

Mechanik

1 Wägung und Dichte

1.0 Grundlagen

Die Dichte ρ eines homogenen Körpers ist das Verhältnis seiner Masse m zu seinem Volumen V :

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1)$$

Somit lässt sich die Dichte von festen Körpern und Flüssigkeiten über eine Massen- und Volumenbestimmung ermitteln. Die Einheit der Dichte ist kg m^{-3} . Die Masse bestimmt man durch Wägung. Ihre Einheit ist kg. Die Masse eines Körpers kennzeichnet seine Trägheit und seine Schwere.

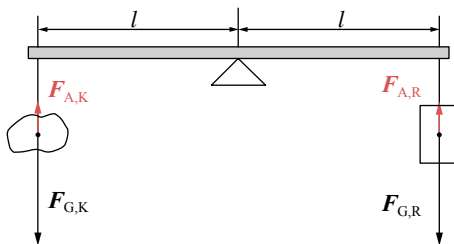


Abb. M.1.0.1 Massenvergleich mit einem zweiarmligen Hebel

Bei der Wägung von Festkörpern und Flüssigkeiten nutzt man meist die Eigenschaft der Schwere der Masse. Dabei wird die Masse des Körpers der Dichte ρ mit der Referenzmasse m_R von Wägestücken bekannter Dichte ρ_R verglichen, die auf Massennormale zurückgeführt werden können. Wird die Wägung in Luft durchgeführt, erfahren Körper und Wägestück einen Auftrieb $F_{A,K}$ bzw. $F_{A,R}$, der die Wirkung auf die Waage im Vergleich zur Wägung im Vakuum verän-

dert. Der Auftrieb ist eine der Gewichtskraft entgegen gerichtete Kraft. Nach dem Prinzip des *Archimedes* ist der Betrag der Auftriebskraft F_A auf einen sich in einem Medium befindenden Körper gleich dem Betrag der Gewichtskraft des vom Körper verdrängten Mediums (Index M):

$$F_A = V \rho_M g = m \frac{\rho_M}{\rho} g \quad (2)$$

Für die Wägung in Luft (Index L) ist in Gl. (2) die Dichte des Mediums ρ_M durch die Dichte der Luft ρ_L zu ersetzen. Die Größen V , g und ρ sind der das Medium verdrängende Volumenanteil des Körpers, die Fallbeschleunigung am Aufstellungsort der Waage und die Dichte des Körpers.

In Abb. M.1.0.1 ist ein Massenvergleich mit einem zweiarmligen Hebel (z. B. Balkenwaage) dargestellt. Die Gewichtskräfte $F_{G,K}$ und $F_{G,R}$ von Körper und Wägestück rufen an den Hebelarmen der gleichen Länge l ein rechts- bzw. linksdrehendes Drehmoment hervor. Sind diese bei einer Wägung im Vakuum vom Betrag gleich ($m g l = m_R g l$), haben Körper und Wägestück die gleiche Masse. Wird beim Massenvergleich in Luft der auf der linken Seite mit dem Körper der Masse m belastete Hebel durch Anbringen geeigneter Vergleichskörper (Wägestücke der Masse m_R , dem Volumen V_R und der Dichte ρ_R) auf der rechten Seite ins Gleichgewicht gebracht, ergibt sich durch die Beachtung des Auftriebs in Luft für die Drehmomente

$$m g l - \rho_L V g l = m_R g l - \rho_L V_R g l \quad (3)$$

und mit Gl. (1) folgt dann

$$m \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho} \right) = m_R \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_R} \right) \quad (4)$$

Werden mehrere Massestücke verschiedener Dichten zum Abgleichen des Hebels verwendet, ist der rechte Term von Gl. (4) durch die

Summe $\sum_i m_{Ri} \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_{Ri}}\right)$ zu ersetzen, wobei m_{Ri} die Masse aller jeweilig hinzugefügten Wägestücke mit der Dichte ρ_{Ri} ist. Weiteres Umstellen von Gl. (4) führt zur Gl. (4a), mit der sich dann die Masse m des Körpers bestimmen lässt:

$$m = m_R \frac{\left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_R}\right)}{\left(1 - \frac{\rho_L}{\rho}\right)}. \quad (4a)$$

In der Laborpraxis werden überwiegend elektronische Waagen eingesetzt. Auch hier wird die Schwere der Masse für ihre Bestimmung ausgenutzt. Elektronische Waagen bestehen in ihrer einfachsten Form aus einer Wägeplatte, einer Wägezelle und einem elektronischen Anzeigegerät. Auf die Wägezelle wirkt die Gewichtskraft des auf der Wägeplatte liegenden Körpers. Dadurch wird ein elektrisches Signal erzeugt, das eindeutig mit der Gewichtskraft zusammenhängt. Dieser Zusammenhang lässt sich durch die Wägekennlinie beschreiben. Die Wandlung der Gewichtskraft in ein elektrisches Signal führt beim Anzeigegerät zur Ausgabe des Wägewerts. Unter dem Wägewert versteht man den durch Wägung in Luft ohne Korrektur des Luftauftriebs ermittelten Näherungswert für die Masse. Neben der Beachtung des Auftriebs, den der zu wiegende Körper oder die zur Kalibrierung aufgelegten Wägestücke während der Wägung erfahren, sind alle weiteren die Messung störenden Einwirkungen (z. B. elektrostatische und magnetische Wirkungen, Luftströmung durch Konvektion) zu vermeiden. Weiterhin ist zu beachten, dass die Wägeplatte stets horizontal ausgerichtet sein muss.

Da die Fallbeschleunigung einen Einfluss auf

den Messwert einer elektronischen Waage hat, ist diese vor jeder Messung durch Auflegen eines zur Waage als Massenormal mitgelieferten Wägestücks zu kalibrieren. Zum Kalibrieren wird das Kalibrierprogramm gestartet und das zur Waage gehörende Kalibriergewicht auf die Waage aufgesetzt. Der Anzeigewert der Waage wird dabei auf den Nennwert des Kalibriergewichts eingestellt. Für eine genaue Wägung muss der Auftrieb beachtet werden, den die Kalibriergewichte in Luft erfahren. In der Praxis wird für Waagen der konventionelle Wägewert eingeführt. Die meisten Waagen sind so eingestellt, dass sie nicht die Masse sondern den konventionellen Wägewert anzeigen. Dieser lässt sich mit Hilfe eines speziell definierten Bezugswägestücks in der folgenden Weise ermitteln. Hält ein Bezugswägestück der Dichte $\rho = 8000 \text{ kg m}^{-3}$ einem anderen Wägestück mit einer Temperatur von 20°C in Luft der Dichte $\rho_{L,k} = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$ an einer gleicharmigen Balkenwaage das Gleichgewicht, wird diesem Wägestück als konventioneller Wägewert bei gleicher Masseneinheit der Zahlenwert der Masse des Bezugswägestücks (unabhängig von seiner Dichte) zugeordnet. Der Index k steht für konventionell.

Die physikalischen Eigenschaften des Kalibriermassestücks für die elektronische Waage entsprechen im Idealfall denen des konventionell festgelegten Bezugswägestücks. Durch Einsetzen in Gl. (4a) ergibt sich für die konventionelle Masse m_k eines Wägestücks der Masse m_R und der Dichte ρ_R bei 20°C :

$$m_k = m_R \frac{\left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_R}\right)}{\left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_k}\right)}. \quad (4b)$$

Aus Gl. (4b) ist ersichtlich, dass für die Referenzmassestücke der Dichte von 8000 kg m^{-3} die Masse und der konventionelle Wägewert immer identisch sind. Für Wägestücke ande-

rer Dichte (z. B. Aluminium oder Platin-Iridium-Kilogrammprototypen) lässt sich mit Gl.(4c) die relative Abweichung zwischen Masse und konventionellem Wägewert berechnen:

$$\frac{m_k - m_R}{m_k} = 1 - \frac{(\rho_k - \rho_L)\rho_R}{(\rho_R - \rho_L)\rho_k} \quad (4c)$$

Diese relativen Abweichungen können bis zu $3 \cdot 10^{-4}$ betragen. Damit liegen sie unter der Toleranz der in der Regel für Labor- und Analysewaagen verwendeten Wägestücke der Genauigkeitsklassen F_1 und E_1 (Tab. M.1.1).

Tab. M.1.1 Nominalwerte (Nennwerte) von Gewichtsstücken der Genauigkeitsklassen E_1 , F_1 und M_1 und ihre Messunsicherheit $u(m)$

Nennwert m / g	E_1 $u(m)/mg$	F_1 $u(m)/mg$	M_1 $u(m)/mg$
0,01	0,002	0,025	0,25
0,02	0,003	0,03	0,3
0,05	0,004	0,04	0,4
0,1	0,005	0,05	0,5
0,2	0,006	0,06	0,6
0,5	0,008	0,08	0,8
1	0,010	0,10	1,0
2	0,012	0,12	1,2
5	0,015	0,15	1,5
10	0,020	0,20	2,0
20	0,025	0,25	2,5
50	0,030	0,30	3
100	0,05	0,50	5
200	0,10	1,0	10

Der konventionelle Wägewert vereinfacht sehr genaue Wägungen, da Schwankungen der Luftdichte bis zu 10 % rechnerisch nicht berücksichtigt werden müssen. Die Luftauftriebskorrektur für die bei der Wägung ver-

wendeten Massenstücke muss dabei für viele Anwendungen im Labor nicht durchgeführt werden.

Die Einheit des Volumens ist m^3 . Seine Bestimmung ist nach verschiedenen Methoden möglich, von denen hier nur eine Auswahl angeführt werden soll.

Hat ein fester Körper eine einfache geometrische Gestalt, lässt sich die Volumenbestimmung auf Längenmessungen zurückführen, die z. B. mit mechanischen Messwerkzeugen (Messschieber, Bügelmessschraube) vorgenommen werden können. Das Volumen eines Körpers mit unregelmäßiger Gestalt, kann man durch eine Wägung der Flüssigkeitsmenge bestimmen die er an Flüssigkeit bekannter Dichte verdrängt.

Die Bestimmung von Flüssigkeits- bzw. Gasvolumina erfolgt für genaue Messungen generell auf mittelbarem Weg. Mit einem Pyknometer (Versuch M.1.1) kann das Volumen für die Dichtebestimmung sehr genau bestimmt werden.

Neben der direkten Dichtebestimmung nach Gl.(1) gibt es noch weitere Verfahren, die auf verschiedenen physikalischen Grundlagen beruhen. So kommen z. B. Auftriebsverfahren (Versuch M.1.2) und Resonanzverfahren (Versuche M.1.3.1 und M.1.3.2) zum Einsatz.

Während die Dichte eines festen Körpers oder einer Flüssigkeit nur wenig von der Temperatur T und dem Druck p abhängt, ändert sich die Dichte eines Gases erheblich mit diesen Zustandsgrößen. Unter T ist die absolute Temperatur zu verstehen, die in der Einheit Kelvin (K) angegeben wird. Bei der Angabe einer Gasdichte sind daher stets die Versuchsbedingungen zu nennen.

Im Anhang A.11 sind die Dichten von einigen Gasen bei Normbedingungen ($T_N = 273,15 \text{ K}$, $p_N = 101,325 \text{ kPa}$) gegeben. Aus diesen Werten können, wenn die nachfolgend genannten Bedingungen erfüllt sind, mit Gl.(7) die Dichten für die tatsächlichen Temperaturen und Drücke bestimmt werden.

Im Folgenden werden nur noch Gase betrachtet, die sich in einem solchen Zustand befinden, dass sie als ideale Gase betrachtet werden können. Das ist erfüllt, wenn die Temperatur des Gases erheblich größer als die kritische Temperatur (W.2.0.1) des Stoffes ist. Dann lässt sich eine abgeschlossene Gasmenge mit der Masse m durch die spezielle Zustandsgleichung für ideale Gase beschreiben, wobei R_S die spezielle Gaskonstante ist:

$$pV = m R_S T \quad (5)$$

Aus Gl. (5) folgt

$$\frac{p}{T} \frac{V}{V_N} = \frac{p_N}{T_N} = \text{const} \quad (5a)$$

Der Index N weist auf die Normbedingungen hin. Durch Einsetzen von Gl. (1) ergibt sich

$$\rho \frac{T}{p} = \rho_N \frac{T_N}{p_N} = \text{const} \quad (6)$$

Für die Dichte des Gases unter den aktuellen Versuchsbedingungen gilt dann

$$\rho = \rho_N \frac{T_N p}{p_N T} \quad (7)$$

Die Dichte weiterer Gase bei Normbedingungen kann man bestimmen, indem man die molare Masse M auf das Volumen für ein Mol ($V_{\text{mol,N}}$) eines Gases bezieht:

$$\rho_N = \frac{M}{V_{\text{mol,N}}} \quad (8)$$

Die SI-Einheit Mol für die Stoffmenge ist im Abschnitt 1.1 (Einführung) definiert. Das Volumen für ein Mol eines idealen Gases lässt sich mit der allgemeinen Zustandsgleichung

$$pV = nRT \quad (9)$$

bestimmen. Dabei sind n die Stoffmenge in mol und $R = 8,3145 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$ die universelle

Gaskonstante. Unter Normbedingungen gilt: $V_{\text{mol,N}} \approx 22,414 \text{ l}$ ($1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3$).

Aus Gl. (9) folgt für alle idealen Gase, dass sich in gleichen Volumina bei gleicher Temperatur und gleichem Druck stets die gleiche Anzahl Gasteilchen befindet (Gesetz von Avogadro).

Die molare Masse lässt sich wie folgt ermitteln: Der in der Einheit Gramm angegebene Zahlenwert der molaren Masse stimmt mit dem der relativen Molekülmasse überein. Das folgt direkt aus der Definition der relativen Molekülmasse, die durch den Quotienten aus der Masse eines Moleküls des betrachteten Stoffes und dem zwölften Teil der Masse eines ^{12}C -Nuklids festgelegt ist.

Aus den Gln. (5) und (9) folgt für ein Mol eines idealen Gases eine weitere Beziehung für die Bestimmung der molaren Masse über die universelle und spezielle Gaskonstante:

$$M = \frac{R}{R_S} \quad (10)$$

Die molare Masse M von Gasen lässt sich u. a. auch aus der relativen Gasdichte D (Anhang A.12) ermitteln. Sie ist definiert als das Verhältnis der Gasdichte ρ zur Dichte trockener Luft ρ_L bei gleichen Zustandsgrößen T und p :

$$D = \frac{\rho(T, p)}{\rho_L(T, p)} \quad (11)$$

Wenn man annimmt, dass das zu untersuchende Gas als ideales Gas beschrieben werden kann, folgt mit Gl. (7), dass die relative Gasdichte unabhängig von der Temperatur und dem Druck ist. Für gleiche Volumina V des Gases und der Luft ergibt sich somit

$$D = \frac{m}{m_L} = \frac{M}{M_L} \quad (12)$$

Bezieht man die in Gl. (12) vorkommenden Massen auf das molare Volumen bei Norm-

bedingungen $V_{\text{mol,N}}$, kann man mit Hilfe von D die molare Masse M eines Gases berechnen. Für die molare Masse von Luft gilt $M_L = V_{\text{mol,N}} \rho_{L,N}$. Es ergibt sich daraus die Beziehung

$$M = V_{\text{mol,N}} \rho_{L,N} D . \quad (13)$$

Die Werte für D und $\rho_{L,N}$ sind dem Anhang A.12 zu entnehmen. Mit dem molaren Volumen in Litern und der Dichte der Luft in Gramm pro Liter ergibt sich dann für die näherungsweise Berechnung des Betrags der molaren Masse des Gases in Gramm:

$$M = 22,414 \cdot 1,293 \cdot D \approx 29 D . \quad (14)$$

Die Masse von nahezu idealen Gasen lässt sich mit Hilfe der molaren Masse M und der Stoffmenge bestimmen. Betrachtet man $n = 1$ mol idealen Gases der Masse m mit der speziellen und der allgemeinen Gasgleichung (Gln. (5) und (9)), ergibt sich

$$m = M n . \quad (15)$$

Mit den Gln. (1), (5) und (10) folgt für die Dichte eines idealen Gases mit der molaren Masse M bei der Temperatur T und dem Druck p die Beziehung

$$\rho = \frac{M}{RT} p . \quad (16)$$

1.1 Pyknometer

Aufgabenstellung

Die Dichte eines festen Körpers soll durch die Bestimmung seiner Masse und durch die Wägung des von ihm verdrängten Wassers ermittelt werden.

Das Pyknometer (Abb. M.1.1.1) ist ein im Allgemeinen doppelwandiges Glasgefäß, an das eine mit einer Strichmarke S versehene Kapillare angeschmolzen ist und das mit

einem sorgfältig eingeschliffenen Thermometer geschlossen werden kann.

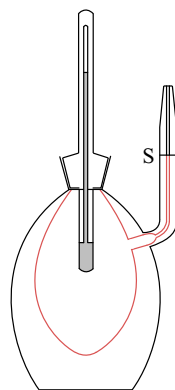


Abb. M.1.1.1 Pyknometer mit Thermometer und Kapillare zur Dichtebestimmung

Pyknometer sind Wägegefäße mit einem sehr genau und reproduzierbar bestimmbar Innenvolumen. Um die Dichte eines festen Körpers zu bestimmen, sind drei Wägungen vorzunehmen.

In einem ersten Schritt wird die Masse m des Körpers mit dem Volumen V direkt gewogen. Die Dichte des zu untersuchenden Stoffes ist mit ρ gekennzeichnet. Die Berücksichtigung des Auftriebs (Gl. (2)) bei dieser Wägung führt nach Gl. (4) zu

$$m - V \rho_L = m_R \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_R} \right) . \quad (17)$$

Im zweiten Schritt wird das mit Wasser gefüllte Pyknometer (Masse m_1) gewogen. Man erhält unter Berücksichtigung der Auftriebskorrektur

$$m_1 - V_p \rho_L = m_{R,1} \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_R} \right) , \quad (18)$$

wobei V_p das äußere Volumen des Pyknometers beschreibt. Der dritte Schritt umfasst die Wägung des mit destilliertem Wasser und mit dem zu untersuchenden Stoff gefüllten

Pyknometers (Masse m_2). Es gilt

$$m_2 - V_p \rho_L = m_{R,2} \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_R} \right). \quad (19)$$

Zur Vereinfachung der Gl. (17) schreibt man

$$m^* = m_R \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_R} \right). \quad (20)$$

Analog werden die rechten Seiten der Gln. (18) und (19) durch m_1^* bzw. m_2^* ersetzt. Es ergeben sich damit modifizierte Gleichungen, mit denen die weiteren Berechnungen durchgeführt werden:

$$m - V \rho_L = m^*, \quad (17a)$$

$$m_1 - V_p \rho_L = m_1^*, \quad (18a)$$

$$m_2 - V_p \rho_L = m_2^*. \quad (19a)$$

Die mit einem Stern versehenen Massen können auch als Ablesewerte einer auf den konventionellen Wägewert eingestellten elektronischen Waage betrachtet werden.

