265), S.169) durch die Kraft auf eine Punktladung ermitteln kann, muss man zur Messung von \vec{D} die Gl.(288) verwenden, da diese die elektrische Flussdichte mit einer direkt messbaren Größe, nämlich der elektrischen Ladung, verknüpft: Wir bringen an die betreffende Stelle, an der \vec{D} gemessen werden soll, zwei sich berührende Leiterplatten gleicher Größe (Fläche A) und messen, wie im kleingedruckten Text auf S.182 beschrieben, die Ladung Q_p für verschiedene Orientierungen. Die Normale zu derjenigen Orientierung der Platten, für die Q_p maximal wird, gibt dann die Richtung von \vec{D} an. Der Betrag von \vec{D} folgt

aus Gl.(288) zu $Q_{p,\max}/A$, indem wir mit dem Integral die Platte umschließen, die die Ladung $+Q_{p,\max}$ trägt.

Aus Gl.(288) folgt die wichtige Tatsache, dass die senkrechte Komponente D_{\perp} der elektrischen Flussdichte stetig durch eine Grenzfläche zwischen Stoffen mit unterschiedlichen relativen Dielektrizitätskonstanten (ε_{r1} und ε_{r2}) hindurchgeht. Damit folgt aber aus Gl.(287), dass sich die senkrechte Komponente der elektrischen Feldstärke E_{\perp} beim Übergang von 1 nach 2 sprunghaft um den Faktor $\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r2}$ ändern muss. Für die zur Grenzfläche parallelen Komponenten dagegen gilt das Umgekehrte: E_{\parallel} geht stetig hindurch, während D_{\parallel} springt.

Zum Beweis füllen wir die linke Hälfte eines idealen Plattenkondensators, an den eine konstante Spannung U angelegt wird (s.Abb.74, S.173), mit einem Dielektrikum der relativen Dielektrizitätskonstante ε_{r1} aus und die rechte Hälfte mit ε_{r2} . Die elektrische Feldstärke verläuft damit parallel zur Grenzfläche. Da andererseits die elektrische Feldstärke in beiden Hälften den gleichen Wert, nämlich U/ℓ besitzen muss, geht E_{\parallel} stetig durch die Grenzfläche hindurch, während nach Gl.(287) D_{\parallel} links den Wert $\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 U/\ell$ und rechts den Wert $\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 U/\ell$ besitzen muss, was bedeutet, dass D_{\parallel} beim Durchgang durch die Grenzfläche von 1 nach 2 um den Faktor $\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}$ springt.

Unter Verwendung dieser Aussagen ergibt sich aus Abb.81 die Beziehung

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}, \quad (289)$$

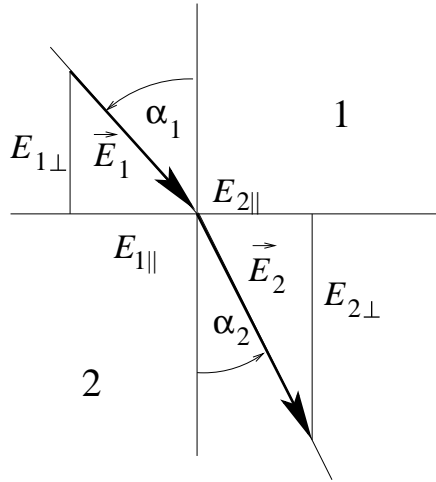


Abbildung 81. Zum Brechungsgesetz für elektrische Feldlinien beim Übergang von einem Dielektrikum (1) zu einem anderen (2)

die man als **Brechungsgesetz für elektrische Feldlinien** (law of refraction for electric field lines) bezeichnet. Vom Snellius'schen Brechungsgesetz (Snell's law) für Lichtstrahlen (Gl.(446), s.S.305) unterscheidet es sich dadurch, dass der Tangens an Stelle des Sinus und die relative Dielektrizitätskonstante ε_r an Stelle des Brechungsindex n steht und dass die Indizes auf der rechten Seite nicht vertauscht sind.

Aus Abb.81 liest man ab $\tan \alpha_1 = E_{1\parallel}/E_{1\perp}$ und $\tan \alpha_2 = E_{2\parallel}/E_{2\perp}$. Wegen $E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$ folgt durch Division $\tan \alpha_1 / \tan \alpha_2 = E_{2\perp}/E_{1\perp}$. Ersetzt man hier noch $E_{1\perp}$ durch $D_{1\perp}/\varepsilon_r \varepsilon_0$ (s.Gl.(287), S.183) und beachtet die Stetigkeitsbedingung $D_{2\perp} = D_{1\perp}$, so ergibt sich die Gl.(289).

Wir kommen nun zurück zu dem Experiment, das auf S.180 beschrieben wurde. Durch Ausfüllen des Raumes zwischen den beiden Platten eines idealen Plattenkondensators mit einem isolierenden Stoff der relativen Dielektrizitätskonstante ε_r (s.Abb.80, S.182) verringert sich die elektrische Feldstärke von $\vec{E}_v = (U_v/\ell)\vec{e}_z$ auf $\vec{E} = \vec{E}_v/\varepsilon_r$. Einsetzen dieser Beziehung in die Gl.(286), S.182, gibt

$$\vec{E} = \vec{E}_v - \vec{P}/\varepsilon_0. \quad (290)$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite dieser Gleichung beschreibt die feldschwächende Wirkung der Polarisationsladungen Q_p . Allerdings gilt Gl.(290) nur unter der Voraussetzung, dass das Dielektrikum den gesamten Raum ausfüllt. Für eine beliebige Verteilung des Dielektrikums hängt sowohl \vec{E} als auch \vec{P} vom betrachteten Ort im Dielektrikum ab und es lässt sich keine zu Gl.(290) analoge Beziehung aufschreiben. In all den Fällen aber, bei denen man das vom Dielektrikum ausgefüllte Raumgebiet durch ein Rotationsellipsoid annähern kann, hängen \vec{E} und \vec{P} innerhalb des Dielektrikums nicht vom Ort ab (sie sind homogen). Für den Fall, dass die Symmetrieachse \vec{a} des Rotationsellipsoids parallel oder senkrecht zu \vec{E}_v gerichtet ist, gilt [SOM49]

$$\vec{E} = \vec{E}_v - N\vec{P}/\varepsilon_0. \quad (291)$$

N ist der **Entelektrisierungsfaktor** (depolarization factor), für den Zahlenwerte in Tab.38 angegeben sind. Für einen Rundstab, der parallel zum elektrischen Feld \vec{E}_v orientiert ist, ergibt sich also $N = 0$ und für die senkrechte Anordnung $N = 1/2$. Durch Einsetzen von Gl.(286), S.182, in Gl.(291) folgt

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_v}{1 + (\varepsilon_r - 1)N}, \quad (292)$$

woraus man ersieht, dass der Feldschwächungsfaktor $1/[1 + (\varepsilon_r - 1)N]$ ist.

Tabelle 38. Entelektrisierungsfaktor N für Rotationsellipsoide mit dem Achsenverhältnis a/b , wobei a die Länge der Rotationsachse und b den Durchmesser des Rotationsellipsoids senkrecht dazu bezeichnet. Die Formeln für beliebige Werte von a/b findet man bei [SOM49]

Achsenverhältnis a/b des Rotationsellipsoids	Rotationsachse a parallel zum elektrischen Feld	Rotationsachse a senkrecht zum elektrischen Feld
$a/b = \infty$ (Rundstab)	0	1/2
$a/b \gg 1$	$(a/b)^{-2} \ln(2a/b)$	$1/2[1 - (a/b)^{-2} \ln(2a/b)]$
$a/b = 1$ (Kugel)	1/3	1/3
$a/b \ll 1$	$1 - (\pi/2)(a/b)$	$(\pi/4)(a/b)$
$a/b = 0$ (Kreisscheibe)	1	0

Nach Tab.38 besitzt ein dielektrischer Stab mit kreisförmigem Querschnitt (Rundstab) in einem elektrischen Feld bei paralleler Orientierung ein um den Faktor $1 + (\varepsilon_r - 1)/2$ mal größeres elektrisches Dipolmoment als bei senkrechter Stellung. Dies entspricht einer um den gleichen Faktor verringerten potentiellen Energie (s.Gl.(283), S.179, mit $\cos \vartheta = 1$), weshalb sich ein solcher Stab bei drehbarer Aufhängung parallel zum elektrischen Feld einstellt.

A 70 A 71 A 72 A 73

Je nach dem Mechanismus für das Entstehen der Polarisationsladungen spricht man von **Verschiebungspolarisation** (displacement polarization) oder **Orientierungspolarisation** (orientation polarization). Die Verschiebungspolarisation tritt bei allen Stoffen auf, während die Orientierungspolarisation noch bei denjenigen Stoffen hinzukommt, die aus polaren Molekülen aufgebaut sind.

Zur *Verschiebungspolarisation*: In isotropen Medien werden durch Anlegen eines elektrischen Feldes \vec{E} die positiv geladenen Atomkerne gegenüber den Elektronenhüllen der Atome oder Moleküle in Richtung dieses elektrischen Feldes verschoben, so dass ein elektrisches Dipolmoment \vec{p}_α entsteht, für das man

$$\vec{p}_\alpha = \alpha \vec{E} \quad (293)$$

schreiben kann. α besitzt die Einheit Asm^2/V und heißt **Polarisierbarkeit** (polarizability) des betreffenden Atoms bzw. Moleküls. Für die elektrische Polarisation \vec{P} ergibt sich, wenn c_α die Konzentration der Teilchen mit der Polarisierbarkeit α ist, gemäß der Definition von S.182,

$$\vec{P} = c_\alpha \alpha \vec{E}. \quad (294)$$

Die Konzentration c_α berechnet sich aus der molaren Masse M_α und der Dichte ρ_α des Stoffes unter Verwendung der Anzahl der Teilchen in einem Mol (Avogadro-Konstante N_A) zu $c_\alpha = N_A \rho_\alpha / M_\alpha$. Ein Vergleich der Gln.(294) und (286), S.182, liefert die Beziehung $\varepsilon_r - 1 = \alpha c_\alpha / \varepsilon_0$. Dies ist aber nur für verdünnte Systeme

richtig, bei denen das von den Nachbardipolen erzeugte elektrische Feld am Ort des betrachteten Dipols klein gegen das von außen angelegte elektrische Feld \vec{E} ist. Die Berücksichtigung dieser Wechselwirkung (s. z.B. [GRE84]) führt zu der Beziehung

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{c_\alpha}{3\varepsilon_0} \alpha. \quad (295)$$

Sie wird **Clausius-Mosotti-Gleichung** (Clausius-Mosotti equation) genannt, da Rudolf Emanuel Clausius (1822-1888) und Ottaviano Fabricio Mosotti (1791-1863) halbempirisch einen Zusammenhang zwischen dem Quotienten $(\varepsilon_r - 1)/(\varepsilon_r + 2)$ und molekularen Konstanten gefunden hatten. Die Gl.(295) geht für verdünnte Systeme ($\varepsilon_r \approx 1$) in die obige Näherungsformel $\varepsilon_r - 1 = \alpha c_\alpha / \varepsilon_0$ über.

Die *Orientierungspolarisation* kommt hinzu, wenn einige Teilchen ein permanentes elektrisches Dipolmoment \vec{p} besitzen. Da die Orientierung dieser Dipolmomente zwei konkurrierenden Einflüssen unterliegt, nämlich der ausrichtenden Wirkung des elektrischen Feldes und der destruktiven Wirkung der thermischen Bewegung, ergibt sich auf Grund der Boltzmann-Verteilung (s.S.103) ein effektives elektrisches Dipolmoment in Richtung von \vec{E} der Größe

$$\vec{p}_{\text{eff}} = \frac{p^2}{3kT} \vec{E}. \quad (296)$$

Für die Wahrscheinlichkeitsdichte der potentiellen Energie E_{pot} gilt (s.Gl.(171), S.103) $P(E_{\text{pot}}) = G(E_{\text{pot}}) \exp(-E_{\text{pot}}/kT)$, wobei $G(E_{\text{pot}})$ das statistische Gewicht der Energie bezeichnet. Für E_{pot} ist die Größe $-Ep \cos \vartheta$ mit ϑ als dem Winkel zwischen \vec{E} und \vec{p} einzusetzen (s.Gl.(283), S.179). Aus $G(E_{\text{pot}})dE_{\text{pot}} = G(\vartheta)d\vartheta$ mit $G(E_{\text{pot}}) = K$ ergibt sich $G(\vartheta) = KpE \sin \vartheta$ für das statistische Gewicht von ϑ . Die Konstante K folgt aus der Bedingung $\int_0^\pi G(\vartheta)d\vartheta = 1$ zu $K = (2pE)^{-1}$. Damit erhält man die Beziehung $p_{\text{eff}} = \int_0^\pi (p \cos \vartheta)(1/2) \sin \vartheta \exp[(pE/kT) \cos \vartheta] d\vartheta$ oder, unter der bei nicht zu tiefen Temperaturen gut erfüllten Näherung $\exp[(pE/kT) \cos \vartheta] \approx 1 + (pE/kT) \cos \vartheta$, die Gl.(296).