Unter der Voraussetzung, dass die Temperatur des Wassers bei allen Wägungen konstant bleibt, wird die Differenz der Gleichungen (18a) und (19a) gebildet:

$$m_2^* - m_1^* = m_2 - m_1. \quad (21)$$

Weiterhin gilt:

$$m_1 = m_p + m_w,$$

$$m_2 = m_p + m_w - \rho_w V + \rho V.$$

Es sind ρ_w die Dichte des eingefüllten Wassers mit der Masse m_w und m_p die Masse des leeren Pyknometers. Damit erhält man:

$$m_2^* - m_1^* = (\rho - \rho_w) V. \quad (22)$$

Aus Gl. (17a) ergibt sich:

$$m^* = (\rho - \rho_L) V. \quad (23)$$

Die Gln. (22) und (23) bilden ein Gleichungssystem zur Bestimmung der un-

bekannten Größen ρ und V . Umstellen nach V und Gleichsetzen führt zu Gl. (24), die die gesuchte Dichte ρ des festen Körpers enthält:

$$\frac{\rho - \rho_w}{m_2^* - m_1^*} = \frac{\rho - \rho_L}{m^*}. \quad (24)$$

Aus Gl. (24) folgt

$$\rho = \frac{m^* \rho_w - (m_2^* - m_1^*) \rho_L}{m^* - (m_2^* - m_1^*)}. \quad (25)$$

Das in Abb. M.1.1.1 dargestellte Pyknometer kann auch zur Bestimmung der Dichte ρ_{Fl} einer Flüssigkeit verwendet werden. In diesem Falle ermittelt man die Massen des mit Luft (m_3^*), des mit destilliertem Wasser (m_1^*) und des mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllten Pyknometers (m_4^*). Aus den Abgleichbedingungen, die den drei Wägungen entsprechen, erhält man analog zu Herleitung von Gl. (25) die gesuchte Dichte:

$$\rho_{Fl} = \frac{(m_4^* - m_3^*)(\rho_w - \rho_L)}{(m_1^* - m_3^*)} + \rho_L. \quad (26)$$

Ein Pyknometer, das zur Bestimmung der Luftdichte verwendet werden kann, ist ein Glaskolben mit zwei angesetzten Rohren, die sich durch Hähne gasdicht verschließen lassen. Die Dichte der Luft kann ermittelt werden, wenn man die Masse des luftgefüllten (m_3^*), des evakuierten (m_5^*) und des mit Wasser gefüllten (m_1^*) Pyknometers bestimmt. Analog zur Herleitung von Gl. (25) ergibt sich für die Dichte der Luft:

$$\rho_L = \frac{(m_3^* - m_5^*)}{(m_1^* - m_5^*)} \rho_w. \quad (27)$$

Versuchsausführung

Zunächst erfolgt die Bestimmung der Masse m^* des zu untersuchenden festen Körpers, der aus einer ausreichend großen Anzahl

kleiner Probestücke besteht. Danach wird das Pyknometer mit destilliertem Wasser gefüllt, wobei darauf zu achten ist, dass sich vor dem Einsetzen des Thermometers keine Luftblasen im Inneren des Glasgefäßes befinden. Der Wasserspiegel in der Kapillare soll oberhalb der Marke S liegen. Nach einigen Minuten hat das Wasser die Gleichgewichtstemperatur ϑ_1 angenommen. Diese ist zu notieren. Das Wasser, das sich in der Kapillare oberhalb der Marke S befindet, wird vorsichtig mit Zellstoff oder Fließpapier abgesaugt. Die folgende Wägung, vor der das Pyknometer sorgfältig abzutrocknen ist, liefert m_1^* . Anschließend werden alle Probenstücke mit Hilfe einer Pinzette in das Pyknometer eingebracht. Es ist wieder darauf zu achten, dass vor dem Einsetzen des Thermometers alle Luftblasen aus dem Wasser entwichen sind. Nun ist so lange zu warten, bis die Temperatur im Inneren des gut abgetrockneten und bis zur Marke S gefüllten Pyknometers mit ϑ_1 übereinstimmt. Danach erfolgt die Bestimmung der Masse m_2^* . Die Dichte des Wassers bei der Temperatur ϑ_1 ist Anhang A.9 zu entnehmen und die der Luft bei Zimmertemperatur und herrschendem Luftdruck mit Hilfe von Gl. (7) aus der Dichte bei Normbedingungen auf zwei Stellen genau zu berechnen. Die gesuchte Dichte ρ des festen Stoffes erhält man dann mit Gl. (25).

Die Wägungen führen zu fehlerhaften Ergebnissen, wenn sich Luftblasen im Inneren oder Wassertropfen am äußeren Umfang des Pyknometers befinden. Außerdem können Abweichungen auftreten, wenn die Temperatur ϑ_1 im Inneren des nur mit Wasser gefüllten Pyknometers von der Temperatur ϑ_2 des mit Wasser und mit dem zu untersuchenden Körper gefüllten Pyknometers abweicht. Nimmt man das Volumen V und das innere Volumen des Gefäßes V_i als konstant an, tritt an die Stelle der Gl. (22)

$$m_2^* - m_1^* = (\rho - \rho_w(\vartheta_2))V - [\rho_w(\vartheta_1) - \rho_w(\vartheta_2)]V_i \quad (28)$$

Der Term $V_i[\rho_w(\vartheta_1) - \rho_w(\vartheta_2)]$ beschreibt eine Masse. Mit $V_i = 50 \text{ cm}^3$, $\vartheta_2 = 20^\circ \text{C}$ und $\Delta\vartheta = 1 \text{ K}$ beträgt diese 10^{-2} g , während die aus den Wägungen resultierende Messunsicherheit von $m_2^* - m_1^*$ bei Verwendung einer elektronischen Laborwaage kleiner gehalten werden kann. Man muss sich daher im Experiment bemühen, dass die Differenz $\Delta\vartheta$ so klein wie nur möglich wird. Außerdem ist diese Überlegung bei der Abschätzung der Messunsicherheit zu beachten. Zweckmäßigerweise sollten sich alle für den Versuch benötigten Medien und Geräte ausreichend lange vor Versuchsbeginn im Experimentierraum befinden.

1.2 Auftriebsverfahren

Aufgabenstellung

1. Die Dichten verschiedener Flüssigkeiten und eines fester Körpers sollen mit der Mohr-Westphal-Waage bestimmt werden.
2. Mit Hilfe einer elektronischen Laborwaage sind die Auftriebskräfte auf verschiedene Körper zu messen und deren Dichten zu ermitteln.

Bei Aufgabe 1 wird eine Mohr-Westphal-Waage verwendet. Diese ist eine ungleicharmige Hebelwaage. Der längere Hebelarm ist durch Kerben in Zehntel seiner Länge l geteilt. Am Ende befindet sich ein Haken, an den ein Senkkörper gehängt werden kann. Der andere Hebelarm endet in einem Metallzylinder, der mit einem Dorn versehen ist. Bei abgeglicher Waage steht die Spitze des Dorns der Spitze eines zweiten Dorns gegenüber, der am Stativ der Waage befestigt ist (Abb. M.1.2.1). Als Wägestücke dienen Reiter verschiedener Größe, deren Massen sich wie 1 : 0,1 : 0,01 verhalten.

Die Masse des größten Reiters m_R ist durch die Dichte des Wassers ρ_w und das Volumen V_S des Senkkörpers festgelegt. Sie wird so bemessen, dass der in Kerbe 10 aufgesetz-

te Reiter die Auftriebskraft (Gl. (2)) kompensiert, die der vollständig eingetauchte Senkkörper im Wasser erfährt.

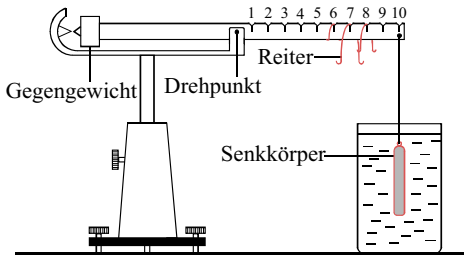


Abb. M.1.2.1 Abgegliche Mohr-Westphal-Waage

Die Dichte von Wasser ist temperaturabhängig. Bei einer Temperatur von 4°C erreicht die Dichte ein Maximum mit einem Wert von $999,97\text{ kg m}^{-3}$ (Anhang A.9). Legt man für die Dichte des Wassers $\rho_W = 1000\text{ kg m}^{-3}$ fest, ergibt sich für ein Volumen des Senkkörpers von $5 \cdot 10^{-6}\text{ m}^3$ eine verdrängte Wassermasse von $5 \cdot 10^{-3}\text{ kg}$. Verwendet man statt Wasser eine Flüssigkeit mit der Dichte von 700 kg m^{-3} , muss der größte Reiter in Kerbe 7 aufgelegt werden, um den Auftrieb am Senkkörper zu kompensieren. Über die Positionen der aufgelegten Reiter lässt sich somit in einem bestimmten Temperaturbereich eine näherungsweise Bestimmung der Dichte der Flüssigkeit vornehmen.

Beispiel:

Bei der Lage des größten Reiters in Kerbe 10, also bei der Länge $(10/10) l$ des Hebelarms der Länge l , beträgt die Dichte der Flüssigkeit 1000 kg m^{-3} , bei der Lage des Reiters in Kerbe 7, was $(7/10) l$ entspricht, hat die Flüssigkeit eine Dichte von 700 kg m^{-3} . Sind ein großer Reiter auf Kerbe 8, ein mittlerer Reiter auf Kerbe 1 und ein kleiner Reiter auf Kerbe 2 positioniert, beträgt die Dichte 812 kg m^{-3} .

Das eben beschriebene Verfahren zur Dichtebestimmung geht davon aus, dass der Wert der Dichte des Wassers nahe am angenom-

menen Wert von 1000 kg m^{-3} liegt und sich das Volumen des Senkkörpers im Temperaturbereich der Messung kaum ändert. Die Dichte des Wassers ist aber immer kleiner als der angenommene Wert. Das im Folgenden beschriebene Verfahren lässt sich für eine genauere Dichtebestimmung verwenden. Das Verhältnis der Dichte der Flüssigkeit zur Dichte des Wassers ist gleich dem Verhältnis der Drehmomente, die durch entsprechend aufgesetzte Reiter hervorgerufen werden. Des Weiteren müssen noch der Auftrieb, den die Reiter in Luft erfahren, und die Auftriebskräfte auf den Befestigungsdraht berücksichtigt werden. Die Waage wird so justiert, dass sie bei Belastung mit dem Senkkörper (Masse m_S , Volumen V_S) abgeglichen ist.

Die Drehmomente M_k und M_l am kurzen und am langen Hebelarm sind betragsgleich. Am Haken des längeren Hebelarmes greift das Gewicht des Senkkörpers und des Befestigungsdrahtes (Masse m_D , Volumen V_D) vermindert um den Luftauftrieb an. Bezeichnet man die Dichte der Luft mit ρ_L und die Fallbeschleunigung mit g , ergibt sich für den Betrag des resultierenden Drehmoments am langen Hebelarm:

$$M_l = (m_S + m_D - (V_S + V_D) \rho_L) g l. \quad (29)$$

Der Senkkörper ist nun völlig und der Befestigungsdraht mit $1/n$ seiner Länge in das Wasser eingetaucht. Die Waage befindet sich durch die auf den längeren Hebelarm aufgesetzten Reiter im Gleichgewicht. Es gilt:

$$M_{l,w} = (m_S + m_D - \left(V_S + \frac{1}{n} V_D\right) \rho_W) g l - \left(1 - \frac{1}{n}\right) V_D \rho_L g l + M_{r,w}. \quad (30)$$

Dabei umfasst der erste Term den Betrag des durch den Senkkörper und Draht hervorgerufenen Drehmoments, wobei die entsprechenden Auftriebskorrekturen für die Teile im Wasser und in der Luft berücksichtigt sind. $M_{r,w}$ ist der Betrag des durch Auflegen der

Reiter in die Kerben des Hebelarms hervorgerufenen resultierenden Drehmoments. Der Senkkörper hängt nun in einer Flüssigkeit der Dichte ρ_F . Nach dem Abgleich der Waage mit Reitern soll der Befestigungsdraht genau so tief in die Flüssigkeit wie zuvor in das Wasser tauchen. Analog zu Gl. (30) ergibt sich

$$M_{i,F} = (m_S + m_D - \left(V_S + \frac{1}{n} V_D \right) \rho_F - \left(1 - \frac{1}{n} \right) V_D \rho_L) g l + M_{R,F} . \quad (31)$$

Zieht man Gl. (29) von Gl. (31) bzw. Gl. (30) ab, erhält man

$$M_{R,F} = \left(V_S + \frac{1}{n} V_D \right) (\rho_F - \rho_L) g l , \quad (32)$$

$$M_{R,W} = \left(V_S + \frac{1}{n} V_D \right) (\rho_W - \rho_L) g l . \quad (33)$$

Nach der Division von Gl. (32) durch Gl. (33), folgt

$$\frac{\rho_F - \rho_L}{\rho_W - \rho_L} = \frac{M_{R,F}}{M_{R,W}} \quad \text{bzw.} \quad (34)$$

$$\rho_F = \frac{M_{R,F}}{M_{R,W}} \rho_W + \left(1 - \frac{M_{R,F}}{M_{R,W}} \right) \rho_L . \quad (35)$$

In Gl. (35) geht nur das Verhältnis der Drehmomente durch die in die Kerben aufgesetzten Reiter zur Einstellung des Gleichgewichts ein. Bezeichnet man die Dichte der Reiter mit ρ_R und die Masse des größten Reiters mit m_R , ergibt sich für den Betrag des entsprechenden Drehmoments:

$$M_{R,M} = \left[\sum_{i=1}^{10} a_{i,M} m_R \frac{i}{10} + \sum_{i=1}^{10} b_{i,M} \frac{m_R}{10} \frac{i}{10} + \sum_{i=1}^{10} c_{i,M} \frac{m_R}{100} \frac{i}{10} \right] \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_R} \right) g l . \quad (36)$$

Dabei steht der Index M für das verwendete Medium und ist bei der Versuchsflüssigkeit durch den Index F und bei Wasser durch den Index W zu ersetzen. Der Index i entspricht der jeweiligen Nummer der Kerbe, in der der Reiter sitzt. Die äquidistanten Kerben werden vom Drehpunkt aus gezählt. Die Koeffizienten $a_{i,M}$, $b_{i,M}$ und $c_{i,M}$ geben an, wie viele große, mittlere und kleine Reiter sich in der i -ten Kerbe befinden. Durch den Term in der zweiten Klammer wird der Luftauftrieb an den Reitern berücksichtigt. Das Verhältnis der Beträge der durch die Versuchsflüssigkeit und das Wasser verursachten Drehmomente ist dann

$$\frac{M_{R,F}}{M_{R,W}} = \frac{\sum_{i=1}^{10} (i a_{i,F} + i \frac{b_{i,F}}{10} + i \frac{c_{i,F}}{100})}{\sum_{i=1}^{10} (i a_{i,W} + i \frac{b_{i,W}}{10} + i \frac{c_{i,W}}{100})} . \quad (37)$$

Beispiel:

Beim Versuch mit Wasser ($\vartheta = 16^\circ \text{C}$) ist die Waage durch einen großen, einen mittleren und einen kleinen Reiter, die sich alle bei Kerbe 9 befinden, abgeglichen. Somit gilt $a_{9,W} = b_{9,W} = c_{9,W} = 1$, alle anderen Koeffizienten sind gleich null. Beim Abgleich der Waage mit dem in der Versuchsflüssigkeit eingetauchten Senkkörper liegt ein großer Reiter in Kerbe 7, der mittlere Reiter ist bei Kerbe 8 angebracht und der kleine Reiter ist bei Kerbe 6. Damit sind $a_{7,F} = b_{8,F} = c_{6,F}$. Die anderen Koeffizienten sind gleich null. Es folgt

$$\frac{M_{R,F}}{M_{R,W}} = \frac{7 + 0,8 + 0,06}{9 + 0,9 + 0,09} = \frac{7,86}{9,99} = 0,787 .$$

Nach Gl. (35) mit $\rho_W = 998,9 \text{ kg m}^{-3}$ und bei Vernachlässigung des Luftauftriebs erhält man für die Dichte den Wert $\rho_F = 786 \text{ kg m}^{-3}$.

Die Dichte einiger fester Körper lässt sich mit der Schwebemethode bestimmen. Ein fester Körper schwebt in einer Flüssigkeit mit der Dichte ρ_F , wenn die Beträge von Auftriebskraft F_A und die Gewichtskraft F_G des

Körpers mit dem Volumen V und der Dichte ρ gerade gleich groß sind. Nach dem Prinzip des *Archimedes* ist die Auftriebskraft gleich der Gewichtskraft der vom Körper verdrängten Flüssigkeit und es ergibt sich

$$F_A = \rho_F V_F g = \rho V g = F_G . \quad (38)$$

Da der Körper beim Schweben vollständig eingetaucht ist, sind die Volumina V und V_F gleich groß. Folglich schwebt ein Körper genau dann in einer Flüssigkeit, wenn ihre Dichte mit der des Körpers übereinstimmt. Die Bestimmung der Dichte einer solchen Flüssigkeit ist also zugleich die Bestimmung der Dichte des festen Körpers. Die Schwebemethode ist immer dann zu empfehlen, wenn die Dichte des zu untersuchenden Körpers klein ist (z. B. Kunststoffe).

Die Dichte ρ der bei Aufgabe 2 zu untersuchenden Körper ist größer als die Dichte der verwendeten Flüssigkeiten. Ihre Dichte lässt sich mit Hilfe des Prinzips von *Archimedes* über die Messung der Auftriebskraft ermitteln. Der Versuchsaufbau ist in Abb. M.1.2.2 dargestellt.

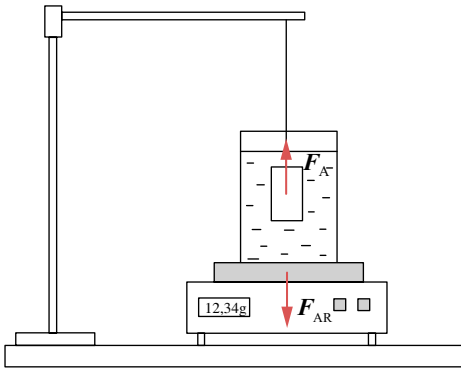


Abb. M.1.2.2 Versuchsaufbau mit elektronischer Laborwaage zur Messung der Dichte mittels Auftriebsmethode

Für die vereinfachte Darstellung der Methode werden zunächst der Luftauftrieb und die durch die Aufhängung verursachte Verdrängung der Flüssigkeit vernachlässigt.

Der Betrag der Auftriebskraft F_A am Körper wird nach dem Wechselwirkungsgesetz nach *Newton* (actio gleich reactio) durch die Reaktionskraft F_{AR} auf die Flüssigkeit über die Waage erfasst. Er entspricht dem Betrag der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit mit der Dichte ρ_F . Da der Körper vollständig eingetaucht ist, gilt nach Gl. (2) $F_A = \rho_F V g$,

wobei $V = \frac{m}{\rho}$ das Volumen und m die Masse des Körpers ist. Es folgt

$$\rho = \frac{m g}{F_A} \rho_F . \quad (39)$$

Genauere Betrachtungen (Berücksichtigung des Luftauftriebs) mit $m^* = m \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho}\right)$ (siehe Gln. (17), (17a)) und der Auftriebskorrektur $\frac{1}{n} V_D g \rho_F$ (siehe Gl. (30)) führen zu

$$F_A = \frac{g}{\rho} \frac{m^*}{\left(1 - \frac{\rho_L}{\rho}\right)} \rho_F + \frac{1}{n} V_D g \rho_F , \quad (40)$$

$$\rho = \frac{m^* g}{\left(\frac{F_A}{\rho_F} - \frac{1}{n} V_D g\right)} + \rho_L . \quad (41)$$

Mit $F_A \approx m_A^* g$ (von weiteren Korrekturen wird abgesehen) folgt mit guter Genauigkeit:

$$\rho = \frac{m^*}{\left(\frac{m_A^*}{\rho_F} - \frac{1}{n} V_D\right)} + \rho_L . \quad (42)$$

Versuchsausführung

Für die Bestimmung der Dichte einer Flüssigkeit bei Aufgabe 1 wird der Senkkörper an einen Haken gehängt und die Waage justiert, bis diese sich im Gleichgewicht befindet.

Anschließend wird der Senkkörper vollständig in Wasser getaucht und die Waage durch Aufsetzen von Reitern erneut abgeglichen. Anzahl und Art der Reiter und ihre Positionen (Nummer der Kerbe) werden protokolliert. Mit einem Thermometer misst man die Wassertemperatur. Danach ist der Senkkörper abzutrocknen, in die zu untersuchende Flüssigkeit zu hängen und erneut die Waage abzugleichen. Die Temperatur der Flüssigkeit sowie Art, Anzahl und Position der Reiter sind wieder zu erfassen. Man berechnet die gesuchte Dichte mit Gl. (35) unter Einbeziehung Gl. (37), wobei der benötigte Wert der Dichte von Wasser bei der Versuchstemperatur dem Anhang A.9 entnommen werden kann. Es ist zu überprüfen, ob der zweite Summand in Gl. (35) vernachlässigt werden kann. Falls das nicht möglich ist, muss der Korrekturwert für den Luftauftrieb berücksichtigt werden. Die Dichte der Luft ist mit Hilfe von Gl. (7) zu ermitteln, wobei der atmosphärische Luftdruck mit einem Barometer ermittelt wird.

Zur Bestimmung der Dichte des festen Körpers mit kleiner Dichte ist eine Flüssigkeitsmischung bzw. eine Kochsalzlösung herzustellen, in der der zu untersuchende Körper schwebt. Dazu benötigt man zwei mischbare Flüssigkeiten. Die Dichte der einen Flüssigkeit muss größer, die der anderen kleiner als die Dichte des festen Körpers sein. Die Herstellung einer homogenen Mischung, in der der feste Körper exakt schwebt, erfordert einige Zeit und Mühe. Man kommt im Allgemeinen schneller zum Ziel, wenn man zunächst eine Mischung anfertigt, in der der Körper mit sehr geringer Geschwindigkeit sinkt, und anschließend eine Mischung, in der der Körper etwa mit gleicher Geschwindigkeit steigt. Die Dichte des festen Körpers ist dann in guter Näherung gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Flüssigkeitsdichten. Die Dichte dieser Flüssigkeiten wird anschließend mit der Mohr-Westphal-Waage bestimmt.