Eine analoge Behandlung wie nach Gl.(293) führt dann in Erweiterung von Gl.(295) zur **Debye-Gleichung** (Debye equation, Peter Debye 1884-1966)

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{c_\alpha}{3\varepsilon_0} \left(\alpha + (c_p/c_\alpha) \frac{p^2}{3kT} \right), \quad (297)$$

wobei c_p die Konzentration der Teilchen mit permanentem Dipolmoment bezeichnet.

Die Ausrichtung eines polaren Moleküls nach Anlegen eines elektrischen Feldes erfolgt nicht momentan, sondern mit einer gewissen Zeitverzögerung. Die Zeitkonstante heißt **dielektrische Relaxationszeit** (dielectric relaxation time). Wegen der Zeitverzögerung verringert sich der Beitrag der Orientierungspolarisation mit wachsender Frequenz und

verschwindet schließlich vollständig. Dies ist die Ursache für die auf S.181 erwähnte Frequenzabhängigkeit der relativen Dielektrizitätskonstante.

Ü 88 Ü 89 Ü 90 Ü 91

18 Magnetfelder

Pjotr Kapitza: Wo die Zweifel aufhören, hört auch die Wissenschaft auf.

18.1 Das Biot-Savart-Gesetz und die Berechnung von Magnetfeldern

Eine nach allen Richtungen drehbar aufgehängte **Magnetnadel** (magnetic needle) orientiert sich unter dem Einfluss des magnetischen Erdfeldes so, dass das eine Ende der Nadel, das wir als Spitze bezeichnen wollen, nach Norden zeigt (**Magnetkompass**, magnetic compass). Ein beliebiges **Magnetfeld** (magnetic field) \vec{H} lässt sich dann durch eine solche Nadel folgendermaßen charakterisieren: Die Spitze gibt die Richtung von \vec{H} an, während das Drehmoment, mit dem die Magnetnadel ausgerichtet wird, proportional zum Betrag des Magnetfeldes ist. Auf diese Weise stellt man experimentell fest, dass ein langer, geradliniger Draht, der sich in z -Richtung erstreckt und der von einem Strom I in gleicher Richtung durchflossen wird (s. Abb. 89), im Abstand r_0 ein Magnetfeld erzeugt, das nur eine ϕ -Komponente besitzt, für die $H_\phi \propto I/r_0$ gilt. Im SI wird die Proportionalitätskonstante zu $1/(2\pi)$ festgelegt, so dass sich

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi r_0} \quad (313)$$

ergibt. Die Einheit der magnetischen Feldstärke A/m wird demnach im Abstand 1 m von einem langen, geradlinigen Draht erzeugt, durch den ein Strom von 2π Ampere fließt. Die Gl. (313) nennen wir **integrales Biot-Savart-Gesetz** (Biot-Savart law, Jean Baptiste Biot 1774-1862, Felix Savart 1791-1841).

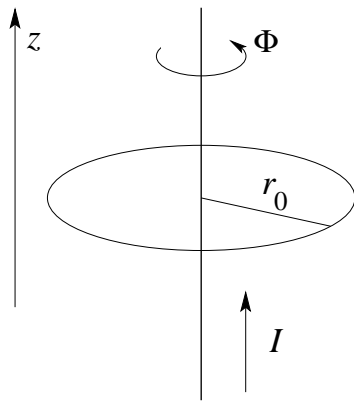


Abbildung 89. Zum Magnetfeld, das von einem langen, geradlinigen Leiter erzeugt wird, durch den ein Strom I in der positiven z -Richtung fließt

Die Tatsache, dass das Magnetfeld und der Strom eine Rechtsschraube bilden, wird mitunter als **Korkenzieherregel** (corkscrew rule) bezeichnet. Das Magnetfeld gemäß Gl.(313) lässt sich als Überlagerung von Beiträgen der einzelnen differentiellen Leiterstücke des langen, geradlinigen Drahtes darstellen, wenn man für den Beitrag dH_ϕ , den das Leiterstück der Länge dz im Abstand r (s.Abb.90) erzeugt,

$$dH_\phi = \frac{I \sin \vartheta}{4\pi r^2} dz \quad (314)$$

schreibt.

Ersetzt man in der Beziehung $H_\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} (4\pi r^2)^{-1} I \sin \vartheta \, dz$, die sich aus Gl.(314) ergibt, den Abstand r durch $r_0 / \sin \vartheta$ (s.Abb.90) und, wegen $z = -r_0 / \tan \vartheta$ (s.Abb.90), das Differential dz durch $(r_0 / \sin^2 \vartheta) d\vartheta$, so folgt $H_\phi = I(4\pi r_0)^{-1} \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta$ oder $H_\phi = I/(2\pi r_0)$.

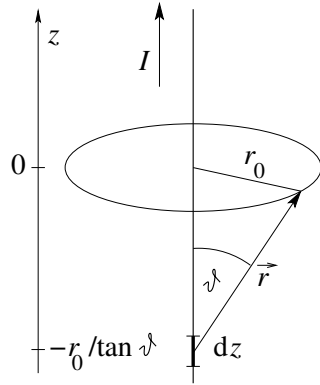


Abbildung 90. Zur Ableitung des differentiellen Biot-Savart-Gesetzes

Führt man noch den Vektor $d\vec{\ell}$ ein, dessen Betrag dz ist und der in Stromrichtung zeigt, so lässt sich die Gl.(314) unter Verwendung des Vektorproduktes zwischen $d\vec{\ell}$ und \vec{r} (s.S.11) in der Form

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} \quad (315)$$

schreiben. Diese Gleichung bezeichnen wir als **differentielles Biot-Savart-Gesetz** (Ampère-Laplace law, André Marie Ampère 1775-1836, Pierre Simon Laplace 1749-1827). Es erlaubt die Berechnung des Magnetfeldes beliebiger Stromverteilungen und entspricht damit dem Coulomb-Gesetz (s.Gl.(261), S.167), das ja in Verbindung mit der Definitionsgleichung (Gl.(265), S.169) die Berechnung des elektrischen Feldes

beliebiger Ladungsverteilungen ermöglicht. Die Abb.91 zeigt das Magnetfeld eines **Kreisstromes** (circular current), das mit Hilfe der Gl.(315) berechnet wurde. Für das Magnetfeld auf der Achse im Abstand z vom Mittelpunkt des Kreisstromes (s.Abb.91) findet man leicht

$$H_z = \frac{I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (316)$$

Der Vektor \vec{r} von der Stelle z zu einem Längenelement $d\vec{\ell}$ des Kreisstromes steht jeweils senkrecht auf diesem Längenelement. Deshalb ergibt sich aus Gl.(315) für die Feldstärkekomponente in z -Richtung (die dazu senkrechten Komponenten heben sich bei der Integration über alle Längenelemente auf) $dH_z = (I/4\pi)r^{-2}(R/r)d\ell$, woraus nach Integration über den Kreis $H_z = (I/2)R^2r^{-3}$ folgt. Dies stimmt wegen $r^2 = R^2 + z^2$ mit der Gl.(316) überein.

A 80

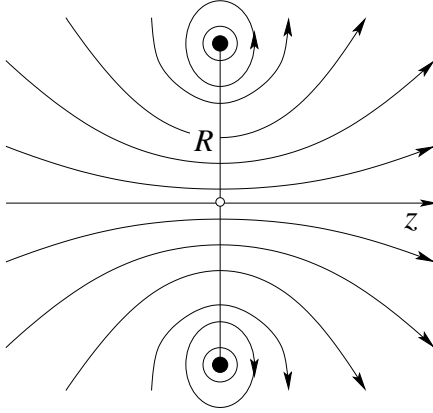


Abbildung 91. Magnetfeld eines Kreisstromes, dessen Ebene senkrecht auf der Zeichenebene steht. Der Radius des Kreisstromes ist R . Gl.(316) gilt für das Magnetfeld auf der z -Achse

Das integrale Biot-Savart-Gesetz stellt den Spezialfall einer allgemeineren Gleichung dar, zu der man durch folgende Betrachtungen kommt. Wir bezeichnen mit $d\vec{\ell}$ das Längenelement auf einem konzentrischen Kreis um den langen geradlinigen Leiter von Abb.89, S.198. Dann ergibt sich für das skalare Produkt $\vec{H} \cdot d\vec{\ell}$ (s.S.21) der Ausdruck $I(2\pi r_0)^{-1}r_0 d\phi$ und es folgt bei Integration über den Kreis $\oint_{(\ell)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I$. Bemerkenswert an diesem Ergebnis ist, dass das Integral nicht vom Radius des Kreises abhängt. Da man außerdem eine *beliebige* geschlossene Kurve um den Leiter in Kreisstücke und radiale Strecken zerlegen kann (s.Abb.92) und da längs der radialen Strecken das skalare Produkt $\vec{H} \cdot d\vec{\ell}$ verschwindet, gilt die Beziehung

$$\oint_{(\ell)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I \quad (317)$$

nicht nur für Kreise, sondern auch für beliebige geschlossene Kurven (ℓ) um den langen, geradlinigen Leiter.

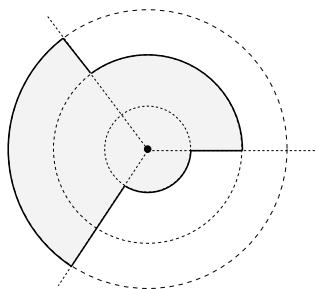


Abbildung 92. Zerlegung einer beliebigen, geschlossenen Kurve in Kreisstücke und radiale Strecken

Die Gl.(317) beinhaltet aber keine neue physikalische Erkenntnis. Sie ist lediglich eine andere mathematische Formulierung der Biot-Savart-Gesetze. Erst mit der durch Experimente gesicherten Aussage, dass Gl.(317) für jeden zeitunabhängigen Strom gilt, der die Fläche innerhalb der geschlossenen Kurve durchsetzt (s.Abb.93), sind wir zu einem neuen physikalischen Gesetz gelangt, das die Biot-Savart-Gesetze als Spezialfälle mit enthält. Die Gl.(317) - ohne die Beschränkung, dass I der Strom durch einen langen, geradlinigen Leiter sein muss - bezeichnen wir deshalb als **verallgemeinertes Biot-Savart-Gesetz**. Sie wird oft auch **Durchflutungsgesetz** (Ampère's law) genannt und ist eine der vier Maxwell-Gleichungen.

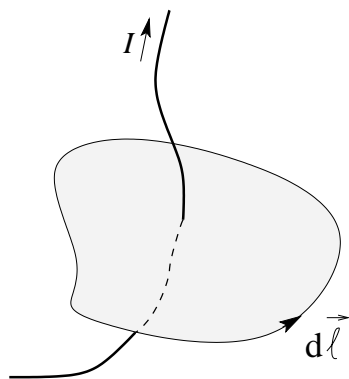


Abbildung 93. Zur Bedeutung des Durchflutungsgesetzes: Für jede geschlossene Kurve (ℓ) um den in einem beliebig gekrümmten Leiter fließenden Strom I gilt Gl.(317). Wegen der Ähnlichkeit mit den Wirbeln in einem Fluid sagt man, dass das Magnetfeld um den Strom wirbelt oder dass die Wirbel des Magnetfeldes durch den Strom bestimmt werden

Ein **Toroid** (toroid) ist eine eng gewickelte Spule, die zu einem Kreis (Radius R) zusammen gebogen wird, so dass die Eingangsfläche der Spule mit der Ausgangsfläche

zusammenfällt. Damit verläuft das Magnetfeld vollständig im Inneren der Spule. Bezeichnen wir den Strom, der im Toroid fließt, mit I , die Anzahl der Windungen mit n und die Länge des Toroids mit $\ell = 2\pi R$, so liefert die Gl.(317) bei einem Umlauf längs der Strecke $\ell = 2\pi R$ für das Magnetfeld

$$H = \frac{nI}{\ell}, \quad (318)$$

denn bei einem solchen Umlauf wird der Strom nI umschlossen. Als **ideale Spule** (ideal solenoid) bezeichnet man eine dünne Spule, die so lang ist, dass die Randeffekte, die an den Enden der Spule auftreten, vernachlässigt werden können. Für das Magnetfeld im Inneren einer derartigen Spule, d.h. weitab von den Enden, gilt dann ebenfalls Gl.(318), da eine solche Spule zu einem Toroid zusammen gebogen werden kann, ohne dass sich an ihrem Magnetfeld im besagten Gebiet etwas ändern darf.