Bei Aufgabe 2 wird zunächst der Wert der Größe m^* durch Auflegen des Körpers auf die elektronische Waage ermittelt. Anschließend wird ein mit destilliertem Wasser gefülltes Glas auf die Waage gestellt. Falls die Möglichkeit besteht, sollte der Anzeigewert durch Drücken der Taste „Tara“ auf null gestellt werden. Der am Haltedraht befestigte Körper wird dann vollständig in das Wasser eingetaucht (Abb. M.1.2.2) und an der Anzeige ist der Differenzwert m_A^* abzulesen. Dann lässt sich die Dichte des Körpers mit Gl. (42) berechnen. Die Dichte der Luft wird unter Verwendung von Gl. (7) bestimmt.

1.3 Resonanzverfahren

Weitere Verfahren für die Bestimmung der Dichte sind Resonanzverfahren. Diese kommen ohne Wägung und Volumenbestimmung aus und können auch bei kleinen Substanzmengen eingesetzt werden. Es wird die Tatsache genutzt, dass die Eigenfrequenz eines mechanischen Schwingers von seiner Masse abhängt. Das Medium der Dichte ρ befindet sich in einem Hohlraum des Messvolumen V im Inneren des Schwingers, der das Messgefäß ist. Für die folgenden Betrachtungen soll sich der Schwinger mit Messgefäß als linearer Federschwinger mit der Masse $m = m_0 + \rho V$ und der Federkonstanten c beschreiben lassen. Die Masse des Schwingers ohne Medium ist m_0 .

Für die Eigenfrequenz f_0 des Federschwingers ohne Messmedium gilt nach M.3.2.2

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m_0}} . \quad (43)$$

Infolge des mitschwingenden Messmediums ergibt sich die Frequenz

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m_0 + \rho V}} . \quad (44)$$

Sind Federkonstante, Masse und Messvolumen des Schwingers bekannt, ist die Dichte des Messmediums mit Gl. (44) bestimmbar. Dividiert man Gl. (43) durch Gl. (44), erhält man den folgenden Zusammenhang zwischen Dichte und Frequenz:

$$\rho = \frac{m_0 f_0^2}{V} \frac{1}{f^2} - \frac{m_0}{V} . \quad (45)$$

Als schwingende Elemente für die Dichtebestimmung von Flüssigkeiten werden meist U-förmig gebogene Hohlrohre verwendet, die zu Schwingungen angeregt werden (Versuch M.1.3.1). Das schwingende System kann aber auch vom Messmedium umgeben sein. Dies nutzt man bei der Dichtebestimmung von Gasen (Versuch M.1.3.2).

1.3.1 Schwingrohr

Aufgabenstellung

Mit dem Schwingrohr ist die Dichte verschiedener Flüssigkeiten zu bestimmen.

Im Versuch wird eine hohle Stimmgabel als Schwingrohr (Schwinggabel, Abb. M.1.3.1) verwendet. Ihre Masse m setzt sich aus der Schwingrohrmasse m_S und der Flüssigkeitsmasse m_F zusammen.

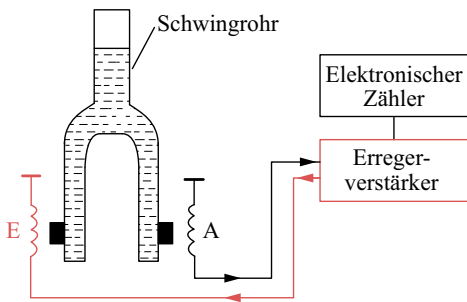


Abb. M.1.3.1 Schema der Versuchsanordnung mit Schwingrohr, Erregerspule E, Wandler A (mit Amplitudenbegrenzung)

Die Anregung der Schwingung erfolgt über

das elektromagnetische Erregersystem (E). Die Schwingungsaufnahme wird über einen elektromagnetischen Wandler (A) realisiert. Nach Verstärkung und Amplitudenbegrenzung wird das Signal einem elektromagnetischen Erregersystem (E) an der Stimmgabel zugeführt (Rückkopplung), um eine stabile Schwingung mit konstanter Amplitude zu erhalten. Bereits kleinste Bewegungen der Stimmgabel führen zu einem Aufschaukeln der Spannung im Erregerverstärker und damit innerhalb kürzester Zeit zu einer stabilen Schwingung.

Da das an der Schwingung beteiligte Flüssigkeitsvolumen V_F für den gegebenen Schwinger konstant ist, ergibt sich mit

$$m = m_S + m_F = K T^2 \quad (46)$$

eine einfache Abhängigkeit der Schwingungsdauer T von der Flüssigkeitsdichte ρ_{Fl} :

$$\begin{aligned} \rho_{Fl} &= \frac{m_F}{V_F} = K \frac{T^2}{V_F} - \frac{m_S}{V_F} \\ &= K_1 T^2 + K_2 . \end{aligned} \quad (47)$$

Die Konstanten K_1 und K_2 können durch Kalibrierung mit Hilfe von zwei Flüssigkeiten bekannter Dichte ρ_1 und ρ_2 erhalten werden. Für K_1 ergibt sich

$$K_1 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{(T_1^2 - T_2^2)} . \quad (48)$$

Damit folgt unmittelbar für die Dichte ρ einer unbekannten Flüssigkeit

$$\rho = K_1 (T^2 - T_R^2) + \rho_R . \quad (49)$$

T_R und ρ_R sind Werte einer Referenzflüssigkeit.

Die bei der Herleitung von Gl. (49) gemachte Annahme einer linearen Schwingung ist insbesondere für niedrigviskose Flüssigkeiten erfüllt. Im Falle hochviskoser Flüssigkeiten können Scherkräfte auftreten, die nicht mit

diesem vereinfachten Ansatz berücksichtigt werden können. Dann ist die Kalibrierung des Schwingrohres nur mit Flüssigkeiten bekannter Dichte und ähnlich hohen Viskositäten möglich.

Versuchsausführung

Nach dem Einschalten des digitalen Zählers und des Erregerverstärkers, wird die Schwinggabel mit Hilfe einer Vakuumpumpe sorgfältig ausgepumpt, um mögliche Flüssigkeitsreste zu beseitigen. Nachdem die Schwinggabel mit den Permanentmagneten an den Schwingrohren zwischen die Feldspulen (Erreger- und Wandler-spule) gebracht wurde, kann die Ausbildung stabiler Eigenschwingungen mit einem Oszilloskop kontrolliert werden. Dazu wird die am Ausgang des Erregerverstärkers liegende Spannung auf den Y-Eingang des Oszilloskops gegeben, auf dessen Schirm ein sinusförmiges Signal erscheinen muss.

Um die notwendige hohe Messgenauigkeit zu erreichen, muss die Zeit für hinreichend viele Schwingungen bestimmt werden, was durch die Einstellung entsprechend großer Messzeiten erreicht werden kann.

Nach dem Auspumpen bzw. Füllen des Schwingrohrs ist vor jeder neuen Messung die Einstellung des Temperaturgleichgewichts abzuwarten. Als Kontrolle werden dazu Frequenzmessungen durchgeführt. Die Schwankungen der Frequenz sollen nach der Einstellung des Temperaturgleichgewichts nicht größer als der $5 \cdot 10^{-6}$ -te Teil des mittleren Messwerts sein. Wenn das nach einigen Minuten nicht der Fall ist, sind die Messungen trotzdem zu beginnen. Dann muss diese systematische Abweichung bei der Ermittlung der Messunsicherheit diskutiert werden. Die Schwingrohrkonstante K_1 wird nach Gl. (48) mit Hilfe von zwei Referenzflüssigkeiten mit bekannten Dichten (ρ_1 , ρ_2) ermittelt. Die Temperaturabhängigkeit der Dichte der Referenzflüssigkeiten wird am Arbeitsplatz gegeben.

1.3.2 Stimmgabeldichtemesser

Aufgabenstellung

Mit einem Stimmgabeldichtemesser sind die Druckabhängigkeit der Dichte, die relativen Gasdichten und die molare Masse von zwei verschiedenen Gasen zu bestimmen.

Das Gas wird in eine Messkammer eingeleitet, in der sich eine Stimmgabel befindet, die zum Schwingen angeregt wird (Abb. M.1.3.2). Die Zinken einer Stimmgabel führen Biegeschwingungen aus, die sich allgemein mit der Beziehung aus M.4.0 beschreiben lassen:

$$f_n = \frac{m_n^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{E I_\eta}{\rho_0 A}} \quad (50)$$

Dabei sind m_n der entsprechende Parameter für die n -te angeregte Ordnung, I_η das Flächenträgheitsmoment, A die Querschnittsfläche und b die Zinkenbreite. Die Größen a und l kennzeichnen Zinkenstärke und Zinkenlänge. Die Größen ρ_0 und E stehen für Materialdichte und Elastizitätsmodul der Zinken. Mit $I_\eta = (1/12) b a^3$ (Anhang A.14),

$A = a b$ und $m_1 = 1,875$ gilt für die Frequenz der Grundschiwingung ($n = 1$, $f_0 = f_1$) einer Stimmgabel

$$f_0 = k \frac{a}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \quad (51)$$

k bezeichnet eine Konstante, die sich aus den obigen Größen ergibt. Für die Messung wird die Tatsache genutzt, dass die Eigenfrequenz einer Stimmgabel von der Dichte ρ des sie umgebenden Gases abhängt. Dieser Sachverhalt lässt sich mit der folgenden Beziehung gut beschreiben:

$$f = k \frac{a}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho_0 + \rho}} \quad (52)$$

Der Ansatz von Gl. (52) geschieht unter der

Annahme, dass etwa ein Gasvolumen in der Größenordnung des Volumens der schwingenden Gabelzinken mitschwingt. Die Division der Gl. (51) durch Gl. (52) führt zu

$$\frac{f_0}{f} = \sqrt{\frac{\rho_0 + \rho}{\rho_0}} \quad (53)$$

Damit folgt für die Dichte des Gases

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{f_0^2}{f^2} - 1 \right) \quad (54)$$

Versuchsausführung

Die Abb. M.1.3.2 zeigt das Schema der Versuchsanordnung. Die Aufgaben des elektronischen Teils der Messanordnung umfassen die Anregung erzwungener Schwingungen der Stimmgabel (Erregerverstärker V, Erregerspule S2 und Wanderspule S1), die Präzisionsmessung der Schwingungsfrequenz (Digitalzähler Z) und die digitale Messwert- erfassung von Temperatur (Temperatursensor TS mit Anzeigeeinheit TA) und Druck (Drucksensor DS mit Anzeigeeinheit DA).

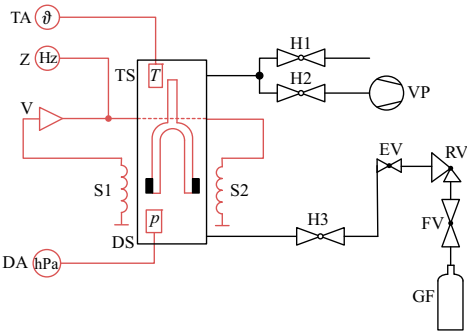


Abb. M.1.3.2 Schema der Versuchsanordnung

Da die Dichte des Gases klein gegen die Materialdichte der Stimmgabel ist, sind die Frequenzunterschiede klein. Das erfordert eine hohe Genauigkeit bezüglich der Frequenzmessung. Die Größen Zinkenstärke, Zinkenlänge, Materialdichte und Elastizi-

tätsmodul hängen von der Temperatur ab. Mit einer speziellen Eisen-Nickel-Chrom-Legierung (10 % Cr und 36 % Ni) kann man bei einer maximalen Temperaturänderung von 0,1 K die relativen Abweichungen auf weniger als 10^{-6} verringern und somit eine hohe Frequenzgenauigkeit erreichen. An der Stimmgabel sind für die Schwingungsanregung zusätzlich noch Magnete an den Enden der Zinken sowie Bleche zur Verstärkung des Effekts angebracht und die Berechnung der Eigenfrequenz nach Gl. (51) ist nicht möglich. Bei der Ausführung des Versuches ist es daher zweckmäßig, Gl. (54) zu modifizieren:

$$\rho = A \frac{1}{f^2} + B \quad (55)$$

Die Bestimmung der Konstanten A und B erfolgt dann durch Messungen der Frequenz mit Luft bei verschiedenen Gasdrücken im Messraum und anschließender linearer Regression (Abb. M.1.3.3), wobei man die Dichte mit Gl. (7) berechnet.

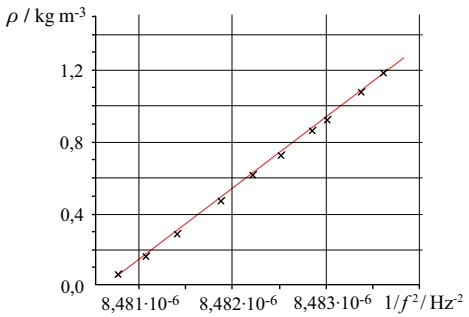


Abb. M.1.3.3 Zur Bestimmung der Konstanten A und B nach Gl. (55) mit Ausgleichsgerade

Unter der Voraussetzung, dass die Temperaturen und Gasdrücke für Luft und das zu untersuchende Gas gleich groß sind, kann die Bestimmung der relativen Gasdichte direkt mit Gl. (11) erfolgen.

Die molare Masse M der Gase ergibt sich nach Gl. (16). Trägt man die Dichte des Gases über dem Druck graphisch auf, kann die

molare Masse M aus dem Anstieg ($d\rho/dp$) der Ausgleichsgeraden bestimmt werden:

$$M = RT \left(\frac{d\rho}{dp} \right). \quad (56)$$

Die Anlage ist zu Beginn der Messung mit einer Vakuumpumpe zu evakuieren, um Restgase aus vorherigen Messungen zu entfernen. Dazu sind die Hähne H1 und H3 geschlossen zu halten. Nach dem Evakuieren sind Hahn H2 zu schließen und die Vakuumpumpe abzuschalten. Für die Messung mit Luft kann über Hahn H1 nun Luft bis zum gewünschten Druck eingelassen werden.

Bei der Messung mit dem Versuchsgas bleiben das Einstell-(EV) und das Reduzierventil (RV) zunächst geschlossen. Das Flaschenventil (FV) an der Druckgasflasche (GF) wird um eine viertel Umdrehung geöffnet. Durch Öffnen des Reduzierventils wird ein geringer Überdruck eingestellt. Anschließend ist die Schlauchverbindung zwischen dem Einstellventil und dem Hahn H3 herzustellen. Zum Durchspülen der Anlage wird über den Hahn H3 bei geöffnetem Hahn H1 das Versuchsgas durch Öffnen des Einstellventils EV in die Anlage geleitet. Der Hahn H2 ist dabei geschlossen. Der Spülvorgang wird beendet, indem man zuerst das Flaschenventil und nach Abbau des Überdrucks anschließend die Hähne H1 und H3 sowie Einstell- und Reduzierventil schließt. Durch diese Maßnahmen erreicht man, dass der Druck des Versuchsgases in der Anlage dem äußeren Luftdruck entspricht.

Soll die Messung bei niedrigerem Druck erfolgen, lässt sich mit der Vakuumpumpe VP nach vorheriger Öffnung von Hahn H2 ein Teil des Versuchsgases aus dem Messraum auspumpen. Dies ist mit dem Druckmessgerät zu kontrollieren. Nach Schließen des Hahns H2 kann mit der Messung beim eingestellten Druck begonnen werden. Nach Abschluss der Messungen ist die gesamte Anlage durch Öffnen der Hähne H1, H2 und H3 zu belüften.

2 Schwingungen

2.0 Grundlagen

Schwingungen sind zeitlich periodische Vorgänge. Das einfachste Beispiel ist der lineare harmonische Oszillator (Feder-schwinger), andere, im Rahmen dieses Buches behandelte mechanische Systeme sind das mathematische und das physikalische Pendel, der Drehtisch, das Torsionspendel sowie das Drehpendel.

2.0.1 Bewegungsgleichungen

Bei einer mechanischen Schwingung finden Energieumwandlungen von potentieller in kinetische Energie statt. Bei vernachlässigbarer Reibung bleibt dabei die Amplitude der Schwingung konstant (ungedämpfte Schwingung) und es gilt die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c x = 0 \quad (1)$$

bzw.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1a)$$

mit der Eigenkreisfrequenz (Kennkreisfrequenz) der ungedämpften Schwingung

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (2)$$

In Gl.(2) bezeichnet m die Masse des schwingenden Systems und c die Federkonstante. Die momentane Auslenkung (Elongation $x(t)$) ergibt sich als Lösung von Gl. (1a):

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (3)$$

mit der Amplitude \hat{x} . In Gl.(3) ist φ_0 der Phasenwinkel zur Zeit $t = 0$. In analoger Weise stellt auch die entsprechende Sinusfunktion eine Lösung der Differentialglei-

chung (1a) dar. Bei nicht vernachlässigbarer Reibung wird die Schwingungsenergie zunehmend in Wärme umgewandelt. Für die dann gedämpfte Schwingung lautet die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + c x = 0 \quad (4)$$

mit der Reibungskonstante r . Unter Berücksichtigung von Gl. (2) und durch Einführung der Abkling- bzw. Dämpfungskonstante $\delta = r/2m$ erhält man

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (4a)$$

Eine Lösung der Gl. (4a) nach Anhang A.2.2 ist

$$x(t) = \hat{x} e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (5)$$

Dabei ist $\omega = \omega_0$ die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (6)$$

Bei sehr großer Dämpfung ($\delta^2 \gg \omega_0^2$) kommt keine Schwingung zustande. Der Körper kehrt nach der Anfangsauslenkung langsam in die Ruhelage zurück (Kriechfall). Wirkt auf ein schwingungsfähiges System mit der Eigenkreisfrequenz ω_0 eine äußere periodische Kraft $F = F_0 \cos \omega t$, werden erzwungene Schwingungen beobachtet. In diesem Fall lautet die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + c x = F_0 \cos \omega t, \quad (7)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (7a)$$

Eine Lösung dieser Gleichung (A.2.2) lautet

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{\cos(\omega t - \theta)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}. \quad (8)$$

Die Größe θ ist die Phasenverschiebung zwischen der erzwungenen Schwingung und der Erregerschwingung.

Nach dem Einschwingvorgang wird das schwach gedämpfte, schwingungsfähige System mit der vom Erreger erzwungenen Frequenz schwingen und die entsprechende Eigenkreisfrequenz ist

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (9)$$

Hat die Kosinusfunktion in Gl. (8) den Wert eins; ergibt sich die frequenzabhängige Amplitude $A(\omega)$. Diese wird durch den Betrag der Erregerkraft, die Differenz zwischen den Frequenzen ω und ω_0 sowie die Dämpfungskonstante bestimmt, so dass gilt:

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta \omega)^2}}. \quad (10)$$

In den folgenden Beispielen (außer Drehpendel, M.2.3) werden nur Systeme mit vernachlässigbarer Dämpfung betrachtet.

Ein physikalisches Pendel (Abb. M.2.0.1) ist ein starrer Körper mit einer fest vorgegebenen Drehachse (A), die nicht durch den Massenmittelpunkt des Körpers geht. Nach einer Auslenkung führt das Pendel unter dem Einfluss der Schwerkraft Schwingungen um seine Ruhelage aus. In den folgenden Überlegungen wird vorausgesetzt, dass die Reibung im Achsenlager vernachlässigbar klein ist.