Für das Magnetfeld eines langen, geradlinigen Leiters mit kreisförmigem Querschnitt (Radius R), der homogen von einem Strom I durchflossen wird (dies ist für Gleichströme gewährleistet, während bei Wechselströmen der sog. Skinneffekt zu einer Vergrößerung der Stromdichte an der Oberfläche führt), lässt sich durch Anwendung von Gl.(317) leicht das Magnetfeld im Inneren ($r < R$) und außerhalb ($r > R$) berechnen. Bei einem Umlauf im Inneren gilt für den umfassten Strom $I(r/R)^2$, so dass aus Gl.(317) $H_\phi 2\pi r = I(r/R)^2$ folgt oder $H_\phi = Ir(2\pi R^2)^{-1}$. Das Magnetfeld wächst also linear mit dem Abstand von der Drahtachse an. Bei einem Umlauf außerhalb folgt aus Gl.(317) $H_\phi 2\pi r = I$ oder $H_\phi = I(2\pi r)^{-1}$, d.h. eine Abnahme proportional zu $1/r$.

Ü 101 Ü 102 Ü 103

18.2 Messung von Magnetfeldern, das magnetische Erdfeld

Gemäß der Definition des Vektors \vec{H} (s.S.198) und seiner Einheit durch die Gl.(313), S.198, kann man ein unbekanntes Magnetfeld im Prinzip mit Hilfe einer Magnetnadel und einem Kreisstrom messen: Die nach allen Richtungen drehbar gelagerte Magnetnadel befinde sich im Mittelpunkt des Kreisstromes, dessen Radius R sei. Zunächst fließe kein Strom, so dass die Magnetnadel mit ihrer Spitze die *Richtung* von \vec{H} anzeigt. Dann orientiert man den Kreisstrom in der Weise, dass seine Fläche senkrecht zu dieser Richtung steht und variiert die Stromstärke so lange ($I = I_0$), bis die Magnetnadel kein Drehmoment mehr erfährt (**Kompensationsmethode**, compensation method). Für den *Betrag* von \vec{H} folgt damit aus Gl.(316), S.200, $|\vec{H}| = I_0(2R)^{-1}$.

Die Intensität von Magnetfeldern wird meist nicht in A/m, sondern in der Einheit Tesla (s.u.) angegeben. Dies liegt daran, dass für die Kraftwirkung, wie wir noch zeigen werden, nicht das magnetische Feld \vec{H} , sondern die Größe

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \quad (319)$$

maßgebend ist, die man **magnetische Flussdichte** (magnetic flux density) oder auch **magnetische Induktion** (magnetic induction) nennt.

Da bei der oben beschriebenen Kompensationsmethode zur Messung der magnetischen Feldstärke auf null eingeregelt wird, ist diese Tatsache auf Grund der Proportionalität zwischen magnetischer Feldstärke und magnetischer Flussdichte ohne Bedeutung.

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am ist die schon auf S.167 eingeführte Induktionskonstante und μ_r eine dimensionslose Stoffkonstante, die **relative Permeabilität** oder **Permeabilitätszahl** (relative permeability) genannt wird. Für Vakuum gilt $\mu_r = 1$ und für Luft ist μ_r nur unwesentlich größer ($\mu_{rLu} \approx 1 + 0,4 \cdot 10^{-6}$). Näheres findet man im Abschn. 18.4, S.218ff. Aus Gl.(319) ergibt sich für die Einheit der magnetischen Flussdichte der Quotient Vs/m², für den man die Bezeichnung **Tesla** (Symbol T, Nikola Tesla 1856-1943) eingeführt hat.

Leider findet man in der Literatur oft Aussagen wie "die magnetische Feldstärke beträgt 1 T". Dies ist falsch, denn es handelt sich dabei um ein Feld mit einer magnetischen Flussdichte von 1 T, die, sofern im Vakuum gemessen wurde, einer magnetischen Feldstärke von 1 T / μ_0 oder $10^7(4\pi)^{-1}$ A/m $\approx 0,796 \cdot 10^6$ A/m entspricht.

Den Verlauf der Feldlinien für das **magnetische Erdfeld** (earth's magnetic field) im erdnahen Raum zeigt Abb.94. In größeren Abständen überlagert sich ein Magnetfeld, das von geladenen Teilchen (Protonen, Elektronen) herrührt, die von der Sonnencorona emittiert werden (**Sonnenwind**, solar wind).

Unglücklicherweise hat man in den Anfängen der Magnetostatik die Vereinbarung getroffen, das Gebiet, in dem die magnetischen Feldlinien aus einem Körper austreten, als **magnetischen Nordpol** (north-seeking pole) und analog das Eintrittsgebiet als **magnetischen Südpol** (south-seeking pole) des Körpers zu bezeichnen. Da sich aber eine Magnetnadel in Richtung der magnetischen Feldlinien einstellt und auf der Erde nach Norden zeigt (s.S.198), liegt der magnetische Südpol der Erde in der Nähe des geographischen Nordpols und umgekehrt.

Die auf S.198 definierte "Spitze" der Magnetnadel ist demzufolge ihr magnetischer Nordpol (north-seeking pole). Die Kennzeichnung erfolgt mit dem Buchstaben N oder dem Symbol +. Der magnetische Südpol (south-seeking pole) dagegen erhält den Buchstaben S oder das Zeichen −.

Die magnetischen Pole fallen nicht mit den geographischen Polen, die durch die Erdrotation definiert sind, zusammen. Außerdem ändern sie im Laufe der Zeit auch ihre Lage. Der magnetische Südpol, der gegenwärtig in Nordwestgrönland liegt, hat sich beispielsweise von 1830 bis 1965 um ca. 600 km verschoben. Über Zeiträume von

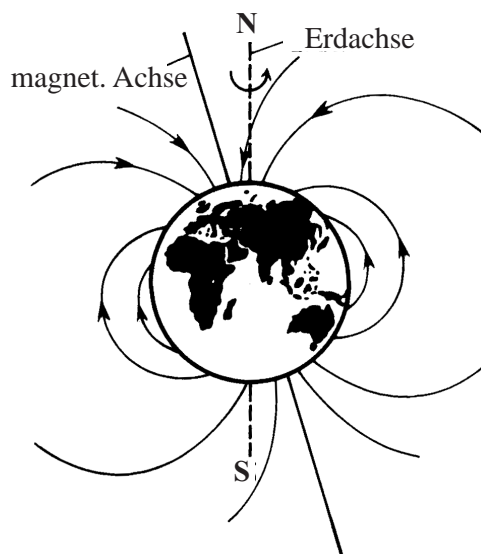


Abbildung 94. Verlauf der magnetischen Feldlinien im erdnahen Raum

Millionen Jahren kommt es zu drastischen Änderungen des magnetischen Erdfeldes, sogar zu Änderungen der Polarität. Die **Deklination** (declination) bezeichnet die Abweichung der Richtung der Magnetnadel vom **Meridian** (meridian), d.h. von der geographischen Nord-Süd-Richtung, wobei eine Abweichung nach Osten das positive Vorzeichen erhält. In der Tab.40 sind einige Zahlenwerte für die Deklination zusammengestellt, die in Freiberg/Sachsen zwischen 1550 und der Jetztzeit gemessen wurden. Als **Inklination** (magnetic dip, inclination) bezeichnet man den Winkel zwischen der Richtung des magnetischen Erdfeldes und der Horizontalen. 1975 betrug die Inklination in Niemegk bei Berlin $76^\circ 5'45''$. Sie nimmt in unseren Breiten gegenwärtig um ca. $36''$ pro Jahr ab.

Tabelle 40. Werte für die Deklination des magnetischen Erdfeldes in Freiberg/Sachsen

Jahr	1550	1650	1800	1900	2000
Deklination	+10°	0°	−18°	−10°	ca. 0°

Aus der **Horizontalintensität** (horizontal component) B_{hor} der magnetischen Flussdichte des Erdfeldes (s.Abb.95) und der Inklination α läßt sich die **Totalintensität** (magnitude) mit Hilfe der Beziehung $B_{\text{tot}} = B_{\text{hor}} / \cos \alpha$ berechnen. Für

unsere Breiten ergibt sich bei einer Horizontalintensität von ca. 20 mT (s.Abb.95) und mit $\alpha = 67^\circ$ ein Wert von ca. 50 μT .

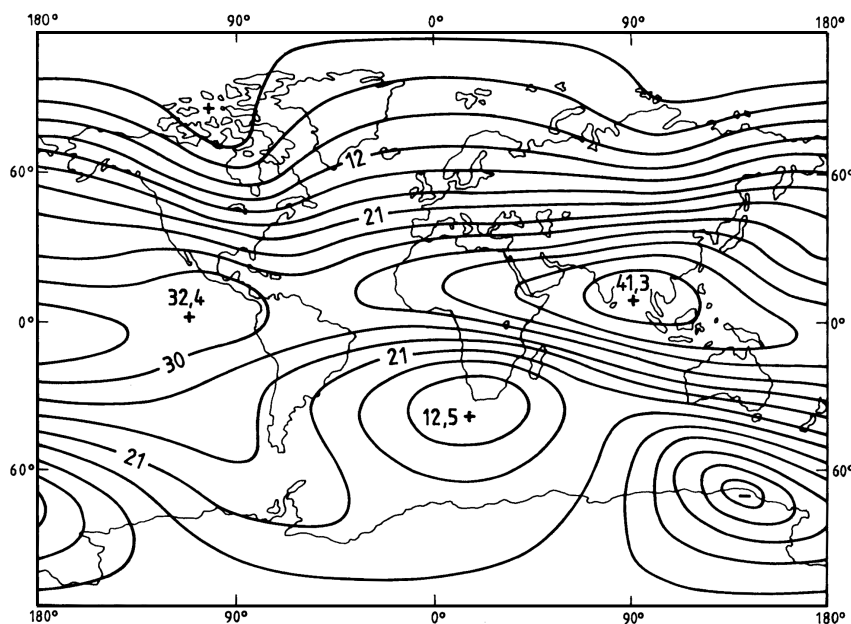


Abbildung 95. Horizontalintensität der magnetischen Flussdichte des Erdfeldes in μT

Zur Messung von Magnetfeldern mit hoher Präzision verwendet man die magnetische Kernresonanz (NMR, nuclear magnetic resonance, s.S.466), mit der man Genauigkeiten von ± 1 nT erreicht, oder den Josephson-Effekt (SQUID, superconducting quantum interference device, s.S.233), durch den Änderungen bis zu $\pm 0,1$ pT messbar werden. Abweichungen des magnetischen Erdfeldes vom Normalwert weisen auf magnetische Erzlagerstätten (z.B. 190 mT im Gebiet von Kursk) oder andere Eisenmassen, wie z.B. auf getauchte Unterseeboote hin. Die Ursachen des magnetischen Erdfeldes sind bis heute noch nicht endgültig geklärt. Wahrscheinlich ist das Erdfeld eine Folge von Strömungen im flüssigen Erdkern (**Dynamotheorie**, geo-magnetic dynamo theory).

Einige Zahlenwerte für die Größenordnung von Magnetfeldern sind in Tab.41 zusammengestellt und in Tab.42 Schutzvorschriften sowie mögliche Störungen durch Magnetfelder.

Den **magnetischen Fluss** (magnetic flux) Φ durch eine vorgegebene Fläche A erhält man dadurch, dass man die Fläche in lauter einzelne Flächenelemente $d\vec{a}$ zerlegt, die-

Tabelle 41. Größenordnung von Magnetfeldern

Vorkommen / Erzeugung	Magnetische Flussdichte
Totalintensität des Erdfeldes	ca. 50 μT
homogene, konstante Magnetfelder, erzeugt durch Gleichströme in Eisenmagneten supraleitenden Magneten	bis ca. 3 T bis ca. 20 T
Impulsfelder, erzeugt durch Entladung von Kondensatoren und / oder Zusammenpressen des Spulenquerschnitts durch Sprengladungen	einige hundert T
Oberfläche von Neutronensternen	ca. 100 MT

Tabelle 42. Schutzvorschriften bei Magnetfeldern und mögliche Störungen

Magnetische Flussdichte	Schutzvorschrift	Störungen
0,05 mT 0,3 mT ab 0,5 mT ab 1 mT ab 30 mT	keine keine kein Zutritt für Träger von Herz- schrittmachern Zutritt nur für Laborpersonal	bei speziellen Labormessungen bei Farbbildschirmen bei Schwarz-Weiß-Bildschirmen Löschen von Kreditkarten, Beeinträchtigung von Uhren, Löschen von Magnetbändern, Löschen von Disketten

se mit der jeweils dort herrschenden magnetischen Flussdichte \vec{B} skalar multipliziert und alle diese Produkte summiert, d.h. über die Fläche A integriert:

$$\Phi = \int_{(A)} \vec{B} \cdot d\vec{a}. \quad (320)$$

Für die Einheit $\text{Tm}^2 = \text{Vs}$ hat man die Bezeichnung **Weber** (Symbol Wb, Wilhelm Eduard Weber 1804-1891) eingeführt.