Der senkrechte Abstand des Massenmittelpunkts (S) eines Körpers (K) von der Drehachse (A) soll mit s_A bezeichnet werden (Abb. M.2.0.1). Ein beliebiges Massenelement dm habe den senkrechten Abstand r von der Drehachse. Zwischen r und s_A sei der konstante Winkel α . Bildet s_A mit der Vertikalen den Winkel φ , lautet die Bewegungsgleichung für das Massenelement

$$dm r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -dm g \sin(\alpha + \varphi). \quad (11)$$

Durch Multiplikation von Gl.(11) mit dem Kraftarm r und Integration über den gesamten Körper erhält man die Gleichung für das resultierende Drehmoment

$$\int_K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} r^2 dm = -g \int_K r \sin(\alpha + \varphi) dm. \quad (11a)$$

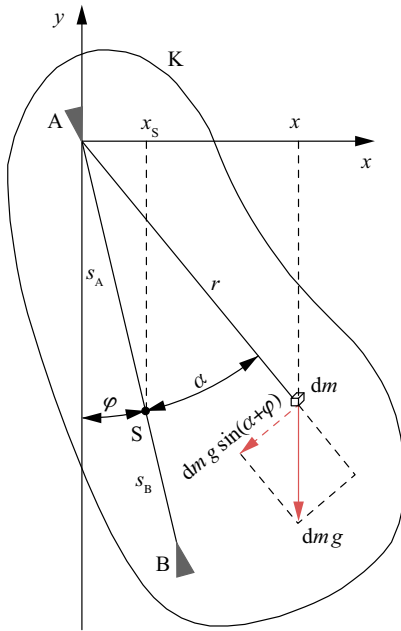


Abb. M.2.0.1 Physikalisches Pendel

Da der Körper starr sein soll, ist die Winkelbeschleunigung $d^2\varphi/dt^2$ für alle Massenelemente gleich und kann vor das Integral geschrieben werden. Die Größe

$$I_A = \int_K r^2 dm \quad (12)$$

ist das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehachse. Die Einheit des Trägheitsmomentes ist kg m^2 . Nach der Definition des Massenmittelpunkts gilt

$$\begin{aligned} \int_K r \sin(\alpha + \varphi) dm &= \int_K x dm \\ &= m x_S = m s_A \sin \varphi, \end{aligned} \quad (13)$$

wobei m die Masse des Pendels ist. Mit den Gln. (12) und (13) folgt aus Gl.(11a) die Bewegungsgleichung des physikalischen Pendels

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{m_{SA}g}{I_A}\sin\varphi. \quad (14)$$

Die Größe

$$D_A = m s_A g \quad (15)$$

hat die Dimension eines Drehmoments und wird als Direktions- oder Richtmoment des Pendels bezeichnet.

Das mathematische Pendel stellt eine Idealisierung dar. Man denkt sich die gesamte Masse im Massenmittelpunkt vereinigt und sieht die Bindung an die Drehachse als „masselos“ an. Dieser Idealisierung entspricht näherungsweise das Fadenpendel, das aus einer Metallkugel besteht, die an einem dünnen Faden der Länge l aufgehängt ist. Die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels lautet

$$m l \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -m g \sin \varphi \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi. \quad (16)$$

Die Gln. (14) und (16), deren Lösung elementar nicht möglich ist, vereinfachen sich für kleine Auslenkungen $|\varphi| < 5^\circ$:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{m_{S_A} g}{I_A} \varphi, \quad (14a)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi. \quad (16a)$$

In den Gln. (14a) und (16a) wurde der Sinus durch das Argument ersetzt.

Die bisherigen Betrachtungen gelten nur für Bewegungen im Vakuum. Schwingt das Pendel in Luft (Dichte ρ_1), ist der Auftrieb (Gl. (M.1-2)) zu

berücksichtigen. Die rücktreibende Kraft auf ein Massenelement hat dann den Betrag

$$dm g \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho}\right) \sin(\alpha + \varphi)$$

und an die Stelle der Gl. (11a) tritt

$$\int_K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} r^2 dm = -g \int_K \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho}\right) r \sin(\alpha + \varphi) dm .$$

Setzt sich das Pendel aus N homogenen Teilkörpern K_i zusammen, deren Massenmittelpunkte S_i auf einer die Drehachse (A) schneidenden Geraden liegen und deren Massen bzw. Dichten mit m_i bzw. ρ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) bezeichnet werden sollen, ergibt sich

$$\int_K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} r^2 dm = -g \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_i}\right) \int_{K_i} r \sin(\alpha + \varphi) dm$$

oder

$$I_A \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -g \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_i}\right) m_i s_{Ai} \sin \varphi . \quad (14b)$$

Hierbei ist s_{Ai} der Abstand des Massenmittelpunktes des i -ten Teilkörpers von der Drehachse. Die Berücksichtigung des Auftriebs bedeutet also in diesem Falle: Man ersetzt in Gl. (14) sowie in den daraus gewonnenen Gln. (14a) und (22) den Ausdruck $m s_A$ durch

$$\sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_i}\right) m_i s_{Ai} . \quad (17)$$

Haben alle Teile des Pendels die gleiche Dichte ρ , dann vereinfacht sich Gl. (17) zu

$$m s_A \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho}\right) . \quad (17a)$$

Unter einem Drehtisch versteht man einen starren Körper, der um eine vertikale Achse gedreht werden kann. Bindet man dieses System durch eine Spiralfeder an eine Ruhelage, führt es nach einer Auslenkung Schwingungen aus. Wenn die elastischen Deformationen der Feder hinreichend klein sind, kann man das rücktreibende Drehmoment der

Auslenkung φ proportional setzen. Bei Vernachlässigung der Reibung im Achsenlager lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{D}{I} \varphi . \quad (18)$$

Dabei ist I das Trägheitsmoment des Drehtisches um die vorgegebene Achse, und der Proportionalitätsfaktor D ist das Direktionsmoment (Richtmoment) der Feder.

Ein Torsionspendel ist ein starrer Körper, der z. B. an einem Draht oder einem Band aufgehängt ist. Nach einer Verdrehung des Drahts bzw. Bands führt das Torsionspendel Dreh-schwingungen aus. Für sehr kleine Scherwinkel kann man annehmen (Gl. (M.3-26)), dass das rücktreibende Drehmoment der Auslenkung aus der Ruhelage proportional ist. Die Bewegung des Torsionspendels wird daher auch durch Gl. (18) beschrieben. Die Bewegungsgleichungen (14a), (16a) und (18) sind homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\omega^2 \varphi . \quad (19)$$

Die vollständige mathematische Lösung enthält zwei Integrationskonstanten (c_1, c_2):

$$\varphi = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t , \quad (20)$$

die aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind (Anhang A.2). Dem Versuchsbeginn entsprechen $\varphi = \varphi_0$ und $d\varphi/dt = 0$ für $t = 0$. Damit lautet Gl. (20)

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t = \varphi_0 \cos \left(2\pi \frac{t}{T}\right) . \quad (20a)$$

T ist die Schwingungsdauer bei sehr kleinen Auslenkungen bzw. bei geringen elastischen Deformationen.

Wenn man die Schwingungsdauer messen will, wählt man den Augenblick als Anfang der Zeitmessung, in dem das Pendel die

maximale Geschwindigkeit hat, d. h., es ist

$$\varphi = 0, \frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{\max}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{\max}}{\omega} \sin \omega t = \varphi_0 \sin \omega t \\ &= \varphi_0 \sin \left(2\pi \frac{t}{T} \right). \end{aligned} \quad (20b)$$

Durch Einsetzen von Gl. (20a) oder (20b) in die Gln. (16a), (14a) bzw. (18) findet man für das Fadenpendel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (21)$$

für das physikalische Pendel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{m s_A g}} \quad (22)$$

und für den Drehtisch oder das Torsionspendel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (23)$$

Die mathematische Behandlung der Gln. (14) und (16) liefert für die Schwingungsdauer

$$\begin{aligned} T' &= T \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Für T ist beim Fadenpendel Gl. (21) und beim physikalischen Pendel Gl. (22) einzusetzen. Wenn die Amplitude φ_0 kleiner als 0,1 (d. h. kleiner als 5°) ist, gilt in sehr guter Näherung

$$T' = T \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 \right). \quad (24a)$$

2.0.2 Satz von Steiner

Das Trägheitsmoment eines starren Körpers bezogen auf die Drehachse (A) ist gleich dem Trägheitsmoment bezogen auf die durch den Massenmittelpunkt gehende, zur Drehachse parallele und durch den Schwerpunkt des Körpers verlaufende Achse (S), vermehrt um das Produkt aus der Masse des Körpers und dem Quadrat des senkrechten Abstands der beiden Achsen.

Zum Beweis dieses Satzes betrachtet man den in Abb. M.2.0.2 dargestellten ebenen Schnitt durch den Körper.

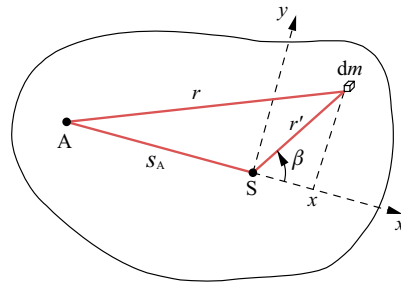


Abb. M.2.0.2 Zum Satz von Steiner

Der Ursprung des Koordinatensystems x, y, z (die z -Achse stimmt mit der Schwerpunktsachse überein) soll im Massenmittelpunkt des Körpers liegen. Nach dem Kosinussatz gilt

$$\begin{aligned} r^2 &= r'^2 + s_A^2 + 2s_A r' \cos \beta \\ &= r'^2 + s_A^2 + 2s_A x. \end{aligned}$$

Dann ist das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehachse A

$$\begin{aligned} I_A &= \int_K r^2 dm = \int_K r'^2 dm + s_A^2 \int_K dm + \\ &\quad + 2s_A \int_K x dm, \end{aligned}$$

und wegen $\int_K x dm = x_S m = 0$ erhält man

$$I_A = I_S + m s_A^2. \quad (25)$$

2.0.3 Reduzierte Pendellänge

Ein physikalisches Pendel hat die gleiche Schwingungsdauer wie ein mathematisches Pendel der Fadenlänge

$$l_A = \frac{I_A}{m s_A} . \quad (26)$$

Dabei ist die Größe l_A die der Achse A entsprechende reduzierte Pendellänge.

Gegeben sei ein physikalisches Pendel mit den parallelen Drehachsen A und B (Abb. M.2.0.1). Der Massenmittelpunkt soll auf der Geraden von A nach B liegen, und der Achsenabstand sei $l = s_A + s_B$.

Es soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen die Schwingungsdauern um diese beiden Achsen übereinstimmen. Aus

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{m s_A g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_A}{g}} \quad \text{bzw.}$$

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{I_B}{m s_B g}} = T_B$$

folgt bei Verwendung des Steiner'schen Satzes

$$\begin{aligned} l_A &= \frac{I_B}{m s_B} = \frac{I_S + m(l - s_A)^2}{m(l - s_A)} \\ &= \frac{I_A + ml^2 - 2ml s_A}{m(l - s_A)} , \\ l_A &= \frac{ml_A s_A + ml^2 - 2ml s_A}{m(l - s_A)} \end{aligned}$$

oder

$$l^2 - (l_A + 2s_A)l + 2l_A s_A = 0 \quad (27)$$

Die quadratische Gleichung (27) kann als

$$(l - l_A)(l - 2s_A) = 0 \quad (28)$$

geschrieben werden. Ist $l \neq 2s_A$, muss $l = l_A$ sein, d. h. der Achsenabstand, bei dem die Schwingungsdauern gleich sind, ist gleich der reduzierten Pendellänge. Für $l = 2l_A$, d. h., der Massenmittelpunkt halbiert die Verbindungslinie der beiden Achsen, ist der Schluss $l = l_A$ jedoch falsch.

2.1 Fadenpendel

Aufgabenstellung

Die Schwerebeschleunigung g ist mit dem Fadenpendel zu bestimmen. Die relative Messunsicherheit des Ergebnisses soll 1 % nicht überschreiten.

Eine Metallkugel hängt an einem dünnen Faden vor einer Spiegelskala mit einer Millimeterteilung. Der Nullpunkt des Maßstabs soll mit der Drehachse übereinstimmen. Die Fadenlänge l ist der Abstand der Drehachse vom Mittelpunkt der Kugel. Regt man das Pendel zu Schwingungen kleiner Amplitude an ($\varphi < 5^\circ$), liefert Gl. (21) den Zusammenhang zwischen der Schwingungsdauer T , der Fadenlänge l und der Schwerebeschleunigung g :

$$g = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 l . \quad (29)$$

Das Fadenpendel ist streng genommen ein physikalisches Pendel, das in einem materiellen Medium (Luft) schwingt. Es empfiehlt sich zu prüfen, ob die verschiedenen Vernachlässigungen tragbar sind, die man bei der Verwendung der Gleichungen für ein im Vakuum schwingendes mathematisches Pendel macht.

Das Trägheitsmoment I des Pendels setzt sich additiv aus dem der Kugel I_K und dem des Fadens I_F zusammen. Da das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel mit dem Radius R und der Masse m_K bezogen auf eine durch den Kugelmittelpunkt gehenden Achse $I_0 = (2/5) m_K R^2$ ist, erhält man nach Gl. (25)

$$I_K = m_K l^2 + \frac{2}{5} m_K R^2 = m_K l^2 \left[1 + \frac{2}{5} \left(\frac{R}{l} \right)^2 \right].$$

Das Trägheitsmoment I_F des Fadens der Länge l_F und der Masse m_F bezogen auf die gegebene Drehachse ist $I_F = \frac{1}{3} m_F l^2$. Damit folgt mit $I = I_K + I_F$ und $l_F \approx l$

$$I = m_K l^2 \left[1 + \frac{2}{5} \left(\frac{R}{l} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{m_F}{m_K} \right]. \quad (30)$$

Bezeichnet man die Dichte der Kugel mit ρ_K und die des Fadens mit ρ_F , folgt nach Gl. (14b)

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -g m_K l \sin \varphi \cdot \left[1 - \frac{\rho_L}{\rho_K} + \frac{1}{2} \frac{m_F}{m_K} \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_F} \right) \right]. \quad (31)$$

Setzt man I gemäß Gl. (30) in Gl. (31) ein und beschränkt die Betrachtungen auf sehr kleine Auslenkungen, erhält man mit

$$l^* = l \frac{1 + \frac{2}{5} \left(\frac{R}{l} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{m_F}{m_K}}{1 - \left[\frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{1}{2} \frac{m_F}{m_K} \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_F} \right) \right]}$$

die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l^*} \varphi.$$

Für die Schwerebeschleunigung gilt daher Gl. (29) mit l^* statt l . Da $(R/l)^2$, m_F/m_K , ρ_L/ρ_K und ρ_L/ρ_F sehr klein gegen eins sind, sollen alle Produkte solcher Ausdrücke vernachlässigt werden. In dieser Näherung ist

$$g = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 l \left[1 + \frac{2}{5} \left(\frac{R}{l} \right)^2 + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{1}{6} \frac{m_F}{m_K} \right]. \quad (32)$$

Versuchsausführung

Die Länge l des Fadenpendels ermittelt man aus der Länge des Fadens l_F und dem Radius R der Kugel: $l = l_F + R$. Beide Größen lassen sich mit hinreichender Genauigkeit mit mechanischen Messmitteln bestimmen. Zur Messung der Schwingungsdauer T werden eine Lichtschrankenordnung und ein Digitalzähler verwendet. Bei manueller Zeitmessung mit einer elektronischen Stoppuhr misst man mehrmals die Zeit für eine größere Anzahl von Schwingungen.

Der Versuch ist bei verschiedenen Fadenlängen (l_i , $i = 1, \dots, n$) zu wiederholen. Die Berechnung von g erfolgt mit Hilfe von Gl. (29). Da die Messungen bei großen Fadenlängen genauer als die bei kleinen sind, bestimmt man den gewichteten Mittelwert

$$\bar{g} = \frac{l_1 \bar{g}_1 + l_2 \bar{g}_2 + \dots + l_n \bar{g}_n}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}.$$

Es ist zu prüfen, ob die Verwendung von Gl. (29) anstelle von Gl. (32) zur Bestimmung von g gerechtfertigt ist. Dazu berechnet man den Wert in den eckigen Klammern in Gl. (32) und ermittelt dessen relative Abweichung zu 1.

2.2 Reversionspendel

Aufgabenstellung

1. Die Schwerebeschleunigung g ist mit dem Reversionspendel zu bestimmen. Die relative Messunsicherheit von g soll kleiner als 0,1 % sein.

2. Die Abhängigkeit der Schwingungsdauer T' vom Auslenkwinkel φ_0 ist mit dem Reversionspendel bei einer festen Lage des Laufgewichts experimentell zu ermitteln, um die Gültigkeit von Gl. (24a) nachzuweisen.

Das Reversionspendel besteht im Allgemeinen aus einem Metallstab, der um zwei parallele Achsen A und B gedreht werden kann. Die Achsen haben den fest vorgegebenen Abstand l (Abb. M.2.2.1). Zwischen den

Achsen befindet sich ein kleines Laufgewicht L der Masse m_L . Durch Verschieben von L lässt sich die Schwingungsdauer des Pendels innerhalb gewisser Grenzen variieren. In der Nähe eines der beiden Enden des Stabs ist ein Zusatzkörper K (Masse m_K) angebracht. Wenn m_K hinreichend groß gegen m_L ist, kann man den Abstand y so wählen, dass für jede mögliche Lage des Laufgewichts ($0 < x < l$) gilt:

$$0 < s_A < l/2. \quad (33)$$

Dabei soll mit s_A der Abstand des Massenzentrums S des Pendels von der Drehachse A bezeichnet werden. Wenn bei einer bestimmten Stellung x des Laufgewichts die Schwingungsdauer um die Achse A gleich der um die Achse B ist, entspricht der Achsenabstand l der reduzierten Pendellänge. Setzt man

$$T_A = T_B = T, \quad (34)$$

gilt für die Schwerebeschleunigung

$$g = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 l. \quad (35)$$

Die bisherigen Betrachtungen gelten streng für ein im Vakuum schwingendes Pendel, dessen Amplitude unendlich klein ist. In Wirklichkeit schwingt das Pendel in Luft mit endlicher Amplitude. Nimmt man an, dass das Pendel ein homogener Körper ist, d. h., dass alle Teile des Pendels die gleiche Dichte ρ haben, wird die Pendelbewegung durch Gl. (14b) mit $N=1$ beschrieben. Aus den Gln. (24a) und (22) in Verbindung mit Gl. (17a) folgt für die tatsächliche Schwingungsdauer um die Achse A

$$\begin{aligned} T_A^* &= 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{m s_A g \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho}\right)}} \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2\right), \\ &= T_A \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2\right) \left(\sqrt{1 - \frac{\rho_L}{\rho}}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Eine analoge Beziehung gilt für die tatsächliche Schwingungsdauer um die Achse B . Im Experiment wird $T_A^* = T_B^* = T^*$ bestimmt.

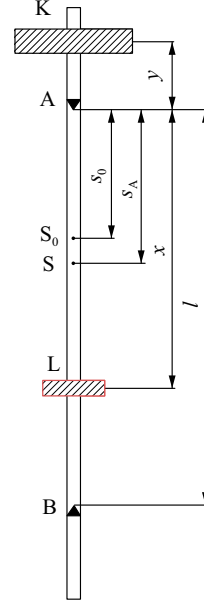


Abb. M.2.2.1 Reversionspendel

Dann gilt Gl. (34) mit

$$T = T^* \sqrt{1 - \frac{\rho_L}{\rho}} \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2\right)^{-1}. \quad (36)$$

Setzt man T nach Gl. (36) in Gl. (35) ein, ergibt sich für die Schwerebeschleunigung

$$g = \left(\frac{2\pi}{T^*} \right)^2 l \frac{\left(1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2\right)^2}{1 - \frac{\rho_L}{\rho}}.$$

Wenn man bedenkt, dass $\rho_L/\rho < 10^{-3}$ und für $\varphi_0 < 0,1$ (Einheit rad) auch $(1/16) \varphi_0^2 < 10^{-3}$ ist, sind alle Produkte solcher Größen vernachlässigbar und es gilt

$$g = \left(\frac{2\pi}{T^*} \right)^2 l \left[1 + \frac{1}{8} \varphi_0^2 + \frac{\rho_L}{\rho} \right]. \quad (37)$$

Der obigen Beschreibung liegt die Annahme zugrunde, dass mindestens eine Stellung des Laufgewichts in dem Intervall $0 < x < l$ existiert, für die die Schwingungsdauern um die Achsen A und B gleich sind. Deshalb ist es von Interesse, die Bedingungen zu untersuchen, unter denen Gl.(34) erfüllt werden kann.

[Dazu sind die Massenmittelpunktsabstände s_A und s_B , die Trägheitsmomente I_A und I_B und anschließend die Schwingungsdauern T_A und T_B als Funktionen von x darzustellen. Es gilt

$$m s_A = m_0 s_0 + m_L x \quad \text{und}$$

$$m s_B = m(l - s_A) = m_0(l - s_0) + m_L(l - x) .$$

Dabei bedeuten m die Masse des gesamten Pendels, m_0 die Masse des Pendels ohne Laufgewicht und s_0 den Abstand zwischen dem Massenmittelpunkt S_0 des Pendels ohne Laufgewicht und der Achse A. Für die Trägheitsmomente folgt:

$$I_A = I_0 + m_0 s_0^2 + I_L + m_L x^2 \quad \text{und}$$

$$I_B = I_0 + m_0(l - s_0)^2 + I_L + m_L(l - x)^2 .$$

I_0 ist das Trägheitsmoment des Pendels ohne Laufgewicht bezogen auf die durch S_0 gehende, zu A und B parallele Drehachse, und I_L ist das Trägheitsmoment des Laufgewichtes bezogen auf die zu A und B parallele Achse, die durch den Massenmittelpunkt des Laufgewichts geht. Mit der Abkürzung

$$I = I_0 + m_0 s_0^2 \quad (38)$$

erhält man für die Schwingungsdauern

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{m s_A g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{I + m_L x^2}{m_0 s_0 + m_L x}} , \quad (39)$$

$$T_B = 2\pi \sqrt{\frac{I_B}{m s_B g}}$$

$$T_B = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{I + m_0 l(l - 2s_0) + m_L(l - x)^2}{m_0(l - s_0) + m_L(l - x)}} \quad (40)$$

Die Forderung $T_A = T_B$ führt auf die nachstehende Gleichung dritten Grads in x :

$$\begin{aligned} & 2m_L^2 x^3 - m_L [m_0(l - 2s_0) + 3m_L l] x^2 \\ & + m_L [2l + m_0 l(l - 4s_0) + m_L l^2] x \\ & - [I - m_0 l s_0] [m_0(l - 2s_0) + m_L l] = 0 . \end{aligned} \quad (41)$$

Eine der drei Lösungen von Gl.(41) kann man sofort angeben. Für $x = x_3$ sei $s_A = l/2$ (Gl. (28)). Dann gilt

$$m \frac{l}{2} (m_0 + m_L) \frac{l}{2} = m_0 s_0 + m_L x_3 ,$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{m_0}{m_L} (l - 2s_0) + l \right\} .$$

Da die Ungleichung (33) erfüllt sein soll, ist x_3 größer als l , d. h., diese Stellung des Laufgewichts kommt im Experiment nicht vor. Dividiert man Gl.(41) durch $x - x_3$, erhält man die quadratische Gleichung

$$x^2 - l x + \frac{I - m_0 s_0 l}{m_L} = 0 , \quad \text{deren Lösungen lauten}$$

$$x_{1,2} = \frac{l}{2} (1 \pm \varepsilon) , \quad \varepsilon = + \sqrt{1 - \frac{I - m_0 s_0 l}{m_L \left(\frac{l}{2}\right)^2}} . \quad (42)$$

Gl.(42) besagt, dass in dem Intervall $0 < x < l$ symmetrisch zu $x = l/2$ zwei Stellungen x_1 und x_2 des Laufgewichts zu finden sind, bei denen der Achsenabstand l der reduzierten Pendellänge entspricht, sofern die in Gl. (38) definierte Größe I der Bedingung

$$I = m_0 s_0 l + m_L \left(\frac{l}{2}\right)^2 (1 - \varepsilon^2) \quad (43)$$

mit $0 < \varepsilon < 1$ genügt. Gl.(43) lässt sich durch geeignete Wahl der Masse und der Anordnung des Zusatzkörpers K stets so erfüllen, dass die Ungleichung (33) erhalten bleibt. Es kann gezeigt werden, dass die Funktionen $T_A(x)$ und $T_B(x)$, die durch die Gln. (39) und (40) gegeben sind, nur je einen Extremwert, und zwar ein Minimum haben. Die beiden Minima liegen unter den oben gemachten Voraussetzungen in der Nähe des Werts $x = l/2$. Abb. M.2.2.2 zeigt den prinzipiellen Verlauf der Funktionen $T_A(x)$ und $T_B(x)$.]

Versuchsausführung

Bei Aufgabe 1 werden zunächst die Schwingungsdauern T_A^* und T_B^* für verschiedene Stellungen des Laufgewichts L bestimmt,

wobei darauf zu achten ist, dass die Auslenkung bei allen Schwingungen den gleichen Wert $\varphi_0 < 5^\circ$ hat. Das Laufgewicht soll in dem Intervall $0 < x < l$ von Messung zu Messung um einen vorgegebenen Abstand verschoben werden. Um die in der Aufgabenstellung geforderte Genauigkeit zu erreichen, werden die Schwingungsdauern mit einem elektronischen Messplatz (Lichtschranke, digitaler Präzisionszähler) ermittelt. Die Periodendauermessungen werden bei jeder Position des Laufgewichts dreimal durchgeführt und die Unsicherheit der Zeitmessungen soll dabei kleiner als 5 ms sein.

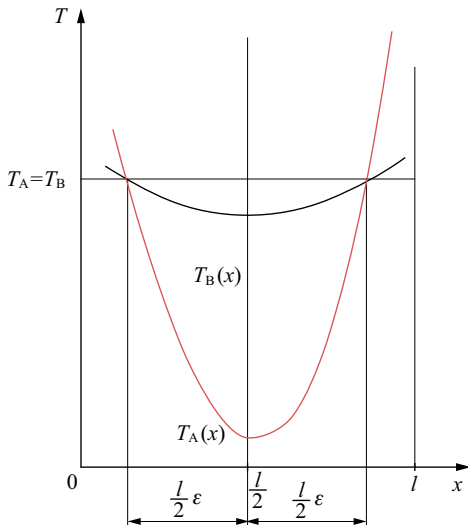


Abb. M.2.2.2 Darstellung der Periodendauern $T_A(x)$ und $T_B(x)$ eines Reversionspendels

Die gemessenen Periodendauern T_A^* und T_B^* werden als Funktionen von x graphisch dargestellt. Die Schnittpunkte der beiden Kurven werden sich im Allgemeinen noch nicht mit hinreichender Genauigkeit ermitteln lassen. Deshalb bestimmt man T_A^* und T_B^* in der Nähe von x_1 und x_2 in noch kleineren Abständen, um auf diese Weise eine relative Messunsicherheit von T^* kleiner als 0,05 % zu erreichen. Der Achsenabstand l wird im Allgemeinen als Funktion der Temperatur

gegeben. Die Voraussetzung, dass das Reversionspendel ein homogener Körper ist, trifft nur selten zu. Wenn das Pendel aus Stahl- und Messingteilen zusammengesetzt ist, kann der Term für die Berücksichtigung des Luftauftriebes $\rho_L / \rho \approx 1,5 \cdot 10^{-4}$ gesetzt und g nach Gl. (37) berechnet werden.

Bei der zweiten Aufgabe ist die Schwingungsdauer T' hinreichend oft für das Intervall $1^\circ \leq \varphi_0 \leq 10^\circ$ zu messen. Trägt man T' über φ_0^2 (φ_0 im Bogenmaß) auf, ergibt sich nach Gl. (24a) eine Gerade, die eine Steigung von $(1/16) T$ hat und für $\varphi_0 = 0$ den Wert $T' = T$ liefert. Eventuelle Abweichungen vom linearen Verlauf sollen diskutiert werden.

2.3 Drehpendel

In diesem Versuch werden freie, gedämpfte und erzwungene lineare sowie nichtlineare Drehschwingungen an einem Drehpendel nach Pohl untersucht. Das Drehpendel hat eine Eigenfrequenz, die vom Direktionsmoment der Feder und seinem Trägheitsmoment abhängt. Bei Erhöhung der Dämpfung beobachtet man neben dem stärkeren Abklingen der Amplitude auch eine geringe Abnahme der Eigenfrequenz.

Im Falle eines periodisch angetriebenen Drehpendels kann der Resonanzfall bei Gleichheit der Erreger- und der Eigenfrequenz des Drehpendels realisiert werden. Die maximale Amplitude ist im Resonanzfall eine Funktion der Dämpfung. Zusätzlich soll das Drehpendel mit einer Zusatzmasse so versehen werden, dass eine Unwucht entsteht. Dadurch wird ein zusätzliches Drehmoment verursacht und der Zusammenhang zwischen Auslenkung und dem rücktreibenden Drehmoment ist nicht mehr linear. Das führt zu einem grundsätzlich anderen Schwingungsverhalten des Drehpendels, bei dem nun mehrere Amplitudenzustände möglich sind. Das System kann dadurch in Abhängigkeit von seinen Anfangsbedingungen und kleinen

Störungen in verschiedenen Zuständen schwingen. Das im Versuch verwendete Drehpendel nach *Pohl* (Abb. M.2.3.1) besteht aus einer kreisförmigen Kupferscheibe mit einer homogenen Massenverteilung, die um eine Achse durch den Schwerpunkt drehbar gelagert ist.

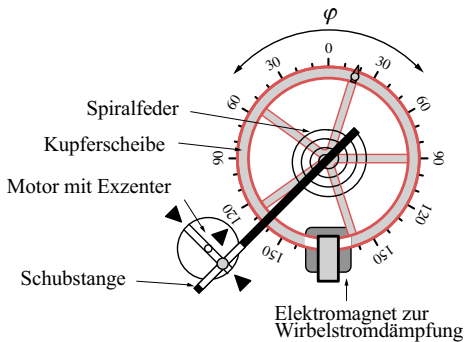


Abb. M.2.3.1 Zum Drehpendel nach *Pohl* (ohne Messelektronik)

Die Ruhelage wird durch eine im Pendel befestigte Spiralfeder vorgegeben und seine Auslenkung kann an einer Gradskala abgelesen werden. Eine zusätzliche Justierung auf die Anfangsstellung $\varphi = 0$ ist möglich.

Die Dämpfung der Schwingung kann über die Stärke des Stroms I_W , der durch den Elektromagneten einer Wirbelstrombremse fließt, variiert werden. Zur Erzeugung erzwungener Schwingungen wird das Drehpendel mit Hilfe eines drehzahlgeregelten Schrittmotors über einen Exzenter und eine Schubstange angetrieben. Ein elektronischer Bewegungsaufnehmer ermöglicht die Messung der Frequenz und der Auslenkung der Drehschwingungen der Kupferscheibe. Mit einer Extramessvorrichtung kann zusätzlich die Phasenverschiebung zwischen der Erreger- und der Pendelschwingung ermittelt werden.

Die weitere elektronische Signalverarbeitung bietet auch die Möglichkeit, neben der Auslenkung die Winkelgeschwindigkeit sowie die Winkelbeschleunigung zu bestimmen und

über ein Computer-Interface die entsprechenden Signalspannungen zu speichern. An einem Zählerdisplay kann die Erregerfrequenz direkt abgelesen werden.

2.3.1 Lineare Schwingungen und Resonanz

Aufgabenstellung

1. Für die erzwungene Schwingung des Drehpendels ist für drei verschiedene Dämpfungen die Resonanzkurve aufzunehmen. Den Resonanzkurven ist die Resonanzfrequenz f_r und der Wert für die Halbwertsbreite Δf zu entnehmen sowie die Güte Q zu bestimmen. Zusätzlich ist das Zeitverhalten der freien Schwingungen für diese drei Dämpfungen aufzunehmen und die Dämpfungskonstanten sind zu ermitteln.

2. Die Dämpfungskonstanten, die aus der Halbwertsbreite der Resonanzkurve und der gedämpften freien Schwingung bestimmt wurden, sind miteinander zu vergleichen.

Der Einfluss der Dämpfung auf die Höhe und die Lage des Maximums der Resonanzkurve soll diskutiert werden.

3. Für den Fall der erzwungenen Schwingung sind für drei Frequenzen und die in Aufgabe 1 gewählten Dämpfungen die Phasenverschiebungen zu messen und mit den berechenbaren Werten zu vergleichen.

Lenkt man das Pendel um einen Winkel φ aus und lässt es dann los, führt es eine gedämpfte Drehschwingung um die Ruhelage aus. Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus dem Gleichgewicht der Drehmomente:

$$M_T = M_F + M_D \quad (44)$$

In Gl. (44) gilt für die entsprechenden Drehmomente $M_T = J \ddot{\varphi}$, $M_D = -\gamma \dot{\varphi}$ und $M_F = -D \varphi$. Dabei beschreiben J das Trägheitsmoment des Pendels, D das Direktionsmoment der Feder und γ die geschwindigkeitsproportionale Reibungskonstante.

Durch Einsetzen in Gl.(44) erhält man die Differentialgleichung für die gedämpfte Eigenschwingung des Drehpendels:

$$J\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + D\varphi = 0 . \quad (45)$$

Deren allgemeine Lösung wird im Anhang A.2.2 beschrieben. Definiert man die Abklingkonstante δ (oft auch als Dämpfungskonstante bezeichnet) mit $\delta = \gamma/(2J)$, folgt als Lösung für die schwach gedämpfte Schwingung ($\omega_0^2 \gg \delta^2$)

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \alpha) . \quad (46)$$

α beschreibt die Phasenverschiebung. Für die Eigenkreisfrequenz ω_d der gedämpften Schwingung (Gl. (6)) gilt

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2J}\right)^2} \quad (47)$$

mit der Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung $\omega_0 = \sqrt{D/J}$. Die Lösung der Bewegungsgleichung nach Gl. (46) beschreibt eine exponentiell abklingende Schwingung (Abb. M.2.3.2), die durch die Abklingzeit $\tau = \delta^{-1}$ sowie die Frequenz $f_d = \omega_d / 2\pi$ charakterisiert wird.

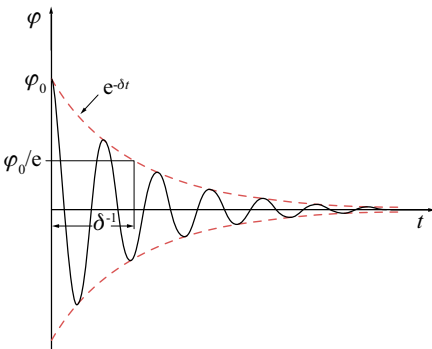


Abb. M.2.3.2 Abklingen der Amplitude einer schwach gedämpften Schwingung

Die Abklingkonstante δ bzw. das logarith-

mische Dekrement Λ lassen sich experimentell über die Abnahme der Schwingungsamplitude im Zeitabstand $\Delta t = T_d$ (Periodendauer $T_d = 2\pi / \omega_d$) bestimmen:

$$\Lambda = \delta T_d = \ln \left(\frac{\hat{\varphi}(t)}{\hat{\varphi}(t + T_d)} \right) . \quad (48)$$

Eine besonders anschauliche Darstellung des Schwingungsverhaltens ist im Phasenraum möglich. Für ein punktförmiges Teilchen im dreidimensionalen Ortsraum ist der Phasenraum als Menge aller Sechsertupel aus den drei Orts- und Impulskoordinaten definiert. Es handelt sich also um einen sechsdimensionalen Raum.

Beim Pohl'schen Pendel sind sowohl die Orts- als auch die Impulskoordinate eindimensionale Größen. Der Phasenraum reduziert sich dadurch auf zwei Dimensionen. Man trägt in einer zweidimensionalen Darstellung die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$ gegen den Auslenkwinkel des Pendels $\varphi(t)$ auf (zeitunabhängige geometrische Kurve, auch Trajektorie genannt). Für einen schwach gedämpften Oszillators erhält man z. B. eine sich auf den Nullpunkt (so genannter Attraktor) des Koordinatensystems zu bewegendes Spirale als Trajektorie.

Wird über den Antrieb des Drehpendels zusätzlich ein äußeres periodisches Drehmoment $M_a = M_0 \cos(\omega t)$ auf das Pendel gegeben, erhält man eine erzwungene Schwingung. Die Bewegungsgleichung ergibt sich in Analogie zu Gl. (45) mit

$$J\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + D\varphi = M_0 \cos(\omega t) . \quad (49)$$

Als Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung erhält man (Anhang A.2.2)

$$\varphi(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \theta) + C e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \alpha) . \quad (50)$$

Nach einer Einschwingzeit verschwindet der

Term mit der Eigenkreisfrequenz ω_d aufgrund der exponentiellen Dämpfung und die Frequenz des Pendels entspricht der Kreisfrequenz des Antriebs ω :

$$\varphi(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \theta) . \quad (51)$$

Dabei berücksichtigt die Größe θ die Phasenverschiebung zwischen der erregten Schwingung und der Anregung. Mit dem komplexen Lösungsansatz

$$\varphi(t) = A(\omega) e^{i(\omega t + \theta)} \quad (52)$$

folgt analog zur Herleitung von Gl.(27) im Anhang A.2.2

$$A_E e^{-i\theta} = A[(\omega_0^2 - \omega^2) - i 2 \delta \omega] . \quad (53)$$

Mit $A_E = M_0/J$ ergibt sich für den Betrag der Amplitude

$$A = A(\omega) = \frac{M_0 / J}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2}} . \quad (54)$$

In Abb. M.2.3.3 sind für verschiedene Dämpfungen die Resonanzkurven graphisch dargestellt.

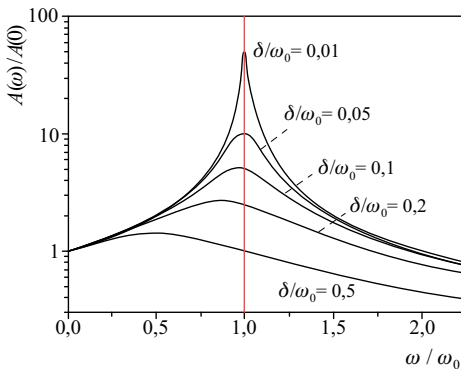


Abb. M.2.3.3 Resonanzkurven für verschiedene Verhältnisse der Abklingkonstanten δ zur Eigenkreisfrequenz ω_0 (Ordinate: normierte Amplitude, Abszisse: normierte Kreisfrequenz)

Die Amplitude der erzwungenen Schwingung

erreicht bei der Kreisresonanzfrequenz ω_r ihren Maximalwert

$$A_{\max} = A(\omega_r) = \frac{M_0 / J}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_r^2)^2 + 4 \delta^2 \omega_r^2}} , \quad (55a)$$

bzw. mit Gl. (9) folgt

$$A_{\max} = \frac{M_0 / J}{2 \delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} . \quad (55b)$$

Für sehr kleine Dämpfungen (und nur dann) ist die Kreisresonanzfrequenz gleich der Eigenkreisfrequenz:

$$\omega_r = \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}} . \quad (55c)$$

Die anderen Grenzwerte von Gl.(54) sind

$$A(0) = \frac{M_0}{J \omega_0^2} = \frac{M_0}{D} , \quad A(\omega \rightarrow \infty) = 0 . \quad (56)$$

Der Graph der Resonanzkurve in Bezug auf die Resonanzfrequenz ist nicht symmetrisch. Als Halbwertsbreite $\Delta\omega$ definiert man die Differenz zwischen den Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 , bei denen die Resonanzamplitude auf den Wert

$$A(\omega_1) = A(\omega_2) = \frac{A(\omega_r)}{\sqrt{2}} \quad (57a)$$

abgenommen hat. Das entspricht in der Darstellung der Leistung (Amplitudenquadrat) als Funktion der Anregungskreisfrequenz

$$A^2(\omega_1) = A^2(\omega_2) = \frac{A^2(\omega_r)}{2} . \quad (57b)$$

Zwischen der Halbwertsbreite $\Delta\omega$ und der Abklingkonstanten δ gilt für schwache Dämpfungen die Beziehung

$$\Delta\omega = 2 \delta \quad \text{bzw.} \quad \tau \Delta\omega = 2 . \quad (58)$$

Dadurch wird unter anderem auch die so genannte „Unschärfe“ zwischen Frequenz

(z. B. Breite einer Resonanzlinie) und mittlerer „Lebensdauer“ τ eines gedämpften, linearen Oszillators beschrieben. Große Dämpfungen haben eine kurze „Lebensdauer“ der Schwingung zur Folge und verursachen breite Resonanzkurven. Sehr schmale Resonanzkurven entsprechen Systemen mit einer großen „Lebensdauer“ der Schwingung, bei denen die Dämpfung gering ist.

Die Dämpfung ist ein Maß für die Dissipation der Energie, die von außen (hier vom Antrieb durch den Motor) in das System eingebracht wird. Je kleiner die Dämpfung des angetriebenen Oszillators ist, umso größer wird im Resonanzfall seine Schwingungsamplitude. Eine weitere wichtige Kenngröße zur Beschreibung des Resonanzverhaltens ist die Güte Q mit

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\delta} . \quad (59)$$

Der frequenzabhängige Phasenwinkel θ zwischen der angeregten Schwingung und der Anregung lässt sich mit Gl.(53) und Gl.(12b) im Anhang A.1 berechnen:

$$\theta(\omega) = -\arctan \frac{2\omega\delta}{(\omega_0^2 - \omega^2)} . \quad (60)$$

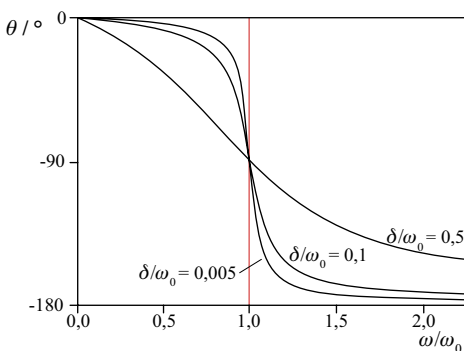


Abb. M.2.3.4 Phasenwinkel θ in Abhängigkeit von der normierten Kreisfrequenz ω/ω_0 für verschiedene Verhältnisse der Abklingkonstanten δ zur Eigenkreisfrequenz ω_0

Der Winkel θ der Phasenverschiebung ist negativ und die Erregerschwingung eilt der Pendelschwingung voraus (Abb. M.2.3.4). Die Werte für $\theta(\omega)$ ändern sich im Bereich $\omega \leq \omega_0$ von 0 bis -90° und für $\omega \geq \omega_0$ von -90° bis -180° . Im Resonanzfall beträgt die Phasenverschiebung -90° .