Der magnetische Fluss durch die von einem supraleitenden Ring aufgespannte Fläche ist 1.) unabhängig von der Stärke eines äußeren Magnetfeldes (dieses ändert lediglich den Ringstrom, aber nicht den Fluss durch den Ring) und 2.) quantisiert, d.h. ein ganzzahliges Vielfaches des **magnetischen Flussquants** (magnetic flux quantum) $\Phi_0 = h/2e = 2,067833636(81) \cdot 10^{-15} \text{ Wb}$ [COD98]. Diese Eigenschaften des magnetischen Flusses können ausgenutzt werden, um in einem gewissen Volumen das Magnetfeld nicht nur näherungsweise, sondern exakt gleich null zu machen (**magnetisches Nullfeld**, magnetic zero field): Wir betrachten mehrere konzentrische ausdehnbare Ringe aus supraleitendem Material und gehen in folgenden Schritten vor. 1. Schritt: Die Ringe sind

zunächst noch normalleitend und nehmen die kleinstmögliche Fläche ein. Das Magnetfeld wird klassisch abgeschirmt, so dass die magnetische Flussdichte nur einige wenige mT beträgt. 2. Schritt: Der äußerste Ring wird durch Abkühlung supraleitend gemacht und danach sein Durchmesser vergrößert. Da der magnetische Fluss dabei konstant bleiben muss, verringert sich die magnetische Flussdichte $B = \Phi/A$ entsprechend der Vergrößerung der Fläche A . Im 3. Schritt wird dieselbe Prozedur mit dem nächstinneren Ring durchgeführt usw., bis schließlich der Fluss durch den letzten Ring kleiner als Φ_0 und damit exakt zu null wird. Um ein feldfreies *Volumen* zu erhalten, muss man an Stelle der Ringe aufblasbare Ballons (beschichtet z.B. mit Niob als supraleitendem Material) verwenden.

18.3 Induktion

18.3.1 Das Induktionsgesetz

Eine kleine Spule, die wir im Folgenden Induktionsspule nennen wollen, besitze die Windungszahl n und die Fläche A . Sie sei mit einem Verstärker verbunden, dessen Ausgangssignal $S(t)$ proportional dem Zeitintegral über den Spulenstrom I ist:

$$S(t) \propto \int_0^t I(t') dt'. \quad (321)$$

Einen solchen Verstärker bezeichnet man als **Integrationsverstärker** (integrator oder integrating amplifier).

An Stelle eines Integrationsverstärkers verwendete man früher ein sog. **ballistisches Galvanometer** (ballistic galvanometer). Bei diesem Galvanometertyp erzeugt ein Stromimpuls der Dauer t einen stoßartigen Ausschlag, dessen Amplitude proportional zu dem Integral $\int_0^t I(t') dt'$ ist. Allerdings muss die Bedingung $t \ll T$ erfüllt sein, wobei T die Eigenschwingungsdauer des Galvanometers bezeichnet.

Nun bringen wir die Induktionsspule in das Innere einer zweiten Spule (Feldspule), deren Magnetfeld \vec{H} durch den Spulenstrom z.Zt. $t = 0$ eingeschaltet wird. Durch entsprechende Experimente mit gezielter Veränderung der Versuchsparameter lässt sich dann zeigen, dass $S \propto nBA \cos \vartheta$ gilt, wobei ϑ den Winkel zwischen der magnetischen Flussdichte $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$ und der Normalen auf der Fläche A bezeichnet. Unter Verwendung des Skalarprodukts (s.S.21) lässt sich dieses Ergebnis in der Form $S \propto n \int_{(A)} \vec{B} \cdot d\vec{a}$ schreiben. Schaltet man nun noch in Reihe mit der Induktionsspule einen veränderlichen Widerstand R_v , so dass der Gesamtwiderstand R der Anordnung, der sich aus R_v sowie dem Ohm'schen Widerstand der Spule und dem des Verstärkereingangs zusammensetzt, variiert werden kann, dann findet man $S \propto n \int_{(A)} \vec{B} \cdot d\vec{a} / R$. Mit der Gl.(321) und dem Ohm'schen Gesetz ($U = RI$) folgt

schließlich die Beziehung $\int_0^t U(t') dt' \propto n \int_{(A)} \vec{B} \cdot d\vec{a}$ oder, da im SI die Einheiten so gewählt wurden, dass der Proportionalitätsfaktor gleich 1 ist,

$$U = + \frac{d}{dt} \left(n \int_{(A)} \vec{B} \cdot d\vec{a} \right). \quad (322)$$

Diese Beziehung wird **Induktionsgesetz** (Faraday's law of induction, Michael Faraday 1791-1867) genannt und ist eine weitere der vier Maxwell-Gleichungen. Aus Gl.(322) geht hervor, dass eine Induktionsspannung nicht nur durch eine Zeitabhängigkeit von \vec{B} , sondern auch durch eine solche von n oder der Fläche A entsteht. Das positive Vorzeichen in Gl.(322) hängt mit der auf S.190 getroffenen Festlegung zur Bedeutung der Pfeilrichtung bei einer Spannung U zusammen:

Die Wirkung der magnetischen Induktion lässt sich durch eine Ersatzstromquelle darstellen, deren Urspannung U_i (s.S.194) durch Gl.(322) gegeben wird ($U_i = U$) und deren Pfeilrichtung mit $d\vec{a}$ eine Rechtsschraube bildet.

Damit schwächt das durch den Induktionsstrom erzeugte Magnetfeld die Feldänderung, die die Ursache des Induktionsstromes ist:

Die Wirkung bremst die Ursache.

(**Lenz'sche Regel**, Lenz's law, Heinrich Friedrich Emil Lenz 1804-1865).

Als Beispiel betrachten wir eine Leiterschleife in der Zeichenebene und legen als positive Richtung des Flächenelementes $d\vec{a}$ diejenige fest, die aus der Zeichenebene heraus zeigt (s.Abb.96). Wenn jetzt die magnetische Flussdichte im Zeitintervall dt um $d\vec{B}$ anwächst und die Komponente von $d\vec{B}$ in Richtung von $d\vec{a}$ positiv ist, ergibt sich aus Gl.(322) für die Spannung der Ersatzstromquelle $U > 0$. Da der Spannungspfeil von U mit $d\vec{a}$ eine Rechtsschraube bilden muss und da U größer als null ist, fließt in der Leiterschleife ein Induktionsstrom im Uhrzeigersinn, d.h. entgegen zur Richtung von $d\vec{\ell}$ in Abb.96. Nach der Korkenzieherregel (s.S.199) erzeugt dieser Strom innerhalb der Leiterschleife ein Magnetfeld, das in die Zeichenebene hinein gerichtet ist und demzufolge $d\vec{B}$ schwächt. Wenn für $d\vec{a}$ die positive Richtung in die Zeichenebene hinein gewählt wird, ergibt sich zwar $U < 0$, aber gleichzeitig auch eine Umkehrung des Spannungspfeils, so dass der Induktionsstrom wiederum im Uhrzeigersinn fließt und damit $d\vec{B}$ schwächt.

Wir betrachten jetzt eine Leiterschleife mit einer Windung ($n = 1$), die in der Zeichenebene liege und wählen als positive Richtung von $d\vec{a}$ diejenige, die aus der Zeichenebene heraus zeigt (s.Abb.96).

Die Pfeilrichtung der Ersatzstromquelle U muss mit $d\vec{a}$ eine Rechtsschraube bilden und zeigt deshalb in Abb.96 von 2 nach 1. Nennen wir \vec{E} die elektrische Feldstärke längs der Leiterschleife, so gilt gemäß Gl.(267), S.170, $U = U_2 - U_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ und, wenn wir noch $\oint_{(\ell)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ für $\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ schreiben, so folgt $U = - \oint_{(\ell)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$. Einsetzen

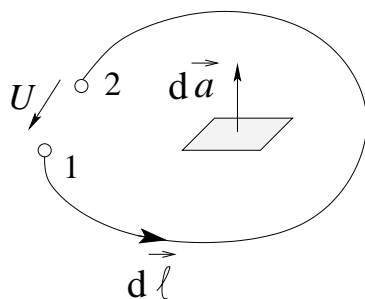


Abbildung 96. Zur Erläuterung der Ableitung der Lenz'schen Regel aus Gl.(322), S.208, bzw. zur Ableitung von Gl.(323) aus Gl.(322) für $n = 1$

dieser Beziehung in die Gl.(322) liefert, wegen $n = 1$, das Induktionsgesetz in der Form

$$\oint_{(\ell)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_{(A)} \vec{B} \cdot d\vec{a}, \quad (323)$$

wobei $d\vec{\ell}$ mit $d\vec{a}$ eine Rechtsschraube bilden muss (s.Abb.96). Ü 104

18.3.2 Die Lorentz-Kraft

Wir beginnen mit folgendem Gedankenexperiment: Die Leiterschleife in Abb.97 werde senkrecht von einer magnetischen Flussdichte \vec{B} durchsetzt, die auf den Betrachter zu gerichtet sei. Es gilt also $B_x = B_y = 0$ und $B_z > 0$. Der bewegliche Drahtbügel,

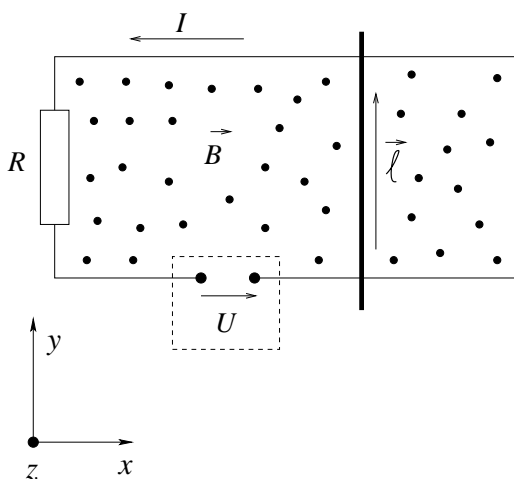


Abbildung 97. Zur Ableitung der Formel für die Lorentz-Kraft. Durch die Punkte (*Spitzen von Pfeilen*) wird angedeutet, dass die magnetische Flussdichte \vec{B} aus der Zeichenebene heraus gerichtet ist. Die entgegengesetzte Richtung würde durch kleine Kreuze (\times , *Federn am Ende der Pfeile*) gekennzeichnet. Die Ersatzstromquelle, durch die die Wirkung der Induktion beschrieben wird, ist gestrichelt eingezeichnet

charakterisiert durch den Längenvektor $\vec{\ell}$ mit $\ell_x = \ell_z = 0$ und $\ell_y > 0$, werde mit der konstanten Geschwindigkeit v_x von x bis $x + \Delta x$ verschoben. Wählen wir für das Flächenelement $d\vec{a}$ der Leiterschleife die Richtung aus der Zeichenebene heraus, d.h. $da_x = da_y = 0$ und $da_z > 0$, so folgt aus Gl.(322), S.208, $U = +B_z \ell_y v_x$. Da die Pfeilrichtung der Ersatzstromquelle (die in Abb.97 gestrichelt eingezeichnet ist) mit $d\vec{a}$ eine Rechtsschraube bilden muss, entsteht ein Induktionsstrom, der die Leiterschleife im Uhrzeigersinn durchfließt. Mit der in Abb.97 gewählten Pfeilrichtung für den Strom folgt also $I = -B_z \ell_y v_x / R$. Dieser Strom erzeugt in dem Widerstand R die Wärmeenergie $I^2 R \Delta t$ mit $\Delta t = \Delta x / v_x$ (Joule-Wärme, s.S.197), die gleich der Arbeit sein muss, die der Experimentator beim Verschieben des Leiterstücks zu verrichten hat. Damit folgt für die Kraft, die ein Magnetfeld mit der Flussdichte \vec{B} auf ein Leiterstück $\vec{\ell}$ ausübt, das von einem Strom I in Richtung von $\vec{\ell}$ durchflossen wird,

$$\vec{F} = I \vec{\ell} \times \vec{B}. \quad (324)$$

Diese Kraft wird als **Lorentz-Kraft** (Lorentz force, Hendrik Antoon Lorentz 1853-1928) bezeichnet.

Um den Drahtbügel der Länge ℓ_y von x nach $x + \Delta x$ zu bewegen, muss der Experimentator die Arbeit $F_x^{(e)} \Delta x = -F_x \Delta x$ verrichten, wenn wir mit F_x die vom System ausgeübte Kraft (s.S.21) bezeichnen. Diese Arbeit findet sich in der Wärmeenergie $I^2 R \Delta t$ wieder, für die man mit $I = -B_z \ell_y v_x / R$ und $\Delta t = \Delta x / v_x$ den Ausdruck $B_z^2 \ell_y^2 v_x R^{-1} \Delta x$ erhält. Durch Einführen des Stromes I vereinfacht sich dieser Ausdruck zu $-B_z \ell_y I \Delta x$. Gleichsetzen mit $-F_x \Delta x$ ergibt die Beziehung $F_x = I \ell_y B_z$ oder, als Vektorprodukt (s.S.11) geschrieben, $\vec{F} = I \vec{\ell} \times \vec{B}$.

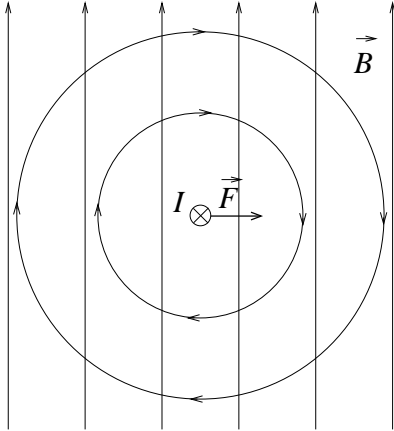


Abbildung 98. Zur anschaulichen Interpretation der Richtung der Lorentz-Kraft. Das Kreuz zeigt an, dass der Strom in die Zeichenebene hinein gerichtet ist. Auf Grund des Biot-Savart-Gesetzes (Korkenzieherregel) vergrößert der Strom die Feldliniendichte links, während sie rechts geringer wird. Da gemäß Gl.(324) die Lorentz-Kraft nach rechts zeigt, entspricht dies der Richtung vom Gebiet hoher nach niedriger Feldliniendichte

Man kann sich die Richtung der Lorentz-Kraft mit Hilfe des Feldlinienbildes leicht merken. In der Abb. 98 fließt ein elektrischer Strom senkrecht zur Zeichenebene und in diese hinein. Das von diesem Strom erzeugte Magnetfeld (Korkenzieherregel, s.S. 199) erhöht links die Dichte der Feldlinien und verringert sie rechts. Andererseits ist die Lorentz-Kraft gemäß Gl. (324) nach rechts gerichtet, woraus man ersieht, dass ein *elektrischer Strom aus dem Gebiet hoher Feldliniendichte herausgedrückt wird*.

Zwei lange, gerade Leiter mit der Länge ℓ , die parallel zueinander im Abstand r verlaufen und die von dem gleichen Strom I in derselben Richtung durchströmt werden, erzeugen jeweils beim anderen Leiter ein Magnetfeld $H_\phi = I(2\pi r)^{-1}$ (s. Gl. (313), S. 198). Aus Gl. (324), S. 210, folgt damit, dass sie sich im Vakuum mit der Kraft $F_r = -I^2 \ell \mu_0 (2\pi r)^{-1}$ anziehen. Kehrt man die Stromrichtung in einem der beiden Leiter um, so erfolgt eine Abstoßung, d.h. es gilt $F_r = +I^2 \ell \mu_0 (2\pi r)^{-1}$. Für den Betrag der Kraft pro Drahtlänge ergibt sich also mit $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ (s.S. 167) $|F_r/\ell| = 2 \cdot 10^{-7} I^2/r$. Diese Beziehung wird zur **Definition des Ampere** verwendet:

Das Ampere ist derjenige Gleichstrom, der in zwei geraden, parallel im Abstand von 1 m im Vakuum verlaufenden Leitern unendlicher Länge und mit vernachlässigbar kleiner Querschnittsfläche eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ Newton pro Meter Länge erzeugt.

Die Bedingung "vernachlässigbar kleine Querschnittsfläche" ist notwendig, da wegen der Lorentz-Kraft in benachbarten Leitern mit endlichem Querschnitt die Stromverteilung nicht homogen ist (**Proximity-Effekt**, proximity effect).

Eine einlagige Drahtschleife der Fläche A , die von einem Strom I durchflossen wird, erfährt in einem Magnetfeld mit der Flussdichte \vec{B} ein Drehmoment

$$\vec{T} = \vec{m}_I \times \vec{B}. \quad (325)$$

Der Vektor \vec{m}_I hat die Einheit Am^2 und wird **magnetisches Moment** (magnetic moment) genannt. Sein *Betrag* ist gleich dem Produkt aus Strom und Fläche (IA). Seine *Richtung* wird durch die Senkrechte auf A gegeben, und zwar so, dass der Strom I und diese Richtung eine Rechtsschraube bilden.

Wir beweisen die Gl. (325) für den Spezialfall, dass die Fläche ein Rechteck mit den Kantenlängen ℓ und b ist. Die Drehachse soll parallel zu den Kanten ℓ verlaufen und die Kanten b halbieren. Wenn dann die Senkrechte auf dieser Fläche mit der Flussdichte \vec{B} den Winkel α bildet, erfährt das Rechteck ein Drehmoment \vec{T} (zur Definition des Drehmomentes s.S. 40), dessen Betrag sich aus Gl. (324), S. 210, zu $2I\ell B \cdot (b/2) \sin \alpha$ oder $IA \sin \alpha$ ergibt. Mit Hilfe einer kleinen Skizze lässt sich außerdem leicht zeigen, dass die Richtung des Drehmomentes ebenfalls in Übereinstimmung mit Gl. (325) steht.

Die Tatsache, dass das Drehmoment linear mit dem Strom anwächst, wird beim **Drehspulinstrument** (moving-coil galvanometer) zur Messung von Strömen oder, nach Vor-schalten entsprechend hoher Widerstände, zur Spannungsmessung verwendet.

Für das Drehmoment, das ein elektrischer Dipol \vec{p} in einem elektrischen Feld \vec{E} erfährt, hatten wir auf S.179 die Gl.(282) $\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E}$ abgeleitet. Um im obigen Fall (Gl.325) das Drehmoment mit dem *Magnetfeld* \vec{H} zu verknüpfen, führt man das **magnetische Dipolmoment** (magnetic dipole moment) durch die Beziehung

$$\vec{p}_m = \mu_0 \vec{m}_I \quad (326)$$

ein, so dass auf Grund der Gl.(319), S.203, im Vakuum ($\mu_r = 1$)

$$\vec{T} = \vec{p}_m \times \vec{H} \quad (327)$$

folgt. Da \vec{m}_I die Einheit Am^2 besitzt, ergibt sich die Einheit des magnetischen Dipolmomentes aus Gl.(326) zu Vsm .

Aus der Gl.(324), S.210, lässt sich die Lorentz-Kraft auf eine bewegte Punktladung q ableiten. Das Leiterstück $\vec{\ell}$, das von dem Strom I in der positiven Richtung durchflossen wird, besitze die Querschnittsfläche A . Die Ladungsträger, von denen wir annehmen, dass ihre Ladung q positiv sei, müssen sich damit ebenfalls in $\vec{\ell}$ -Richtung bewegen. Ihre Geschwindigkeit in dieser Richtung sei \vec{v} und ihre Dichte, d.h. ihre Anzahl pro Volumen, sei c_q . Dann treten in der Zeit Δt gerade $c_q A \cdot (v \Delta t)$ Teilchen durch die Querschnittsfläche A und es folgt für den Strom I gemäß der Definition von S.189

$$I = c_q A v q. \quad (328)$$

Nennen wir \vec{F} die Lorentz-Kraft auf das Leiterstück $\vec{\ell}$, so erhalten wir für die Kraft \vec{F}_q auf *einen* Ladungsträger $\vec{F}_q = \vec{F} / (c_q A \ell)$, oder nach Einsetzen der Gl.(324), S.210, und unter Beachtung der Gl.(328)

$$\vec{F}_q = q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (329)$$

Als eine *erste Anwendung* dieser Formel betrachten wir den **Hall-Effekt** (Hall effect, Edwin Herbert Hall 1855-1938). Durch ein leitendes Plättchen der Breite y_0 und der Dicke z_0 (s.Abb.99) fließe in der positiven x -Richtung ein Strom I , der von positiven Ladungsträgern mit der Ladung q gebildet werde. Die Konzentration dieser Ladungsträger sei c_q und ihre Geschwindigkeit v_x . Senkrecht zu diesem Plättchen wird ein Magnetfeld mit der Flussdichte B_z angelegt. Dann wirkt auf jeden Ladungsträger gemäß Gl.(329) die Lorentz-Kraft $F_y = -q v_x B_z$. Die durch diese Kraft verursachte Bewegung der Ladungsträger in die negative y -Richtung kommt zum Stillstand, wenn das durch den Ladungsüberschuss entstehende elektrische Feld E_y so groß geworden ist, dass die elektrische Kraft $q E_y$ die Lorentz-Kraft kompensiert. Ersetzen wir noch E_y durch U_H / y_0 , wobei U_H die sich ausbildende Spannung (Hall-Spannung) zwischen den Kanten bei $y = 0$ und $y = y_0$ bezeichnet, so folgt

$$U_H = v_x B_z y_0. \quad (330)$$

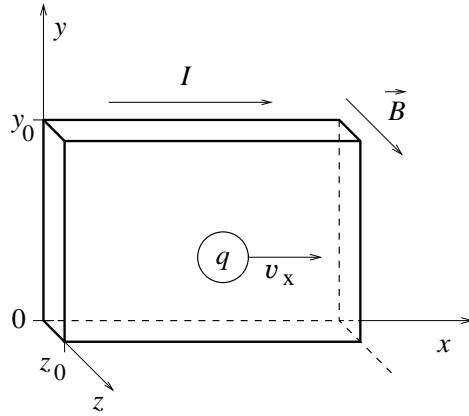


Abbildung 99. Durch ein leitendes Plättchen der Breite y_0 und der Dicke z_0 fließt ein Strom I positiver Ladungsträger in der positiven x -Richtung. Senkrecht dazu wird ein magnetisches Feld mit der Flussdichte B_z angelegt. Dadurch bildet sich zwischen der unteren ($y = 0$) und der oberen ($y = y_0$) Kante eine Spannung U_H aus (Hall-Effekt)

Wenn der Strom I von Ladungsträgern gebildet wird, die eine negative Ladung ($q < 0$) besitzen, so kehrt sich das Vorzeichen von U_H um, da die Ladungsträger in die negative x -Richtung wandern ($v_x < 0$). Diese Tatsache wird verwendet, um festzustellen, ob der Strom in dem leitenden Plättchen von negativen (Elektronen) oder positiven (Defektelektronen) Ladungsträgern gebildet wird. Die Gl.(330) lässt sich unter Verwendung von Gl.(328), S.212, mit $A = z_0 y_0$ und $v_x = v$ umschreiben in

$$U_H = \frac{1}{qc_q} \frac{IB_z}{z_0}. \quad (331)$$

Der Faktor $1/(qc_q)$ wird als **Hall-Koeffizient** (Hall coefficient) bezeichnet. Da in Metallen die Konzentration der Ladungsträger (Elektronen) erheblich größer ist als in Halbleitern (Elektronen und/oder Defektelektronen), erklärt Gl.(331), weshalb Halbleiter für eine Beobachtung bzw. Anwendung des Hall-Effektes wesentlich besser geeignet sind. Bei Zimmertemperatur beispielsweise ist der Hall-Koeffizient von Kupfer ($-5,5 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{As}$) um vier Größenordnungen kleiner als der von Wismut ($-5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{As}$). Da die Hall-Spannung proportional zur magnetischen Flussdichte ist, verwendet man **Hall-Sonden** (Hall probes), die mitunter auch **Hall-Generatoren** (Hall generators) genannt werden, zur einfachen Messung von Magnetfeldern.

Unseren bisherigen Überlegungen zufolge hängt die Hall-Spannung linear von der magnetischen Flussdichte ab. Bei sehr tiefen Temperaturen und extrem starken Magnetfeldern gilt diese Proportionalität jedoch nicht mehr. Es zeigt sich vielmehr, dass der Quotient U_H/I , der **Hall-Widerstand** (Hall resistance) genannt wird, nur die diskreten Werte R_K/n mit $n = 1, 2, 3, \dots$ und $R_K = h/e^2 = 25812,807572(95) \Omega$ [COD98] (**von-Klitzing-**

Konstante, quantized Hall resistance, Klaus von Klitzing, geb.1943) annehmen kann. Diese Erscheinung wird als **Quanten-Hall-Effekt** (quantum Hall effect) bezeichnet. Sie hängt mit der Quantisierung des magnetischen Flusses zusammen, der die Kreisbahnen durchsetzt, die von den Elektronen unter dem Einfluss des magnetischen Feldes durchlaufen werden. Wegen der extremen Genauigkeit, mit der die Größe R_K bekannt ist, lässt sich R_K als Widerstandsnormale verwenden. Neuere Untersuchungen haben gezeigt, dass n auch gebrochen rationale Werte annehmen kann.