Durch den Antrieb des Pendels wird der Phasenraum des Systems dreidimensional: Die dritte Koordinate neben der Auslenkung ϕ und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ stellt die Zeitabhängigkeit der momentanen Stellung des Antriebs dar. Die im Experiment aufgezeichnete Darstellung des Phasenraums ist eine Projektion auf die $\phi - \dot{\phi}$ -Ebene. In dieser Phasenraumdarstellung erhält man im Beispiel des angetriebenen linearen Pendels eine Ellipse als Trajektorie, die sich nach der Einschwingzeit nicht mehr verändert.

Versuchsausführung

Für das Drehpendel wird am Exzenter (Abb. M.2.3.1) ein maximaler Anregungswinkel von wenigen Grad eingestellt. Der betreffende Wert bzw. Bereich wird am Arbeitsplatz angegeben.

Zur Aufnahme der Resonanzkurve in Aufgabe 1 ist zunächst für eine vorgegebene geringe Dämpfung durch die Wirbelstrombremse (Stromstärke I_W) die Resonanzfrequenz $f_r \approx f_0$ zu ermitteln und das Resonanzmaximum $A(f_r) \approx A(f_0)$ zu bestimmen. Die Dämpfung infolge von Reibungseinflüssen soll hier vernachlässigt werden. Anschließend wird für jeweils etwa zehn verschiedene Anregungsfrequenzen f um die Resonanzfrequenz die Amplitude $A(f)$ gemessen. Die Frequenzen sind so zu wählen, dass der Graph der Resonanzkurve mit hinreichender Genauigkeit dargestellt werden kann. Nach jeder Änderung der Anregungsfrequenz ist der Einschwingvorgang abzuwarten. Anschließend sind zwei weitere Resonanzkurven für stärkere Dämpfungen aufzunehmen. Es sind die auf die Resonanzamplitude normierten Amplituden bzw. deren Quadrate in Abhän-

gigkeit von der Anregungskreisfrequenz ω graphisch darzustellen. Aus dem Graph der Resonanzkurve kann die Halbwertsbreite $\Delta\omega$ abgelesen und mit dieser die Dämpfungskonstante und die Güte ermittelt werden. Zusätzlich sind für die drei ausgewählten Dämpfungen die Schwingungsamplituden als Funktion der Zeit $\varphi(t)$ der freien gedämpften Schwingungen (Abb. M.2.3.2) zu messen und die Größe der jeweiligen Dämpfungskonstanten zu ermitteln. Dazu kann man z. B. unter Anwendung von Gl. (48) das logarithmische Dekrement ermitteln und mit der Periodendauer den Wert von δ berechnen, oder man berechnet die Funktion der „Einhüllenden“ unter Berücksichtigung von Gl. (46) mittels nichtlinearer Regression (einer der Regressionsparameter enthält die Abklingkonstante). In Aufgabe 3 berechnet man die Phasenverschiebungen für eine der in Aufgabe 1 eingestellten Dämpfungen für drei Frequenzverhältnisse (z. B. $\omega/\omega_0 = 0,8; 1,2; 1,5$) mit Gl. (60), wobei der Funktionsverlauf von inversen Winkelfunktionen zu beachten ist. Anschließend sind die Phasenverschiebungen unter den gewählten Bedingungen experimentell zu bestimmen und mit den berechneten Werten zu vergleichen.

2.3.2 Nichtlineare Schwingungen

Aufgabenstellung

1. Es sollen für die gedämpften linearen Schwingungen des Drehpendels bei fünf verschiedenen Dämpfungen die Frequenz f_d und die Abklingkonstante δ bestimmt werden.
2. Es ist der Drehwinkel φ_{st} des Pendels in Abhängigkeit vom statischen Drehmoment M_{st} zu messen und $M_{st} = f(\varphi_{st})$ graphisch darzustellen. Mit dem Mittelwert von f_d aus Aufgabe 1 werden das Direktionsmoment D und das Trägheitsmoment J des Drehpendels bestimmt. Die Reibungskonstante γ ist in Abhängigkeit vom Quadrat der Stromstärke I_w darzustellen und mittels linearer Reg-

ression sind die Geradenparameter zu berechnen.

3. Mit einem zur Verfügung gestellten Simulationsprogramm können die unterschiedlichen Schwingungszustände des nichtlinearen Drehpendels (Schwingung, erste und zweite Bifurkation, Chaos) simuliert werden.

4. Nach dem Anbringen einer vorgegebenen Zusatzmasse am Drehpendel sind erzwungene Schwingungen anzuregen. Man versucht durch kleine Änderungen der Dämpfung die verschiedenen Schwingungszustände zu realisieren. Die mit dem Messprogramm experimentell ermittelten Graphen der verschiedenen Schwingungszustände sind mit denen der Simulation zu vergleichen und zu diskutieren.

An der Kupferscheibe des Drehpendels nach *Pohl* kann eine Zusatzmasse m angebracht werden. Das von der Zusatzmasse hervorgerufene zusätzliche Drehmoment M mit $M = m g R \sin(\varphi)$ (φ Auslenkung, R Abstand zwischen Drehachse und Massenmittelpunkt der Zusatzmasse) bewirkt den nichtlinearen Charakter des Systems. Das bedeutet, dass die Schwingungsparameter, z. B. die Frequenz, von der Amplitude abhängen. Diese Amplituden-Frequenzkopplung ist eine charakteristische Eigenschaft nichtlinearer Systeme. Falls man die Zusatzmasse groß genug wählt, kann man erreichen, dass sich zwei neue stabile Gleichgewichtslagen symmetrisch zur ursprünglichen Nulllage einstellen (W-Potential, siehe Anhang A.3.2.1).

Zur Beschreibung der Drehschwingungen des Pendels mit Zusatzmasse (Trägheitsmoment J_z) wird der Ansatz

$$J_{nl} \ddot{\varphi} = m g R \sin \varphi + M_0 \sin(\omega t) - D \dot{\varphi} - \gamma \dot{\varphi}^3 \quad (61)$$

mit $J_{nl} = J + J_z$ gewählt. Durch den Sinus des Auslenkwinkels φ ist Gl. (61) nichtlinear in φ und es liegt eine nichtlineare, inhomogene

Differentialgleichung zweiter Ordnung vor, die im Allgemeinen nicht mehr geschlossen lösbar ist. Dieses nichtlineare System soll in Abhängigkeit der in Gl.(61) enthaltenen Parameter untersucht werden. Dabei wird nur die Dämpfung durch die systematische Änderung der Stromstärke I_W der Wirbelstrombremse variiert, alle anderen Parameter werden hier konstant gehalten. Die Möglichkeit der Simulation der unterschiedlichen Schwingungszustände basiert auf der Umstellung der Gl.(61) und wird im Anhang A.3.2.1 beschrieben:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{D}{J_{nl}}\varphi - \frac{\gamma}{J_{nl}}\dot{\varphi} + \frac{mgR}{J_{nl}}\sin\varphi + \frac{M_0}{J_{nl}}\sin(\omega t) \quad (62)$$

In den Aufgaben 1 und 2 werden einige der für die Simulation erforderlichen Werte ermittelt.

Versuchsausführung

Die Messungen werden mit dem oben beschriebenen Messplatz durchgeführt und es sind bei Aufgabe 1 die Eigenfrequenz f_d der gedämpften Schwingung und die Abklingkonstante δ für schwache Dämpfungen des Drehpendels (ohne Zusatzmasse) zu ermitteln. Es werden die Abklingkurven (Abb. M.2.3.2) nach einer maximalen Anfangsauslenkung von ca. 90° für verschiedene Stromstärken I_W in einem vorgegebenen Bereich aufgenommen. Für die Bestimmung von δ ermittelt man z. B. die Anzahl n der Perioden für die Abnahme der Schwingungsamplitude auf etwa die Hälfte ihres Anfangswerts. Damit kann das logarithmische Dekrement $A_n = \ln[\varphi(t)/\varphi(t+nT_d)]$ und mit der Beziehung $\delta = A_n/nT_d$ die Abklingkonstante bestimmt werden.

In Aufgabe 2 sind das Direktionsmoment D und das Trägheitsmoment J des Drehpendels zu bestimmen, indem man für etwa fünf verschiedene Zusatzmassen m (Scheibenge-

wichte) in einem vorgegebenen Bereich die statische Auslenkung (φ_{st}) und daraus das jeweilige statische Drehmoment bestimmt. Diese Massen werden an einem festen Punkt der Kupferscheibe des Drehpendels (Nullposition ohne Zusatzmasse) befestigt. Der Wert für den Radius R ist am Arbeitsplatz angegeben. Das Drehmoment M_{st} ist in Abhängigkeit vom Winkel φ_{st} (Einheit Radiant) graphisch darzustellen und aus dem Anstieg der Ausgleichsgeraden kann das Direktionsmoment D ($M_{st} = D \varphi_{st}$) bestimmt werden. Damit und mit dem Mittelwert der in Aufgabe 1 bestimmten Eigenfrequenz des Pendels ist die Berechnung des Trägheitsmoments des Pendels mit Gl.(55c) möglich. Die Reibungskonstante ($\gamma = 2J\delta$) ist in Abhängigkeit vom Quadrat der Stromstärke I_W graphisch darzustellen und mit der Fit-Funktion $\gamma = a + bI_W^2$ erhält man mittels linearer Regression die für die Simulation erforderlichen Geradenparameter a und b .

Ist das Auffinden von chaotischen Schwingungen bei kleinen Dämpfungen unkompliziert, erweist sich die Einstellung einer Bifurkation oft als relativ schwierig. Deshalb sollen in Aufgabe 3 mit einem geeigneten Programm zunächst mit Hilfe von Simulationsrechnungen die verschiedenen Schwingungszustände durch die schrittweise Variation der Stromstärke I_W simuliert werden. Die Berechnungen begründen sich auf die Gl.(62) und benötigen eine Reihe von Parametern, die u. a. in den Aufgaben 1 und 2 bestimmt wurden bzw. bekannt sind: Frequenz f_d , Direktionsmoment der Feder D , Trägheitsmoment J des Pendels ohne Zusatzmasse, Fitparameter a und b der Regressionsfunktion, maximales Drehmoment M_z ($M_z = m g R$) bedingt durch die Zusatzmasse m , maximaler Anregungswinkel und Periodendauer der Anregung. Als einzigen variablen Parameter zur Einstellung des Übergangs zum Chaos bzw. zur Einstellung der Bifurkation ändert man nur die Dämpfung (Variation der Stromstärke I_W). Diese sollte

ausgehend von einem größeren Wert, mit dem man einen Schwingungszustand einstellt, in kleinen Schritten verringert werden. Vor dem Auftreten der ersten Bifurkation kann man in der Phasenraumdarstellung deutlich eine Veränderung der zuvor ellipsenähnlichen Trajektorie (Abb. 2.3.5) erkennen.

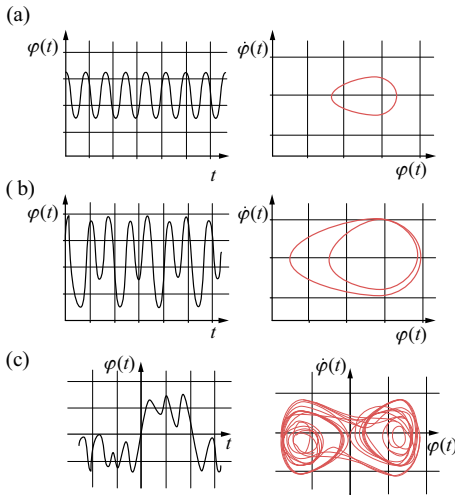


Abb. M.2.3.5 Beispiele von Schwingungszuständen am Drehpendel mit Zusatzmasse in der Zeit- und Phasenraumdarstellung. Schwingungen in einer von zwei Gleichgewichtslagen (a), erste Bifurkation (b), chaotische Schwingung (c)

Bei Aufgabe 4 sind die unterschiedlichen Schwingungsvorgänge im Experiment zu realisieren. Um Bifurkationen zu finden, reduziert man die Stromstärke I_w , bis man zwei unterschiedlich große Scheitelwerte erkennen kann. Indem man die Stromstärke noch mehr verringert, ist ab einem bestimmten Wert die Beobachtung chaotischer Schwingungen möglich. Im Experiment ist darauf zu achten, dass das Drehpendel stets eine gewisse Zeit zur Stabilisierung der Schwingung nach jeder Änderung der Dämpfung benötigt, die ggf. einige Minuten betragen kann. Die verschiedenen Schwingungszustände sind in der Zeit- und Phasenraumdarstellung aufzunehmen und zu diskutieren.

2.4 Gekoppelte Pendel

Aufgabenstellung

1. Die Schwingungsdauern zweier mit einer Feder gekoppelter Pendel bei gleichsinnigen (T_1) bzw. gegensinnigen Schwingungen (T_2) sollen für mindestens fünf verschiedene Kopplungszustände gemessen werden. Die Schwingungsdauer T bei Schwebungsschwingungen und die Schwebungsdauer T_S sind sowohl experimentell zu bestimmen als auch aus T_1 und T_2 zu berechnen. Außerdem ist der Kopplungsgrad k zu ermitteln.
2. Mit den Ergebnissen von Aufgabe 1 ist der Zusammenhang zwischen dem Verhältnis der Schwingungsdauern von gleich und gegensinniger Schwingung und der Position der Kopplungsfeder an der Pendelachse zu untersuchen.

Gegeben seien zwei völlig gleiche physikalische Pendel 1 und 2 mit dem Trägheitsmoment I , die mit einer Schraubenfeder elastisch gekoppelt sind (Abb. M.2.4.1). Es sind aber auch Kopplungen mit anderen mechanischen Hilfsmitteln realisierbar. Eine physikalisch andere Kopplungsart wird z. B. durch Pendelkörper mit Dauermagneten möglich, bei denen die Kopplung durch Magnetfelder erfolgt. Die Drehachsen A und B sind so gelagert, dass beide Pendel nur in ein und derselben Ebene schwingen können. In den folgenden Überlegungen werden Winkel und Drehmomente nach rechts positiv und nach links negativ gerechnet. Außerdem wird vorausgesetzt, dass die Schwingungsamplituden der Pendel sehr klein sind und die Reibung in den Achslagern vernachlässigt werden kann. Die Kopplung bewirkt, dass sich die Ruhelage des Pendels 1 um den Winkel α , die des Pendels 2 um den Winkel $-\alpha$ von der Vertikalen unterscheidet. In der Ruhelage verschwindet das resultierende Drehmoment sowohl für Pendel 1 als auch für Pendel 2. Bezeichnet man mit D das Direktionsmoment (Gl. (15)) von Pendel 1 bzw. 2 und mit M_0

den Betrag des Drehmoments, das von der Feder auf jedes der beiden Pendel ausgeübt wird, gilt

$$M_0 = D \alpha . \quad (63)$$

Ist Pendel 1 um den Winkel φ_1 , Pendel 2 um den Winkel φ_2 aus der Ruhelage ausgelenkt, wirkt auf Pendel 1 das rücktreibende Drehmoment $-D(\varphi_1 + \alpha)$ und das von der Kopplungsfeder herrührende Drehmoment ist $M_0 + D_K(\varphi_2 - \varphi_1)$, wobei D_K das Direktionsmoment der Feder beschreibt.

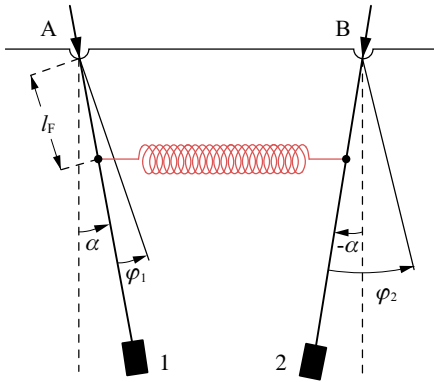


Abb. M.2.4.1 Zwei identische Pendel 1 und 2 mit einer Schraubenfeder gekoppelt (l_F Abstand zwischen der Befestigung der Feder an der Pendelachse und den Drehachsen A bzw. B)

Bei Berücksichtigung von Gl. (63) kann man das resultierende Drehmoment für Pendel 1

$$\begin{aligned} & -D(\varphi_1 + \alpha) + M_0 + D_K(\varphi_2 - \varphi_1) \\ & = -D\varphi_1 - D_K(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} \quad (64)$$

schreiben. Für Pendel 2 liefert eine analoge Betrachtung

$$\begin{aligned} & -D(\varphi_2 - \alpha) - M_0 - D_K(\varphi_2 - \varphi_1) \\ & = -D\varphi_2 + D_K(\varphi_1 - \varphi_2) . \end{aligned} \quad (65)$$

Die Bewegungsgleichungen lauten daher

$$I \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = -D\varphi_1 - D_K(\varphi_1 - \varphi_2) , \quad (66)$$

bzw.

$$I \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = -D\varphi_2 + D_K(\varphi_1 - \varphi_2) . \quad (67)$$

Durch die Substitution

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 , \quad \psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$$

vereinfachen sich die Gln. (66) und (67) zu

$$I \frac{d^2 \psi_1}{dt^2} = -D \psi_1$$

$$I \frac{d^2 \psi_2}{dt^2} = -(D + 2D_K) \psi_2 .$$

Die Lösungen sind

$$\psi_1 = a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t ,$$

$$\psi_2 = a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t$$

mit den Kreisfrequenzen

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = + \sqrt{\frac{D}{I}} \quad (68)$$

und

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \sqrt{\frac{D + 2D_K}{I}} = \omega_1 \sqrt{1 + \frac{2D_K}{D}} . \quad (69)$$

Geht man wieder zu den Winkeln φ_1 und φ_2 über, erhält man

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \frac{1}{2} (& a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t \\ & + a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t) , \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \frac{1}{2} (& a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t \\ & - a_2 \cos \omega_2 t - b_2 \sin \omega_2 t) . \end{aligned} \quad (71)$$

Die Integrationskonstanten a_1 , b_1 , a_2 und b_2 sollen im Folgenden für drei typische Fälle bestimmt werden.

1. Gleichsinnige Schwingungen

Beide Pendel werden um den gleichen Winkel φ_0 aus ihrer Ruhelage ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen. Mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0, \quad \frac{d\varphi_1}{dt}(0) = \frac{d\varphi_2}{dt}(0) = 0$$

ergibt sich aus den Gln. (70) und (71) $a_1 = 2\varphi_0$, $b_1 = a_2 = b_2 = 0$, und es folgt

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0 \cos \omega_1 t. \quad (72)$$

Die beiden Pendel führen gleiche Schwingungen aus, als wäre die Kopplung nicht vorhanden.

2. Gegensinnige Schwingungen

Das Pendel 1 wird um den Winkel φ_0 und das Pendel 2 um den Winkel $-\varphi_0$ ausgelenkt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ lässt man beide Pendel los. Aus den Anfangsbedingungen

$$\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) = \varphi_0,$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt}(0) = \frac{d\varphi_2}{dt}(0) = 0$$

folgt $a_2 = 2\varphi_0$ bzw. $a_1 = b_1 = b_2 = 0$. Für die Zeitabhängigkeit der Amplituden ergibt sich

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi_0 \cos \omega_2 t. \quad (73)$$

Beide Pendel schwingen mit gleicher Amplitude und gleicher Frequenz, aber mit einer Phasendifferenz von π . Die Frequenz der gegensinnigen Schwingungen ist größer als die der gleichsinnigen.

3. Schwebungsschwingungen

Man hält Pendel 1 in seiner Ruhelage fest, lenkt Pendel 2 um den Winkel φ_0 aus und lässt beide Pendel zum Zeitpunkt $t = 0$ los. Aus den Anfangsbedingungen $\varphi_1(0) = 0$,

$$\varphi_2(0) = \varphi_0 \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi_1}{dt}(0) = \frac{d\varphi_2}{dt}(0) = 0$$

ergeben sich $a_1 = -a_2 = \varphi_0$ bzw. $b_1 = b_2 = 0$.

Die Gln. (70) und (71) lauten dann

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = \\ &\varphi_0 \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1) t \right] \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_2 + \omega_1) t \right] \end{aligned} \quad (74)$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \\ &\varphi_0 \cos \left[\frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1) t \right] \cos \left[\frac{1}{2} (\omega_2 + \omega_1) t \right]. \end{aligned} \quad (75)$$

Die durch die Gln. (74) und (75) beschriebenen Schwingungen haben im Allgemeinen einen komplizierten Verlauf. Deshalb soll vorausgesetzt werden, dass die Kopplung der beiden Pendel sehr schwach ist ($D_K \ll D$).

Als Maß für die Stärke der Kopplung definiert man den Kopplungsgrad

$$k = \frac{D_K}{D + D_K}. \quad (76)$$

Mit den Gln. (68) und (69) kann man dafür

$$k = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2} \quad (77)$$

schreiben. Kleiner Kopplungsgrad bedeutet also, dass das Direktionsmoment der Feder klein gegen das des Pendels bzw. dass die Schwingungsdauer der gleichsinnigen nur wenig größer als die der gegensinnigen Schwingung ist. In diesem Falle kann man die Gln. (74) und (75) wie folgt interpretieren: Beide Pendel führen Schwingungen mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{1}{2} (\omega_2 + \omega_1) \quad (78)$$

bzw. mit der Schwingungsdauer T aus, wobei

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1} \right) \quad (79)$$

gilt.

Die Amplituden $\varphi_0 \sin \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t$ bzw.

$\varphi_0 \cos \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t$ ändern sich mit kleiner

Kreisfrequenz periodisch mit der Zeit. Die Amplituden von Pendel 1 verschwinden zu den Zeiten $t = n T_S$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) und es gilt

daher $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} T_S = \pi$. Daraus folgt

$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \quad (80)$$

Dieses Schwingungsverhalten bezeichnet man als Schwebung mit T_S als Schwebungsdauer (Abb. M.2.4.2).

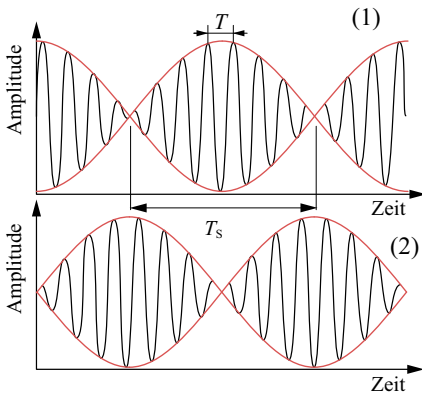


Abb. M.2.4.2 Schwebungsschwingungen zweier gekoppelter Pendel (1) und (2)

Versuchsausführung

Die Messungen erfolgen entweder mittels einer digitalen Stoppuhr, indem man mehrmals die Zeit für mehrere Schwingungen stoppt, oder mit einem rechnergestützten

Messwerterfassungssystem mit Hilfe von geeigneten Wegaufnehmern. Damit können die beiden Pendelschwingungen graphisch dargestellt und ausgewertet werden.

Zunächst sind die Periodendauern der beiden Pendel ohne Kopplungsfeder zu messen. Diese müssen in den Grenzen der Messunsicherheit übereinstimmen. Man wählt die Amplitude φ_0 der Schwingungen so, dass die Näherung $\sin \varphi_0 \cong \varphi_0$ gut erfüllt wird.

Anschließend werden die Schwingungsdauern T_1 und T_2 bei der gleichen Lage der Kopplungsfeder gemessen. Die zur Berechnung von k und T_S benötigte Differenz zwischen den Periodendauern T_1 und T_2 muss hinreichend genau sein. Danach sind bei gleicher Kopplung die Schwingungsdauer der Schwebungsschwingung T und die Schwebungsdauer T_S zu messen. Beide Zeiten sollen auch aus den Gln. (79) bzw. (80) berechnet werden. Den Kopplungsgrad k erhält man aus Gl. (77). Der Versuch ist bei fünf verschiedenen Einstellungen der Kopplungsfeder zu wiederholen.

Zur Diskussion bei Aufgabe 2 soll die folgende Gleichung verwendet werden:

$$\left(\frac{T_1}{T_2} \right)^2 = \frac{D + 2 D_K}{D} = \frac{2c}{D} l_F^2 + 1 \quad (81)$$

Dabei sind D das Direktionsmoment des Pendels ($D = m s_A g$, s_A Abstand zwischen Drehachse und Massenmittelpunkt des Pendels mit der Masse m) und D_K das Direktionsmoment der Feder ($D_K = c l_F^2$, l_F Abstand zwischen Drehachse und Federbefestigung, c Federkonstante).

Es ist die funktionelle Abhängigkeit $(T_1/T_2)^2 = f(l_F^2)$ graphisch darzustellen. Über den Anstieg $(2c/D)$ der Ausgleichsgeraden nach Gl. (81) kann die Federkonstante ermittelt werden. Dazu ist die Kenntnis des Direktionsmoments D des Pendels erforderlich. Entweder ist der Wert für D am Arbeitsplatz gegeben oder man bestimmt die Pendelmas-

se m durch Wägung und den Abstand s_A wie im Folgenden beschrieben. Man legt das Pendel auf eine schneidenförmige Kante und erhält durch das Ausbalancieren (Gleichgewichtslage) die Position des Schwerpunkts des Pendels längs seiner Stabachse. Der Abstand zwischen der Lagerung des Pendels (Drehachse) und dem Schwerpunkt ergibt den Wert für die gesuchte Größe s_A . Der Wert für die Federkonstante c kann mit einem einfachen statischen Verfahren (Versuch M.3.2.1) überprüft werden.

2.5 Trägheitsmomente

Aufgabenstellung

1. Das Trägheitsmoment I_T und das Direktionsmoment D eines Drehtisches sollen bestimmt werden. Der Steiner'sche Satz ist experimentell zu prüfen.
2. Es sind die Hauptachsenträgheitsmomente eines Körpers mit U-Profil zu bestimmen.

Ein Drehtisch enthält eine horizontal liegenden Platte oder einen Steg. Diese sind starr mit einer gut gelagerten, vertikalen Drehachse verbunden. An dieser Achse ist das innere Ende einer Spiralfeder befestigt. Das äußere Ende der Feder ist mit der Drehtischhalterung verschraubt. In die Platte bzw. den Steg sind kleine Löcher gebohrt, die definierte Abstände s von der Drehachse haben und zur Befestigung eines Testkörpers dienen. Als Körper soll bei Aufgabe 1 ein homogener Zylinder mit dem Radius R und der Masse m verwendet werden (Abb. M.2.5.1)

Für die Schwingungsdauer der Schwingungen des Drehtisches gilt unter den in M.2.0 gemachten Voraussetzungen

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I_T}{D}. \quad (82)$$

Befestigt man den Zylinder so auf dem Drehtisch, dass die Zylinderachse parallel zur Drehachse verläuft und von ihr den Abstand s hat, ist das Trägheitsmoment des

Zylinders I_K nach dem Steiner'schen Satz Gl. (25)

$$I_K = I_Z + m s^2 \quad (83)$$

$$\text{mit } I_Z = \frac{m R^2}{2}.$$

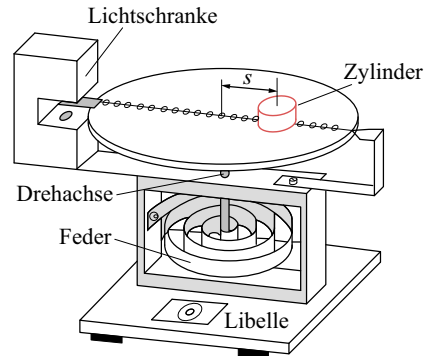


Abb. M.2.5.1 Schematischer Aufbau des Drehtisches

Für das Trägheitsmoment des Systems (I_s) bestehend aus Drehtisch (I_T) und Zylinder gilt

$$I_s = I_T + I_K = I_T + \frac{1}{2} m R^2 + m s^2, \quad (84)$$

für die Schwingungsdauer

$$T_s^2 = 4\pi^2 \frac{I_s}{D}. \quad (85)$$

Ist speziell $s = 0$, erhält man

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{I_T + I_Z}{D}. \quad (86)$$

Aus den Gln. (82) und (86) folgt

$$I_T = I_Z \frac{T^2}{T_0^2 - T^2} = \frac{m R^2}{2} \frac{T^2}{T_0^2 - T^2}, \quad (87)$$

$$D = I_Z \frac{4\pi^2}{T_0^2 - T^2} = \frac{2\pi^2 m R^2}{T_0^2 - T^2}. \quad (88)$$

Den Rechnungen liegt die Annahme zugrun-

de, dass die Reibung in den Achslagern vernachlässigbar ist. In Wirklichkeit treten im Experiment stets Reibungsverluste auf, die eine Dämpfung der Schwingungen zur Folge haben. Wenn man das Drehmoment der Reibung proportional der Winkelgeschwindigkeit $d\varphi/dt$ ansetzt, lässt sich berechnen, dass die Schwingungsamplitude exponentiell mit der Zeit abnimmt (Abb. M.2.3.2). Ist das Verhältnis einer Amplitude zur nächstfolgenden kleiner als 2, wird die Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung nur um weniger als 1% größer als die der ungedämpften. Aus diesem Grunde können zur Berechnung der Trägheitsmomente in guter Näherung die Gleichungen für ungedämpfte Schwingungen verwendet werden.

Gegeben sei nun ein starrer Körper mit einer beliebigen Drehachse A. Ein Punkt der Achse wird als Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit den Einheitsvektoren $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ gewählt (Abb. M.2.5.1).

In diesem System hat der Einheitsvektor \mathbf{e} der Drehachse die Komponenten (Richtungskosinus) α, β, γ .

$$\mathbf{e} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k},$$

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = |\mathbf{e}|^2 = 1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Ein beliebiges Massenelement dm des Körpers habe den Ortsvektor $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

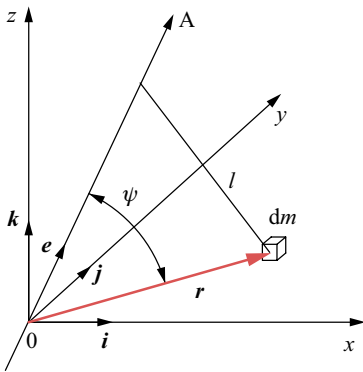


Abb. M.2.5.2 Drehung eines Körpers um eine feste Achse (körperfestes $x y z$ -System)

Der senkrechte Abstand des Massenelements von der Achse A sei l , so dass

$$\begin{aligned} l^2 &= |\mathbf{r}|^2 \sin^2 \varphi = |\mathbf{r}|^2 - |\mathbf{r}|^2 \cos^2 \varphi \\ &= |\mathbf{r}|^2 |\mathbf{e}|^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})^2 \end{aligned}$$

gilt. Das Trägheitsmoment I_A des Körpers, bezogen auf die gegebene Achse A, ist

$$I_A = \int l^2 dm = \int |\mathbf{r}|^2 |\mathbf{e}|^2 dm - \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})^2 dm$$

oder

$$\begin{aligned} I_A &= \int (x^2 + y^2 + z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) dm \\ &\quad - \int (x\alpha + y\beta + z\gamma)^2 dm. \end{aligned}$$

Ordnet man nach den Komponenten des Einheitsvektors \mathbf{e} der Drehachse, wird

$$\begin{aligned} I_A &= \alpha^2 \int (y^2 + z^2) dm + \beta^2 \int (z^2 + x^2) dm \\ &\quad + \gamma^2 \int (x^2 + y^2) dm \\ &\quad - 2(\alpha \beta \int xy dm + \beta \gamma \int yz dm + \gamma \alpha \int zx dm). \end{aligned}$$

Die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \int (y^2 + z^2) dm &= I_{xx}, \quad \int (z^2 + x^2) dm = I_{yy}, \\ \int (x^2 + y^2) dm &= I_{zz} \end{aligned}$$

sind die Trägheitsmomente des Körpers bezogen auf die drei Achsen des Koordinatensystems. Die Größen

$$\int xy dm = I_{xy}, \quad \int yz dm = I_{yz}, \quad \int zx dm = I_{zx}$$

bezeichnet man als Trägheitsprodukte. Damit wird

$$\begin{aligned} I_A &= \alpha^2 I_{xx} + \beta^2 I_{yy} + \gamma^2 I_{zz} \\ &\quad - 2(\alpha \beta I_{xy} + \beta \gamma I_{yz} + \gamma \alpha I_{zx}). \end{aligned} \quad (89)$$

Gl. (89) sagt aus: Wenn man die drei Trägheitsmomente, bezogen auf die Achsen eines Koordinatensystems und die drei Trägheitsprodukte kennt, kann man das Trägheitsmo-

ment für jede durch den Nullpunkt des Systems gehende Achse angeben. Auf der Drehachse soll vom Nullpunkt aus die Größe

$$R = I_A^{-\frac{1}{2}}$$

aufgetragen, d. h., es soll der Vektor

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= I_A^{-\frac{1}{2}} \mathbf{e} \\ &= R\alpha \mathbf{i} + R\beta \mathbf{j} + R\gamma \mathbf{k} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + \zeta \mathbf{k} \end{aligned}$$

dargestellt werden. Multipliziert man Gl. (89) mit \mathbf{R}^2 , erhält man für die Komponenten ξ , η und ζ des Vektors \mathbf{R}

$$\begin{aligned} \xi^2 I_{xx} + \eta^2 I_{yy} + \zeta^2 I_{zz} \\ - 2(\xi\eta I_{xy} + \eta\zeta I_{yz} + \xi\zeta I_{zx}) = 1. \end{aligned} \quad (90)$$

Gl. (90) stellt eine Fläche im Raum dar. Da das Trägheitsmoment I_A für keine Drehachse verschwindet, bleibt der Vektor \mathbf{R} stets endlich. Die Fläche ist also ein (körperfestes) Ellipsoid, das Trägheitsellipsoid. Durch eine Hauptachsentransformation (Drehung des Koordinatensystems um den Nullpunkt) kann man Gl. (90) in die Form

$$I_x X^2 + I_y Y^2 + I_z Z^2 = 1 \quad (91)$$

bringen. I_x , I_y , I_z bezeichnet man als Hauptträgheitsmomente, die Achsen des neuen Koordinatensystems X , Y , Z als Hauptträgheitsachsen und die durch die Achsen gebildeten Ebenen als Hauptträgheitsebenen. Die Verhältnisse werden wesentlich einfacher, wenn der Körper homogen und z. B. die xy -Ebene des Koordinatensystems eine Symmetrieebene ist. In diesem Falle verschwinden die Trägheitsprodukte I_{yz} und I_{zx} , und die Hauptachsentransformation wird durch eine Drehung des Koordinatensystems um die z -Achse erreicht. Hat der Körper noch zusätzlich eine Symmetrieebene, die senkrecht auf der xy -Ebene steht (z. B. die xz -Ebene des Koordinatensystems), dann verschwindet auch I_{xy} . Die Achsen des Koordinatensystems x , y , z sind also bereits Hauptträgheitsachsen.

Diese Betrachtungen gelten z. B. für den in Abb. M.2.5.3 skizzierten Körper mit U-förmigem Profil. Der Ursprung des Koordinatensystems soll im Massenmittelpunkt liegen.

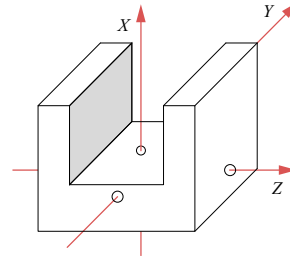


Abb. M.2.5.3 Hauptträgheitsmomente eines Körpers mit U-Profil, Hauptträgheitsachsen als Koordinatenachsen gewählt (schematisch)

Versuchsausführung

Zunächst werden die Masse m und der Radius R des Zylinders bestimmt. Danach erfolgt die Berechnung der Trägheitsmomente I_K mit Hilfe der Gl. (83) für die mit dem Drehtisch realisierbaren Abstände s (jeweils acht Abstände links ($-s$) und rechts ($+s$) von der Drehachse entfernt). Vor Beginn der Periodendauermessungen ist der Drehtisch zu justieren. Die Messung der Werte für T , T_0 und T_s erfolgen mit einer Gabellichtschranke und einem Digitalzähler.

Das Trägheitsmoment des Drehtisches I_T ergibt sich aus Gl. (87) und das Direktionsmoment D aus Gl. (88). Die Trägheitsmomente I_s werden nach Gl. (84) berechnet und über s^2 graphisch dargestellt. In den Graphen werden anschließend die nach Gl. (85) ermittelten Werte I_s eingetragen. Wenn die Abweichungen dieser Punkte von der Geraden kleiner als die Messunsicherheiten sind, ist die Gültigkeit des Steiner'schen Satzes experimentell nachgewiesen.

Bei Aufgabe 2 sollen die drei Hauptträgheitsmomente eines homogenen Körpers mit zueinander senkrechten Symmetrieebenen für den Massenmittelpunkt experimentell bestimmt werden.

Zur Bestimmung der verschiedenen Trägheitsmomente des Körpers verwendet man einen Drehtisch, dessen Trägheitsmoment I und Direktionsmoment D bekannt sind. Die an den Körper zusätzlich angebrachten kleinen Stifte dienen dazu, den Körper in definierten Lagen auf dem Drehtisch zu befestigen. Es sind die Periodendauern für jede der drei möglichen Rotationsachsen analog zu Aufgabe 1 für verschiedene Positionen des Körpers ($s_{x,i}$, $s_{y,i}$, $s_{z,i}$) auf dem Drehtisch zu messen. Daraus lassen sich die Trägheitsmomente $I_{x,i}$, $I_{y,i}$ und $I_{z,i}$ berechnen. Diese sind in Abhängigkeit von s graphisch darzustellen und aus den drei Kurven ermittelt man die Minima (vgl. Abb. M.2.5.4). Es gilt:

$$\text{Min}(I_{x,i}) = I_{xx} = I_X,$$

$$\text{Min}(I_{y,i}) = I_{yy} = I_Y,$$

$$\text{Min}(I_{z,i}) = I_{zz} = I_Z.$$

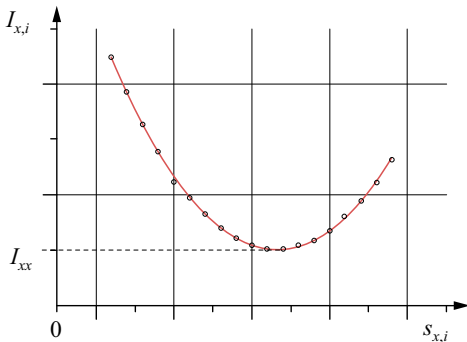


Abb. M.2.5.4 Beispiel zur Bestimmung des Hauptträgheitsmoments $I_{xx} = I_X$

Damit ist das Trägheitsellipsoid Gl. (91) für den Massenmittelpunkt des Körpers vollständig bestimmt.

Außerdem lässt sich die Lage des Massenmittelpunkts angeben. Diese und die zugehörigen drei Hauptträgheitsmomente des Körpers in Abb. M.2.5.3 können auch berechnet werden.

3 Deformationsverhalten

3.0 Grundlagen

Jeder Festkörper erfährt unter dem Einfluss einer mechanischen Spannung Deformationen. Bei hinreichend kleiner Spannung ist die Deformation in der Regel elastisch, d. h., der Körper nimmt nach der Entlastung seine ursprüngliche Gestalt wieder an. Überschreitet die Spannung dagegen einen bestimmten Wert, können Fließerscheinungen zu bleibenden Volumen- oder Formänderungen führen. Dann nennt man die Deformation unelastisch oder plastisch.