Als eine zweite Anwendung der Gl.(329) seien die **Wirbelströme** (eddy currents) erwähnt. Wenn man ein Leiterblech durch ein inhomogenes Magnetfeld bewegt, so werden in dem Blech Ströme induziert, die man Wirbelströme nennt und deren Wechselwirkung mit dem Magnetfeld (Lorentz-Kraft) zu einer Bremswirkung führt. In Abb.100 soll die magnetische Flussdichte B_z in der positiven x -Richtung anwachsen und das Leiterblech, das in der x - y -Ebene liegt, mit der konstanten Geschwindigkeit $v_x > 0$ bewegt werden. Wählen wir für die Orientierung des Flächenelementes $d\vec{a}$ die positive z -Richtung, so wächst der magnetische Fluss $\int_{(A)} \vec{B} \cdot d\vec{a}$ durch jede beliebige Teilfläche mit der Zeit an und nach dem auf S.208 Gesagten folgt, dass der Induktionsstrom diese Teilfläche im Uhrzeigersinn umfließen muss (s.Abb.100). Die Lorentz-Kraft nach Gl.(324), S.210, ist also nach dem Inneren der Teilfläche gerichtet. Da aber rechts, d.h. für größere Werte von x , die magnetische Flussdichte größer ist als links, entsteht eine resultierende Kraft in $-x$ -Richtung, was besagt, dass die Wirbelströme die sie verursachende Bewegung bremsen. Zum gleichen Ergebnis wären wir auch unmittelbar durch Anwendung der Lenz'schen Regel (s.S.208) gekommen.

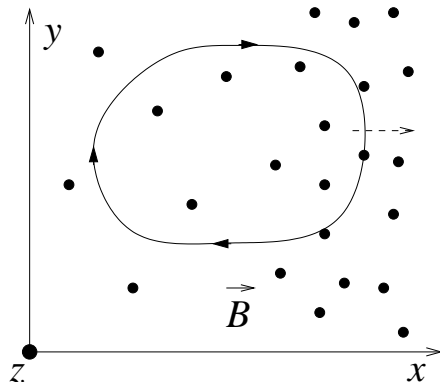


Abbildung 100. Zur Entstehung von Wirbelströmen bei der Bewegung eines Leiterblechs in einem inhomogenen Magnetfeld. Das Leiterblech wird in x -Richtung bewegt, d.h. in der Richtung, in der die magnetische Flussdichte B_z anwächst

Die Wirbelströme finden technische Anwendung bei den **Wirbelstrombremsen** (short-circuit brakes), zur Erzeugung kuppelnder Drehmomente (**Tachometer**, speedometer, **kWh-Zähler**, electricity meter oder meter box) oder bei der **induktiven Erwärmung** (induction heating). In der Wechselstromtechnik sind sie aber

meist schädlich, da die von ihnen erzeugte Joule-Wärme einen unerwünschten Verlust an elektrischer Energie darstellt. Deshalb werden in Transformatoren, Elektromotoren und Generatoren die Wirbelstrombahnen durch Lamellierung räumlich begrenzt.

Ü 105

Ü 106

Ü 107

18.3.3 Selbstinduktion

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde davon ausgegangen, dass die magnetische Flussdichte, die Ursache der Induktionsspannung ist, von einer anderen Spule (Feldspule) erzeugt wird oder irgendeine andere Ursache hat, wie z.B. das magnetische Erdfeld. Da aber jede stromdurchflossene Spule selbst ein Magnetfeld erzeugt, das wir in diesem Abschnitt \vec{H}_s nennen wollen und das nach dem Durchflutungsgesetz (s.Gl.(317), S.201) die gleiche Zeitabhängigkeit besitzen muss wie der Strom I (dies gilt allerdings nur im Nahfeld, s.S.281), führt jeder zeitabhängige Strom zu einer zusätzlichen Induktionsspannung in der Spule. Diese Erscheinung nennt man **Selbstinduktion** (self-induction). Mit $\vec{B}_s = \mu_r \mu_0 \vec{H}_s$ (s.Gl.(319), S.203) folgt für die Selbstinduktionsspannung durch Anwendung der Gl.(322), S.208, die Beziehung

$$U = + \frac{d}{dt} \left(n \int_{(A)} \vec{B}_s \times d\vec{a} \right), \quad (332)$$

wobei die Pfeilrichtung der Ersatzstromquelle, deren Urspannung U ist, mit $d\vec{a}$ eine Rechtsschraube bilden muss. Wegen der strengen Proportionalität zwischen \vec{H}_s und I (s.Gl.(317), S.201) und unter der Annahme, dass die relative Permeabilität μ_r des Stoffes, der die Spule ausfüllt, nicht von der magnetischen Feldstärke abhängt (dies ist nicht immer gewährleistet, s.S.222ff.), ist \vec{B}_s auch proportional zu I und man kann dann Gl.(332) umschreiben zu

$$U = +L \frac{dI}{dt}. \quad (333)$$

Die Größe L wird als **Induktivität** (inductance) der Spule bezeichnet. Sie hängt nur von der Geometrie der Spule ab und ist proportional zur relativen Permeabilität μ_r des Stoffes, der die Spule ausfüllt. Die Einheit der Induktivität ergibt sich aus der Definitionsgleichung (333) zu Vs/A, wofür man die Bezeichnung **Henry** (Symbol H, Joseph Henry 1797-1878) eingeführt hat.

Die beiden Gln.(332) und (333) können zusammen mit dem Durchflutungsgesetz zur Berechnung von Induktivitäten verwendet werden. Auf diese Weise erhält man beispielsweise für die Induktivität der idealen Spule die Formel

$$L = \mu_r \mu_0 \frac{n^2 A}{\ell}. \quad (334)$$

Für das Magnetfeld der idealen Spule gilt (s.Gl.(318), S.202) $H_s = nI/\ell$. Damit folgt für die magnetische Flussdichte (s.Gl.(319), S.203) $B_s = \mu_r \mu_0 nI/\ell$ und nach Einsetzen in die Gl.(332) $U = d[n\mu_r \mu_0 (nI/\ell)A]/dt$ oder $U = (n^2 \mu_r \mu_0 A/\ell)dI/dt$. Durch Vergleich mit der Definitionsgleichung (333) ergibt sich damit die gesuchte Gl.(334). Eine Luftspule von 0,1 m Länge mit 1000 Windungen und einer Querschnittsfläche von $(0,01)^2 \text{ m}^2$ besitzt gemäß dieser Formel eine Induktivität von $4\pi \cdot 10^{-4} \text{ H}$, d.h. von ca. 1 mH.

Eine andere Möglichkeit zur Berechnung von Induktivitäten werden wir noch auf S.218 kennen lernen. Mit ihrer Hilfe kann die Induktivität beliebiger Drahtverläufe einschließlich der von geraden Leiterstücken berechnet werden.

Da beim idealen *Abschalten eines Stromes* die Stromstärke sprunghaft auf den Wert null sinken muss, würde die Ableitung dI/dt und damit nach Gl.(333) die Induktionsspannung unendlich groß werden. Dies ist im Prinzip auch richtig, jedoch bildet sich durch die große Induktionsspannung beim Abheben des Schalterkontakts ein Funke, so dass der Strom nicht sprunghaft auf null zurückgeht. Abgesehen von der Tatsache, dass durch derartig hohe Abschaltspannungen Schäden, wie z.B. Kurzschlüsse in der Wicklung eines Elektromagneten, entstehen können, führt die Funkenbildung bei wiederholtem Schalten zu einer Korrosion der Kontakte. Deshalb legt man parallel zu dem Schalter einen geeigneten Widerstand, wie z.B. einen Varistor (s.Abb.83e, S.191) oder auch eine einfache Glühlampe, die allerdings eine entsprechend hohe Betriebsspannung besitzen muss.

Wir wollen jetzt den Strom $I(t)$ berechnen, der beim Anlegen einer Gleichspannung U_b an die Serienschaltung eines Ohm'schen Widerstandes R und einer Induktivität L fließt (**Einschaltvorgang**, switch on process). In Abb.101 werde der Schalter S zum Zeitpunkt $t = 0$ von der Stellung 0 nach 1 umgelegt. Auf Grund der Kirchhoff'schen Maschenregel (s.S.193) $RI + LdI/dt - U_b = 0$ folgt dann

$$I(t) = \frac{U_b}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right] \quad (335)$$

Da U_b und R nicht von der Zeit abhängen, lässt sich die Differentialgleichung $RI + LdI/dt - U_b = 0$ in der Form $Ld(I - U_b/R)/dt = -R(I - U_b/R)$ schreiben. Mit $y = (I - U_b/R)$ folgt $dy/dt = -(R/L)y$. Durch *Trennung der Variablen* ergibt sich daraus $dy/y = -(R/L)dt$. Die Integration dieser Beziehung liefert $\ln(y/y_0) = -(R/L)(t - t_0)$ oder, wegen $t_0 = 0$, den Ausdruck $y = y_0 \exp(-Rt/L)$. Ersetzen wir hier noch y durch $I - U_b/R$ und beachten, dass $I = 0$ für $t = 0$ gelten muss, so folgt die gesuchte Gl.(335).

Der Quotient L/R wird **Zeitkonstante** (time constant) des Einschaltvorganges genannt.

Irgendwann, nachdem der Strom I seinen Endwert U_b/R erreicht hat, legen wir den Schalter S von der Stellung 1 nach 2 um. Diesen Zeitpunkt nennen wir jetzt $t = 0$. Dann gilt für $t \geq 0$ (**Ausschaltvorgang**, switch off process) auf Grund der

Kirchhoff'schen Maschenregel (s.S.193) $RI + LdI/dt = 0$. Daraus folgt, analog zur Ableitung von Gl.(335),

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \quad \text{mit} \quad I_0 = \frac{U_b}{R}. \quad (336)$$

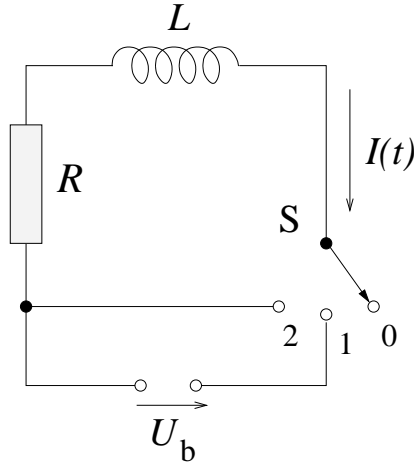


Abbildung 101. Zur Berechnung des Stromes $I(t)$, der durch die Serienschaltung eines Ohm'schen Widerstandes R und einer Induktivität L fließt. (a) Einschaltvorgang: Der Schalter S wird von der Stellung 0 nach 1 umgelegt. (b) Ausschaltvorgang: Der Schalter wird, nachdem der Strom den Endwert U_b/R erreicht hat, von der Stellung 1 nach 2 umgelegt

Der Strom nimmt also exponentiell ab, und zwar mit der gleichen Zeitkonstanten L/R wie beim Einschaltvorgang. A 81 A 82

Die Gl.(336) kann benutzt werden, um eine zweite Formel zur Berechnung von Induktivitäten abzuleiten. In dem Ohm'schen Widerstand R wird beim Ausschaltvorgang Joule-Wärme erzeugt, für die auf Grund von Gl.(311), S.197, gilt $W = \int_0^\infty R I^2 dt$. Einsetzen der Gl.(336) liefert nach einer einfachen Integration die Beziehung

$$W = LI_0^2/2. \quad (337)$$

Diese Energie muss vor dem Umlegen des Schalters S von 1 nach 2 als magnetische Energie in der vom Strom I_0 durchflossenen Spule mit der Induktivität L enthalten sein. Da sich aber andererseits diese Energie auch analog zu der Gl.(279), S.177, berechnen lässt, indem man \vec{E} durch \vec{H} und \vec{D} durch \vec{B} ersetzt (s.S.219), liefert die Gleichsetzung

$$L = I_0^{-2} \int_{(V)} \vec{H} \cdot \vec{B} d\tau \quad (338)$$

mit $d\tau$ als Volumenelement.

Für die Induktivität eines geraden zylindrischen Leiterstücks mit dem Radius R und der Länge ℓ ergibt sich unter den Voraussetzungen $\ell \gg R$ und $\mu_r = 1$ die Beziehung [PFE77] $L = \mu_0(2\pi)^{-1}\ell [\ln(2\ell/R) - 0,75]$. Dies bedeutet, dass ein Drahtstück der Länge $\ell = 0,01$ m und mit einem Radius $R = 5 \cdot 10^{-4}$ m eine Induktivität von ca. 6 nH besitzt.

Ü 108

Ü 109

Ü 110

A 83

18.4 Magnetostatik

Bringt man Materie in ein Magnetfeld, so werden in den Elektronenhüllen der Atome und Moleküle **innere Ströme** (internal currents, s. Abb. 102 und S. 393) induziert, die nach der Lenz'schen Regel (s. S. 208) das erzeugende Magnetfeld schwächen. Diese Erscheinung nennt man **Diamagnetismus** (diamagnetism). Im Gegensatz dazu nennen wir die bisher behandelten Ströme (s. Abschn. 17, S. 189ff.), die durch elektrische Leiter geführt und mit Amperemetern gemessen werden können, **freie Ströme** (free currents). Während die freien Ströme auf Grund des Durchflutungsgesetzes (s. Gl. (317), S. 201) unmittelbar die Wirbel (s. die Legende zu Abb. 93 auf S. 201) der magnetischen Feldstärke \vec{H} an einem beliebigen Ort \vec{r} liefern, werden die Wirbel der magnetischen Flussdichte \vec{B} an diesem Ort sowohl von den freien als auch von den inneren Strömen und damit von der relativen Permeabilität μ_r des Stoffes und ihrer Verteilung im Raum bestimmt. Dies ist analog zur Elektrostatik, wo die freien Ladungen Q gemäß dem verallgemeinerten Coulomb-Gesetz (Gl. (290), S. 185)

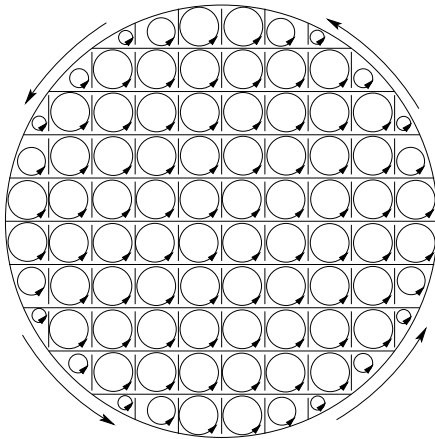


Abbildung 102. Innere Ströme in einem zylinderförmigen Stück Materie, die nach Anlegen eines Magnetfeldes, das in die Zeichenebene hinein gerichtet ist, senkrecht zum Querschnitt induziert werden. Die Ströme gleichen sich im Inneren aus, da an jeder Trennungsfäche beiderseits entgegengesetzt gleich große Ströme fließen. Damit bleibt nur an der Oberfläche ein effektiver Kreisstrom übrig, der rings um den Zylinder fließt

die Quellen der elektrischen Flussdichte $\vec{D}(\vec{r})$ sind, während die Quellen der elektrischen Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ durch die freien Ladungen *und* die Polarisationsladungen

und damit durch die relative Dielektrizitätskonstante ε_r des Stoffes und ihre Verteilung im Raum bestimmt werden. Da außerdem die elektrische Kraftwirkung durch die elektrische Feldstärke \vec{E} (s.Gl.(265), S.169) und die magnetische Kraftwirkung durch die magnetische Flussdichte \vec{B} (s.Gl.(324), S.210) bestimmt wird, ergibt sich die **physikalische Analogie** (physical analogy) der Tab.43.

Tabelle 43. Physikalische Analogie zwischen elektrischen und magnetischen Größen

Elektrische Größen	Magnetische Größen
elektrische Feldstärke \vec{E}	magnetische Flussdichte \vec{B}
elektrische Flussdichte \vec{D}	magnetische Feldstärke \vec{H}

Andererseits legen die Beziehungen $\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$ (s.Gl.(288), S.183) und $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$ (s.Gl.(319), S.203) die in der Tab.44 aufgelistete **formale Analogie** (formal analogy) nahe.

Tabelle 44. Formale Analogie zwischen elektrischen und magnetischen Größen

	Elektrische Größen		Magnetische Größen	
Bezeichnung	Symbol	Einheit	Symbol	Einheit
Feldstärke	\vec{E}	V/m	\vec{H}	A/m
Flussdichte	$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_e$	As/m ²	$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{P}_m$	Vs/m ²
Influenz- bzw. Induktionskonstante	ε_0	As/Vm	μ_0	Vs/Am
relative Dielektrizitätskonstante bzw. relative Permeabilität	ε_r ($\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$)	1	μ_r ($\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$)	1
Suszeptibilität	$\chi_e = \varepsilon_r - 1$	1	$\chi_m = \mu_r - 1$	1
Polarisation	\vec{P}_e ($\vec{P}_e = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$)	As/m ²	\vec{P}_m ($\vec{P}_m = \chi_m \mu_0 \vec{H}$)	Vs/m ²
Magnetisierung (magnetization)	-	-	$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$	A/m

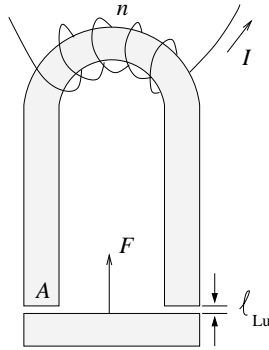
Mit dieser Tabelle lassen sich Formeln, die in der Elektrostatik (s.Abschn.16, S.166ff.) abgeleitet wurden, einfach auf den magnetischen Fall übertragen. Einige Beispiele sind in der Tab.45 zusammengestellt. In der vorletzten Zeile dieser Tabelle tritt der *gleiche* Faktor N bei der elektrischen und der magnetischen Feldstärke auf. Er wird deshalb sowohl Entelektrisierungsfaktor als auch **Entmagnetisierungsfaktor** (demagnetization factor) genannt. Zahlenwerte findet man in der Tab.38, S.186. Beim magnetischen Analogon zum verallgemeinerten Coulomb-Gesetz (letzte Spalte in Tab.45)

Tabelle 45. Analogien zwischen Formeln der Elektrostatik und der Magnetostatik

	Elektrostatik	Magnetostatik
Energiedichte des Feldes	$\int_0^D \vec{E}' \cdot d\vec{D}'$ (s.Gl.(278), S.177), bzw. für $\varepsilon_r = \text{const}$: $\vec{E} \cdot \vec{D} / 2$ (s.Gl.(279), S.177)	$\int_0^B \vec{H}' \cdot d\vec{B}'$ bzw. für $\mu_r = \text{const}$: $\vec{H} \cdot \vec{B} / 2$
Stetigkeit der Feldgrößen an Grenzflächen	D_\perp, E_\parallel (s.S.184)	B_\perp, H_\parallel
Schwächung des Feldes durch Polarisation der Materie	$\vec{E} = \vec{E}_v - N\vec{P}_e/\varepsilon_0$ (s.Gl.(291), S.185)	$\vec{H} = \vec{H}_v - N\vec{P}_m/\mu_0$
Oberflächenintegral der Flussdichte	$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$ (s.Gl.(272), S.174)	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$

$$\oint_{(A)} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \quad (339)$$

steht auf der rechten Seite null, da es bis heute trotz intensiver Anstrengungen (noch?) nicht gelungen ist, **magnetische Ladungen** (magnetic charges), die auch **magnetische Monopole** (magnetic monopoles) genannt werden, experimentell nachzuweisen.

**Abbildung 103.** Zur Berechnung der Anziehungskraft eines Elektromagneten. A ist die Querschnittsfläche des Eisenjochs und ℓ_{Lu} die Dicke des Luftspaltes

Als Beispiel für die Anwendung der Tatsache, dass B_\perp stetig durch eine Grenzfläche geht, wollen wir die Anziehungskraft eines **Elektromagneten** (electromagnet, s.Abb.103) berechnen. Der Luftspalt ℓ_{Lu} sei klein gegen die Wurzel aus der Querschnittsfläche A des Eisenjochs ($\ell_{\text{Lu}} \ll A^{1/2}$) und die relative Permeabilität

des Eisens μ_r groß gegen 1, so dass das magnetische Streufeld vernachlässigt werden kann. Dann folgt für die Anziehungskraft

$$F = \mu_0 \left(\frac{\mu_r n I}{\ell_\mu + 2\mu_r \ell_{Lu}} \right)^2 A, \quad (340)$$

wobei n die Windungszahl der Feldspule, I den Feldstrom und ℓ_μ die Weglänge der magnetischen Feldlinien im Eisen bezeichnet.

Aus dem Durchflutungsgesetz (s.Gl.(317), S.201) folgt $H_\mu \ell_\mu + 2H_{Lu} \ell_{Lu} = nI$, wobei H_μ die magnetische Feldstärke im Eisen und H_{Lu} die magnetische Feldstärke im Luftspalt ist. Wegen der Stetigkeit von B_\perp gilt $B_\mu = B_{Lu}$ oder (s.Gl.(319), S.203) $H_\mu = H_{Lu}/\mu_r$. Setzen wir dies in die Gleichung $H_\mu \ell_\mu + 2H_{Lu} \ell_{Lu} = nI$ ein, so ergibt sich $H_{Lu} = \mu_r n I / (\ell_\mu + 2\mu_r \ell_{Lu})$. Die Energie des magnetischen Feldes in den beiden Luftspalten wird damit zu (s.Tab.45) $E_{m,Lu} = 2\ell_{Lu} A (\mu_0/2) [\mu_r n I / (\ell_\mu + 2\mu_r \ell_{Lu})]^2$. Für die Energie des Magnetfeldes im Eisen erhalten wir $E_{m,\mu} = \ell_\mu A \mu_0 \mu_r [n I / (\ell_\mu + 2\mu_r \ell_{Lu})]^2 / 2$, so dass sich für die Gesamtenergie des Magnetfeldes $E_m = E_{m,Lu} + E_{m,\mu} = (A/2) \mu_0 \mu_r (nI)^2 / (\ell_\mu + 2\mu_r \ell_{Lu})$ ergibt. Damit folgt für die Kraft $F = -dE_m/d\ell_{Lu} = A \mu_0 (\mu_r n I)^2 (\ell_\mu + 2\mu_r \ell_{Lu})^{-2}$. Für $n = 200$, $I = 10$ A, $\ell_\mu = 0,25$ m, $A = 2 \cdot 10^{-4}$ m², $\mu_r = 300$ und $\ell_{Lu} = 0$ beträgt somit die Anziehungskraft $F = 1448$ N. Bei einem Luftspalt von nur 1 mm verringert sich dieser Wert auf ungefähr 125 N, d.h. auf $\leq 10\%$.

Der am Anfang dieses Abschnitts (s.S.218) beschriebene **Diamagnetismus** (diamagnetism) lässt sich makroskopisch dadurch nachweisen, dass die magnetische Suszeptibilität χ_m (s.Tab.44, S.219) kleiner als null (Lenz'sche Regel, s.S.208) und temperaturunabhängig ist. Der Diamagnetismus tritt bei allen Stoffen auf, er wird aber in den Fällen, bei denen der Stoff (permanente) elementare magnetische Dipole (z.B. Übergangsmetallionen) enthält, meist durch deren Wirkung völlig überdeckt. Es ergibt sich dann eine positive Suszeptibilität, die je nach der Stärke der Wechselwirkung zwischen den Dipolen sogar sehr groß gegen eins werden kann. Bei vernachlässigbarer Wechselwirkung jedoch liegen die gleichen Bedingungen vor wie bei der Orientierungspolarisation in der Elektrostatik (s.S.186) und es ergibt sich durch Übertragung der Gl.(297), S.187,

$$\chi_m = \frac{C}{T} \quad (341)$$

mit

$$C = c_p \mu_0 \frac{m_I^2}{3k}. \quad (342)$$

c_p ist die Konzentration und m_I das magnetische Moment der elementaren Dipole.

Aus Gl.(297), S.187, folgt für den Anteil, der von den elementaren Dipolen herrührt ($\alpha = 0$) und bei Vernachlässigung der Wechselwirkung zwischen den Dipolen ($\varepsilon_r + 2 \approx 3$) die

Beziehung $\varepsilon_r - 1 = c_p p^2 / (3kT\varepsilon_0)$. Die Übertragung auf den magnetischen Fall ($\varepsilon_r \rightarrow \mu_r$; $\varepsilon_0 \rightarrow \mu_0$; $p \rightarrow p_m$) ergibt mit $p_m = \mu_0 m_I$ (s.Gl.(326), S.212) und $\chi_m = \mu_r - 1$ (s.Tab.44, S.219) die gesuchten Gln.(341) und (342).

Die Gl.(341) wird als **Curie-Gesetz** (Curie's law, Pierre Curie 1859-1906) und die Konstante C als **Curie-Konstante** (Curie constant) bezeichnet. In der Tab.46 sind Zahlenwerte für die **magnetische Suszeptibilität** (magnetic susceptibility) χ_m von einigen diamagnetischen und paramagnetischen Stoffen zusammengestellt. Korrekterweise muss man χ_m **magnetische Volumenssuszeptibilität** nennen, da in der Literatur, analog zum elektrischen Fall (s.Tab.37, S.183), auch die **magnetische Massensuszeptibilität** $\chi_{m,ma} = \chi_m / \rho$ und die **molare magnetische Suszeptibilität** (molar magnetic susceptibility) $\chi_{m,mo} = \chi_m M / \rho$ verwendet werden, wobei ρ die Dichte und M die molare Masse des Stoffes darstellt. Darüber hinaus ist es oft auch noch üblich, Messwerte für die **magnetische cgs-Suszeptibilität** $\kappa_m = \chi_m / (4\pi)$ anzugeben.

Tabelle 46. Experimentelle Werte für die magnetische Suszeptibilität $\chi_m = \mu_r - 1$ einiger diamagnetischer und paramagnetischer Stoffe [LID90]

Stoff	T/K	$\chi_m \cdot 10^6$
Wismut (Bi, bismuth)	293	-165
Kupfer (Cu, copper)	296	-9,63
Wasser (H ₂ O, water)	293	-9,03
Stickstoff (N ₂ , nitrogen) 0,1 MPa	293	-0,0667
Aluminium (Al, aluminum)	293	+ 20,8
Platin (Pt, platinum)	290	+ 279
Sauerstoff (O ₂ , oxygen) 0,1 MPa	293	+ 1,76
Sauerstoff flüssig (liquid oxygen)	70,8	+ 4220

Eisen, Nickel, Kobalt und einige andere Stoffe zeigen **Ferromagnetismus** (ferromagnetism). Dieser beruht auf einer Kopplung zwischen den elementaren magnetischen Dipolen und ist damit eine kollektive Eigenschaft, d.h. es gibt keine ferromagnetischen Atome oder Moleküle. Ein ferromagnetischer Stoff, er wird auch als **Ferromagnetikum** (ferromagnet) bezeichnet, besitzt eine charakteristische Temperatur T_C , die sog. **Curie-Temperatur** (Curie temperature, Pierre Curie 1859-1906). Einige experimentelle Werte sind in der Tab.47 zusammengestellt.

Oberhalb der Curie-Temperatur gilt das **Weiss-Gesetz** (Curie-Weiss law, Pierre Weiss 1865-1940)

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_C}, \quad (343)$$

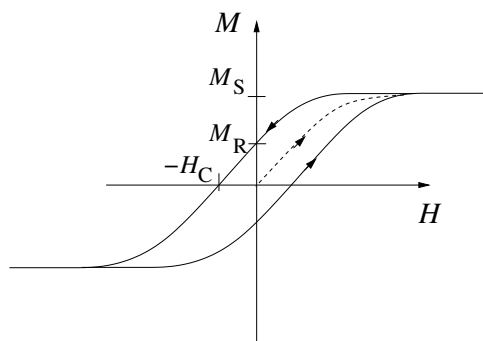
so dass für $T \gg T_C$ paramagnetisches Verhalten vorliegt. Unterhalb der Curie-Temperatur dagegen (ferromagnetisches Verhalten) ist die magnetische Suszeptibi-

Tabelle 47. Curie-Temperatur T_C in Kelvin für einige Ferromagnetika [HER94]

Ferromagnetikum	chemisches Symbol	T_C / K
Eisen (iron)	Fe	1042
Kobalt (cobalt)	Co	1400
Nickel (nickel)	Ni	631
Cu-Mn-Al-Legierung (Cu-Mn-Al alloy)	Cu_2MnAl	603
Gadolinium (gadolinium)	Gd	289
Dysprosium (dysprosium)	Dy	87

lität χ_m sehr groß und hängt sowohl von der Größe der magnetischen Feldstärke H als auch von der Vorgeschichte ab. Die Abb.104 zeigt schematisch die Abhängigkeit der Magnetisierung $M = \chi_m H$ eines Ferromagnetikums von der magnetischen Feldstärke H . Eine solche Abhängigkeit nennt man **Hysteresese-** oder **Hysteresis-Kurve** (hysteresis cycle). Der gestrichelte Teil in Abb.104 heißt **Neukurve** (virgin curve). Er gehört nicht zur Hysteresese-Kurve und beschreibt die Abhängigkeit der Magnetisierung von der magnetischen Feldstärke für ein ursprünglich unmagnetisches Material. Die Pfeile an der Kurve geben die Umlaufsrichtung an. M_S heißt **Sättigungsmagnetisierung** (saturation magnetization), M_R **Remanenz** (remance or residual magnetization or retentivity) und H_C **Koerzitivkraft** oder (coercive force or coercivity). **Permanentmagnete** (permanent magnets) sind magnetisierte Stäbe aus ferromagnetischem Material mit großer Remanenz. Aus Abb.104 geht hervor, dass man bei ferromagnetischen Materialien eine magnetische Suszeptibilität i.Allg. nicht eindeutig angeben kann. Man definiert deshalb die **Anfangssuszeptibilität** (initial susceptibility) χ_m^a durch die Steigung der Neukurve am Nullpunkt

$$\chi_m^a = \left(\frac{dM_{\text{neu}}}{dH} \right)_{H=0}. \quad (344)$$

**Abbildung 104.** Hysteresese-Kurve eines ferromagnetischen Materials

Trägt man nicht die Magnetisierung M , sondern die magnetische Flussdichte B als Funktion der magnetischen Feldstärke H auf, so ergibt sich eine ähnliche Kurve wie in Abb.104, jedoch mit dem Unterschied, dass keine Sättigung auftritt. Das heißt, für $H > 0$ verläuft die Kurve bei großen Werten von H nicht horizontal, sondern steigt linear an. Analog ändert sich das Verhalten für $H < 0$.

Nach Tab.44, S.219, gilt $B = \mu_0 H + P_m$, woraus mit $P_m = \mu_0 M$ und $M = \chi_m H$ die Beziehung $B = \mu_0 H + \mu_0 M$ folgt. Selbst wenn die Magnetisierung M ihren Sättigungswert M_S erreicht hat, wächst B wegen des ersten Terms noch linear mit H an.

Beim einmaligen Durchlaufen der Hysteresekurve eines Ferromagnetikums mit dem Volumen V geht die magnetische Energie

$$\Delta W_m = \mu_0 V \oint \vec{H} \cdot d\vec{M} \quad (345)$$

in Form von Wärme verloren.

Nach Tab.45, S.220, gilt für die magnetische Energie $V \int_0^B \vec{H}' d\vec{B}'$. Dies bedeutet, dass bei einem Durchlaufen der Hysteresekurve die Energie $\Delta W_m = V \oint \vec{H} d\vec{B}$ verloren geht. Mit $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{P}_m$ und $\vec{P}_m = \mu_0 \vec{M}$ (s. Tab.44, S.219) folgt zunächst $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$ und nach Einsetzen in das Umlaufintegral und Durchführung der Integration $\Delta W_m = \mu_0 V \oint \vec{H} d\vec{M}$, denn das Umlaufintegral $\oint \vec{H} d\vec{H}$ ist Null.

Aus diesem Grunde verwendet man in Transformatoren, Elektromotoren und Generatoren Ferromagnetika mit einer möglichst schmalen Hystereseschleife (**magnetisch weiches Material**, soft magnetic material). Im Gegensatz dazu benötigt man für Permanentmagnete und vor allem für digitale magnetische Informationsspeicher (Disketten, Festplatten) **magnetisch hartes Material** (hard magnetic material), bei dem die Hysteresekurve näherungsweise zu einem Rechteck mit den Kanten parallel zu den M - H -Achsen entartet ist, so dass Remanenz und Koerzitivkraft maximale Werte annehmen. Die Ursache des Ferromagnetismus ist die Ausbildung von **Weiss-Bezirken** (Weiss domains oder ferromagnetic domains, Pierre Weiss 1865-1940). Das sind Gebiete, in denen die elementaren magnetischen Dipole infolge ihrer Wechselwirkung untereinander parallel ausgerichtet sind. Jeder Weiss-Bezirk wirkt damit wie *ein* magnetischer Dipol, aber mit entsprechend größerem Dipolmoment. Für $M = 0$ sind die Weiss-Bezirke statistisch im Raum orientiert. Nach Anlegen eines Magnetfeldes mit wachsender Intensität klappen immer mehr Bezirke in die Richtung des Magnetfeldes, was sich mit einer Induktionsspule und nach genügender Verstärkung akustisch durch Rauschen in einem Lautsprecher nachweisen lässt (**Barkhausen-Effekt**, Barkhausen effect, Heinrich Georg Barkhausen 1881-1956). Beim **Antiferromagnetismus** (antiferromagnetism), den einige Festkörper, wie

z.B. $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$, MnO oder MnF_2 zeigen, existieren ebenfalls magnetische Bezirke, jedoch sind innerhalb eines Bezirks die elementaren magnetischen Dipole antiparallel ausgerichtet, so dass das resultierende Dipolmoment eines solchen Bezirks null ist. Mit wachsender Temperatur zerbrechen diese Bezirke. Es entsteht damit eine wachsende Zahl ungekoppelter elementarer magnetischer Dipole, die schließlich zu einem paramagnetischen Verhalten des Festkörpers führen. Die Temperaturabhängigkeit der magnetischen Suszeptibilität χ_m ist schematisch in Abb.105 dargestellt. Oberhalb der **Néel-Temperatur** (Néel temperature, Louis Eugène Felix Néel, 1904-2000) T_N , d.h. für $T > T_N$, gilt das **Néel-Gesetz** (Néel's law)

$$\chi_m = \frac{C}{T + \theta}, \quad (346)$$

wobei θ und T_N die beiden charakteristischen Temperaturen eines antiferromagnetischen Materials sind.

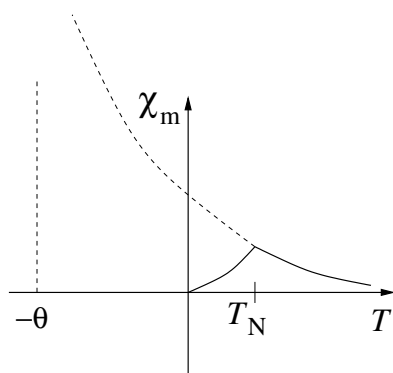


Abbildung 105. Temperaturabhängigkeit der magnetischen Suszeptibilität χ_m bei einem Antiferromagnetikum. Oberhalb der Néel-Temperatur T_N gilt die Gl.(346)

Beim **Ferrimagnetismus** (ferrimagnetism) existieren, wie beim Antiferromagnetismus, Bezirke, in denen die elementaren magnetischen Dipole antiparallel ausgerichtet sind, jedoch haben jeweils benachbarte Dipole unterschiedliche Dipolmomente, so dass sie sich nur zu einem gewissen Bruchteil kompensieren. Damit verhalten sich ferrimagnetische Festkörper, wie z.B. Magnetit (FeOFe_2O_3), ähnlich wie Ferromagnetika. Durch Einbau von Fremdatomen an Stelle des Eisens (es entsteht XOFe_2O_3 mit $\text{X}=\text{Mn}, \text{Co}, \text{Ni}, \text{Cu}, \text{Mg}, \text{Zn}$ u.a.) kann man die Hysteresekurve gezielt verändern. Da diese Materialien, die man als **Ferrite** (ferrites) bezeichnet, außerdem nichtleitend sind und deshalb keine Wirbelstromverluste zeigen, finden sie in der Elektronik als Spulenkernmaterial breite Anwendung.

Die im vorliegenden Abschnitt beschriebenen magnetischen Erscheinungen treten auch in der Elektrostatik auf. **Ferroelektrika** (ferroelectrics) sind z.B. Seignettesalz ($\text{COOK-CHOH-CHOH-COONa} \cdot 4\text{H}_2\text{O}$) oder Bariumtitanat (BaTiO_3), deren relative Dielektrizitätskonstante ε_r durchaus Werte über 1000 erreichen kann. Die

Remanenz existiert auch, dem Permanentmagneten entspricht das **Elektret** (electret). Antiferroelektrische Eigenschaften besitzt z.B. WO_3 und auch Kristalle mit ferrielektrischen Eigenschaften sind bekannt [Ü 111](#) [Ü 112](#)

Physikalisches Praktikum

Schenk, W.; Kremer, F.; Beddies, G.; Franke, Th.;

Galvosas, P.; Rieger, P. - Schenk, W.; Kremer, F. (Hrsg.)

2014, XIV, 397 S. 325 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-00665-5