Das elastische Verhalten homogener, isotroper fester Körper wird durch vier Materialgrößen charakterisiert: den Elastizitätsmodul E , die Poisson'sche Zahl μ , den Torsions- oder Schubmodul G und den Kompressionsmodul K . Wenn man sich auf den eindimensionalen Fall beschränkt, wird der Elastizitätsmodul durch das Hooke'sche Gesetz in der Form

$$\sigma = E \varepsilon \quad (1)$$

definiert. Gl. (1) besagt, dass bei hinreichend kleiner Deformation die Zugspannung σ der Dehnung ε proportional ist (typisch für Metalle, Glas, Keramik). Dabei ist die Zugspannung die senkrecht zum Querschnitt A des Körpers angreifende Kraft F_Z (Abb. M.3.0.1) geteilt durch diesen Querschnitt:

$$\sigma = \frac{F_Z}{A} \quad (2)$$

Als Dehnung bezeichnet man das Verhältnis der Längenänderung Δl zur ursprünglichen Länge l :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (3)$$

Die Poisson'sche Zahl ist der Quotient der

relativen Querverkürzung $\Delta R/R$ und der Dehnung $\varepsilon = \Delta l/l$ (Abb. M.3.0.1):

$$\mu = \frac{\Delta R}{R} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\Delta R}{R} \frac{l}{\Delta l} . \quad (4)$$

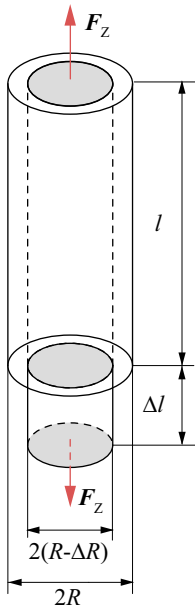


Abb. M.3.0.1 Deformation eines Zylinders durch eine Zugkraft

Wenn auf die obere Deckfläche eines Würfels, dessen Bodenfläche festgehalten wird, eine nicht zu große Kraft F_s in der in Abb. M.3.0.2 dargestellten Richtung wirkt, ist der Scherwinkel α der Schubspannung τ proportional:

$$\tau = G \alpha . \quad (5)$$

Den Proportionalitätsfaktor G nennt man Schub- oder Torsionsmodul, und die Schubspannung ist das Verhältnis der Scherkraft F_s zum Querschnitt A des Würfels:

$$\tau = \frac{F_s}{A} . \quad (6)$$

Ein fester Körper habe bei einem allseitig

gleichmäßigen Druck p , d. h. bei einer negativen mechanischen Spannung, das Volumen V . Wenn der Druck um den kleinen Wert Δp variiert wird, ändert sich das Volumen um ΔV . Bei einer Druckerhöhung nimmt das Volumen ab, bei einer Druckerniedrigung zu. Der Quotient $\Delta p/\Delta V$ ist also stets negativ. Zur Charakterisierung der Kompression eines festen Körpers dient der Kompressionsmodul K :

$$K = -V \frac{dp}{dV} \quad (7)$$

Den Kehrwert des Kompressionsmoduls bezeichnet man als Kompressibilität

$$\kappa = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} \right\} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} . \quad (8)$$

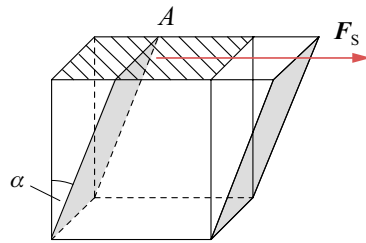


Abb. M.3.0.2 Deformation eines Würfels durch eine Scherkraft

Aus den Definitionsgleichungen (1), (5) und (7) folgt, dass die Größen E , G , und K die Dimension eines Drucks haben. Ihre kohärente Einheit ist das Pascal:

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2} .$$

Mit der Elastizitätstheorie können außerdem die Zusammenhänge zwischen den Größen E , G , K und μ begründet werden:

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1 , \quad (9)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} . \quad (10)$$

Falls man z. B. den Elastizitätsmodul und den Torsionsmodul experimentell bestimmt hat, können die Poisson'sche Zahl und der Kompressionsmodul aus den Gln. (9) und (10) berechnet werden.

3.1 Elastizitätsmodul

Das Verhalten fester Körper bei Zugbeanspruchung wird in der Technik mit Hilfe spezieller Werkstoffprüfmaschinen (z. B. Zugprüfmaschinen) untersucht. Der Stab wird an einem Ende starr mit dem Ständer der Maschine verbunden und am anderen Ende greift eine Zugkraft F_Z in Richtung der Stabachse an, so dass die Materialprobe gedehnt wird. Zur Messung der Längenänderung Δl und der Zugkraft verwendet man bei modernen Prüfmaschinen geeignete elektronische Sensoren, die über ein Interface mit einem Rechner gekoppelt werden. Damit ist die direkte Aufnahme eines Δl - F_Z -Diagramms möglich. Um das Verhalten verschiedener Stoffe und von Proben mit unterschiedlichen Abmessungen bei Zugbeanspruchung vergleichen zu können, werden die Zugkraft F_Z auf den Querschnitt A der Probe und ihre Verlängerung Δl auf die Anfangslänge l bezogen. Man geht also zu σ (Gl. (2)) und ε (Gl. (3)) über und stellt den Zusammenhang zwischen beiden Größen in einem Spannungs-Dehnungs-Diagramm dar, das für Metalle beispielsweise den in Abb. M.3.1.1 schematisch dargestellten Verlauf hat.

Im Intervall $0 < \sigma < \sigma_1$ gilt das Hooke'sche Gesetz (Gl. (1)). Punkt 1 wird als Proportionalitätsgrenze bezeichnet, und der Elastizitätsmodul ergibt sich aus der Steigung der so genannten Hooke'schen Geraden zu

$$E = \frac{\Delta \sigma}{\Delta \varepsilon} \quad (11)$$

Im linearen Bereich des Diagramms nehmen die Probekörper nach einer Entlastung ohne Verzögerung ihre ursprüngliche Länge wieder an; die Stoffe verhalten sich hier elas-

tisch. Im Intervall $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ bilden sich die Verformungen zwar auch noch zurück, wenn die Zugspannung aufgehoben wird, doch geschieht dies allmählich. Man beobachtet eine elastische Nachwirkung (Viskoelastizität), außerdem sind Spannung und Dehnung einander nicht mehr proportional. Punkt 2 des Diagramms wird Elastizitätsgrenze genannt. Sie kann weder streng definiert noch bestimmt werden und wird deshalb bei Metallen oft willkürlich als die zu einer bestimmten Dehnung gehörende Spannung festgelegt (technische Elastizitätsgrenze).

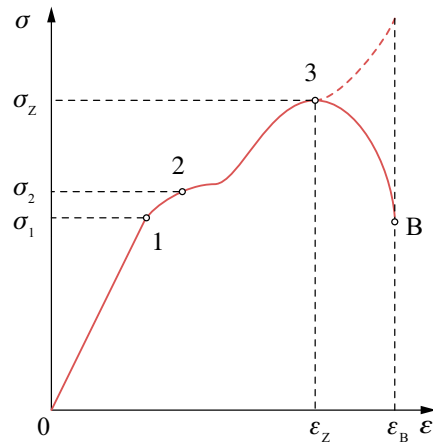


Abb. M.3.1.1 Spannungs-Dehnungs-Diagramm bei Zugbeanspruchung (schematisch)

Oberhalb des Punkts 2 werden die Proben irreversibel verformt. Hier sind die Stoffe plastisch, und das Spannungs-Dehnungs-Diagramm kann wegen strukturbedingter Fließ- und Verfestigungsprozesse kompliziert aussehen. Die höchste nominelle Spannung (Zugkraft F_Z bezogen auf den Anfangsquerschnitt A_0) wird Zugfestigkeit σ_z genannt. Oberhalb der entsprechenden Dehnung ε_z beginnt die Probeneinschnürung, die im Punkt B (Bruchdehnung ε_B) zum Zerreißen der Probe führt. Im oberen plastischen Bereich der Deformation schnüren sich die Zerreißproben an einer Stelle merklich ein.

Wird diese Querkontraktion berücksichtigt und die Zugkraft F_z jeweils auf den tatsächlichen Querschnitt der Probe bezogen, steigt die Kurve bis zum Bruch der Probe (gestrichelter Kurvenverlauf in Abb. M.3.1.1, auf die jeweilige aktuelle Querschnittsfläche der Probe bezogene Zugspannung). Einige Werkstoffe (z. B. gehärteter Kohlenstoffstahl) zerreißen bereits im oder am Ende des elastischen Bereichs, sie sind spröde. Andere Materialien werden bei Raumtemperatur schon bei den geringsten Belastungen plastisch verformt. Bei ihnen ist der elastische Bereich unterdrückt.

Das deformationsmechanische Verhalten der Werkstoffe hängt außerdem von den äußeren Bedingungen während der Beanspruchung ab. So werden Metalle bei höheren Temperaturen plastischer (Schmieden, Walzen und Pressschweißen), bei tiefen Temperaturen werden sie elastischer, sogar spröde. Letzteres gilt auch bei einer mit hoher Geschwindigkeit erfolgenden Deformation. Demnach gibt es keine deformationsmechanischen Materialkonstanten im strengen Sinne. Für die Werkstoffprüfung müssen Prüfverfahren und -bedingungen vereinbart werden, durch die die Stoffgrößen dann definiert sind.

3.1.1 Dehnung

Aufgabenstellung

Der Elastizitätsmodul E verschiedener Metalle soll aus der Dehnung von Drähten bestimmt werden.

Ein Draht sei an einem Ende eingespannt, während am anderen Ende eine Zugkraft F_0 angreift. Diese wird so groß gewählt, dass der Draht straff gespannt ist. Am Draht sind zwei Marken 1 und 2 angebracht, die bei der Belastung F_0 den Abstand l haben sollen. Beide Marken werden mit je einem Mikroskop beobachtet. Die Mikroskopständer dürfen während des Versuchs nicht verschoben werden. Dagegen soll sich jedes Mikroskop relativ zu seinem Ständer mit Hilfe

einer Messschraube parallel zu dem zu untersuchenden Draht bewegen lassen, so dass man nach Vergrößerung der Zugkraft die Verschiebung der beiden Marken messen kann.

Versuchsausführung

Man belastet den Draht mit der Zugkraft F_0 und misst den Abstand l . Der Drahtdurchmesser $2r$ ist an etwa zehn verschiedenen Stellen zwischen den Marken zu bestimmen. Zur Berechnung des Querschnittes wird der arithmetische Mittelwert \bar{r} verwendet. Die beiden Messschrauben werden auf null gestellt und es wird die Lage von Marke 1 bzw. Marke 2 an den Okularskalen der Mikroskope abgelesen. Nach zusätzlicher Belastung des Drahts mit der Zugkraft F_z sind die Messschrauben so zu stellen, dass die beiden Marken mit den gleichen Teilstrichen der Okularskalen wie vor der Belastung zur Deckung kommen. Die Differenz der Messschraubeneinstellung ist die der Zugkraft F_z entsprechende Verlängerung Δl .

Man berechnet die Zugspannung σ nach Gl. (2), die Dehnung ε nach Gl. (3) und wiederholt die Messung bei mehreren verschiedenen großen Zugkräften. σ ist über ε graphisch darzustellen. Der Elastizitätsmodul E ergibt sich aus dem Anstieg der Ausgleichsgeraden nach Gl. (11). Der Versuch ist mit einem Draht aus anderem Material zu wiederholen. Es ist zu beachten, dass die Drähte keine Knicke haben dürfen.

3.1.2 Biegung

Aufgabenstellung

1. Der Elastizitätsmodul E von zwei verschiedenen Metallen ist aus der Biegung von Stäben zu ermitteln.
2. Es sind für zwei Rohre aus gleichem Material mit gleichem Außendurchmesser aber unterschiedlicher Wanddicke die Flächenträgheitsmomente aus der Biegung bei zweiseitiger Auflage zu bestimmen. Mit dem

gegebenen Wert für den Elastizitätsmodul sind die Biegesteifigkeiten zu berechnen und zu diskutieren.

Gegeben sei ein homogener Stab (Dichte ρ , Querschnitt A), der auf zwei Schneiden (Abstand l) liegt. Jede der beiden Schneiden ist dadurch mit der Kraft $0,5 F_0$ belastet.

Das Gewicht des Stabs F_0 kann unter der Voraussetzung, dass die Stablänge mit dem Schneidenabstand übereinstimmt, als

$$F_0 = g \rho A l \quad (12)$$

geschrieben werden. Der Stab ist infolge der Wirkung seines Gewichts auch ohne zusätzliche Belastung etwas gebogen. Lässt man in der Mitte zwischen den Auflagern senkrecht zur Stabachse eine Kraft F angreifen, wird die Durchbiegung vergrößert.

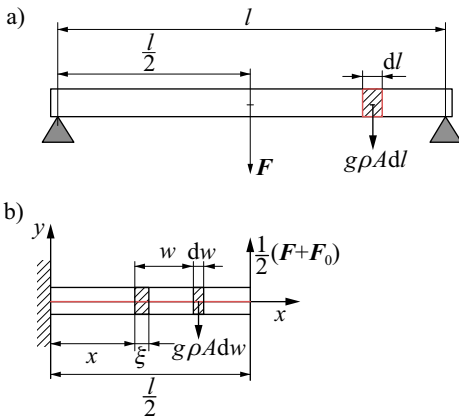


Abb. M.3.1.2. Gleichwertige Anordnungen zur Untersuchung der Biegung

Abb. M.3.1.2 zeigt zwei Anordnungen zur Untersuchung der Biegung. Diese sind gleichwertig, wenn beide Stäbe aus dem gleichen Metall bestehen und den gleichen konstanten Querschnitt A haben.

Die folgenden Überlegungen beziehen sich auf die Anordnung in Abb. M.3.1.2b, bei der die in der Mitte des Stabs angreifende Kraft nach oben wirkt. Dadurch werden die oberen

Schichten des Stabs zusammengedrückt und die unteren gedehnt. Im Inneren gibt es eine Schicht, deren Länge sich nicht ändert. Diese Schicht bezeichnet man als neutrale Faser. Die Gleichung der neutralen Faser $y(x)$ kann unter Erfüllung folgender Voraussetzungen berechnet werden:

1. Das Hooke'sche Gesetz Gl. (1) gilt.
2. Ein ebener Querschnitt des Stabs bleibt bei allen auftretenden Belastungen eben.
3. Die Durchbiegung ist so klein, dass für alle vorkommenden Werte von x der Betrag der Ableitung dy/dx sehr klein gegen 1 ist.

Auf den Stabquerschnitt an der Stelle x (Abb. M.3.1.2b und Abb. M.3.1.3) wirkt ein Drehmoment im Uhrzeigersinn

$$M_1 = g \rho A \int_0^{\frac{l}{2}-x} w dw + \int_A \eta \sigma_\eta dA \quad (13)$$

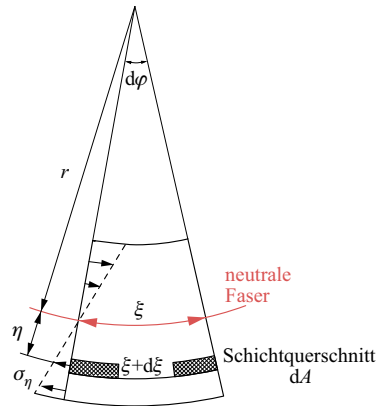


Abb. M.3.1.3. Deformiertes Volumenelement als Folge der Biegung (stark vergrößert)

Für die Normalspannung σ_η (Abb. M.3.1.3) gilt nach dem Hooke'schen Gesetz

$$\sigma_\eta = E \varepsilon_\eta = E \frac{d\xi}{\xi} = E \frac{\eta}{r} \quad (14)$$

Dabei sind ε_η die relative Dehnung sich einer im Abstand η von der neutralen Faser befindenden Schicht, r der Krümmungsradius der

neutralen Faser an der Stelle x und E der Elastizitätsmodul. Das beim Einsetzen von Gl. (14) in Gl. (13) entstehende Integral

$$I_\eta = \int_A \eta^2 dA \quad (15)$$

bezeichnet man als (axiales) Flächenträgheitsmoment. Seine Dimension ist Länge⁴ (Einheit m⁴). Für einige Stabprofile sind die Berechnungsformeln für das Flächenträgheitsmoment im Anhang A.14 dargestellt. Die Biegesteifigkeit B ergibt sich als Produkt aus dem Elastizitätsmodul des Materials und dem Flächenträgheitsmoment ($B = E I_\eta$). Wenn man das erste Integral in Gl. (13) löst und Gl. (15) verwendet, erhält man

$$M_1 = \frac{1}{2} g \rho A \left(\frac{l}{2} - x \right)^2 + \frac{E}{r} I_\eta \quad (16)$$

Die Kraft $0,5 (F + F_0)$ übt auf den Querschnitt an der Stelle x (Abb. M.3.1.2b) ein Drehmoment im mathematisch positiven Sinne der Stärke

$$M_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right) (F + F_0) \quad (17)$$

aus. Im Gleichgewichtsfall gilt $M_1 = M_2$.

Aus den Gln. (16) und (17) folgt bei Verwendung von Gl. (12)

$$\frac{1}{r} E I_\eta = \frac{1}{4} F (l - 2x) + \frac{1}{2} g \rho A \left\{ \left(\frac{l}{2} \right)^2 - x^2 \right\} \quad (18)$$

Die Größe $1/r$ ist die Krümmung der neutralen Faser an der Stelle x . Aus der Theorie der Berührung höherer Ordnung folgt für die Krümmung einer Kurve $y(x)$

$$\frac{1}{r} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad .$$

Nach Voraussetzung 3 soll $(dy/dx)^2$ vernachlässigbar klein gegen 1 sein. In dieser Näherung gilt $\frac{1}{r} = \pm \frac{d^2 y}{dx^2}$.

Die Integration der Gleichung

$$\pm E I_\eta \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{4} F (l - 2x) + \frac{1}{2} g \rho A \left\{ \left(\frac{l}{2} \right)^2 - x^2 \right\} \quad (18a)$$

liefert bei Berücksichtigung der Randbedingungen $\frac{dy}{dx}(x=0) = y(0) = 0$ die Gleichungen

$$\pm E I_\eta \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} F (l x - x^2) + \frac{1}{2} g \rho A \left\{ \left(\frac{l}{2} \right)^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right\} \quad (19)$$

$$\pm E I_\eta y = \frac{1}{4} F \left(\frac{l}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) + \frac{1}{4} g \rho A \left\{ \left(\frac{l}{2} \right)^2 x^2 - \frac{1}{6} x^4 \right\} \quad (20)$$

Da im vorliegenden Falle $y(x)$ im Intervall $0 < x < l/2$ positiv ist, muss in den Gln. (18a) bis (20) das positive Vorzeichen verwendet werden. Die Funktion der neutralen Faser hat an der Stelle $x = l/2$ sowohl die größte Steigung als auch den größten Funktionswert. Mit

$$\varphi \approx \tan \varphi = \frac{dy}{dx} (x = l/2)$$

folgt aus Gl. (19)

$$E I_\eta \varphi = \frac{1}{16} \left(F l^2 + \frac{2}{3} g \rho A l^3 \right) \text{ bzw.}$$

$$\varphi = \frac{l^2 \left(F + \frac{2}{3} F_0 \right)}{16 E I_\eta} . \quad (21)$$

Mit Gl. (20) ergibt sich für $x = l/2$

$$E I_\eta s = \frac{1}{48} \left(F l^3 + \frac{5}{8} g \rho A l^4 \right)$$

und man erhält für den Biegefeil s

$$s = \frac{l^3 \left(F + \frac{5}{8} F_0 \right)}{48 E I_\eta} . \quad (22)$$

Im Experiment ist der Stab zunächst mit einer Schale (Masse m_s) belastet, die zur Aufnahme von Wägestücken dient. Man erhält den Winkel φ_0 bzw. den Biegefeil s_0 , indem man in den Gln. (21) und (22) $F = m_s g$ setzt. Anschließend wird auf die Schale ein Wägestück der Masse m gelegt. Der Winkel φ ergibt sich aus Gl. (21), der Biegefeil s aus Gl. (22) mit $F = (m_s + m) g$. Gemessen werden die Differenzen $\varphi - \varphi_0$ oder $s - s_0$. Dafür können die Gln. (21) und (22) umgeformt werden:

$$E = \frac{l^2 m g}{16 I_\eta (\varphi - \varphi_0)} , \quad (21a)$$

$$E = \frac{l^3 m g}{48 I_\eta (s - s_0)} . \quad (22a)$$

Das Gewicht des Stabs und das der Schale müssen demzufolge nicht bekannt zu sein. Um den Elastizitätsmodul E angeben zu können, muss man das Flächenträgheitsmoment I_η für den Querschnitt berechnen. Voraussetzung für die Berechnung ist, dass man die Lage der neutralen Faser kennt. Es gilt $\int_A \sigma(\eta) dA = 0$ oder $\int_A \eta dA = 0$ nach Gl. (15), da sich der Stab bei der Biegung insgesamt

weder verlängert noch verkürzt. Daraus folgt, dass der Massenmittelpunkt des Stabs in der neutralen Faser liegen muss. Hat der unbelastete Stab senkrecht zur Biegekraft eine Symmetrieebene, stellt die Symmetrieebene die neutrale Faser dar. Beispiele für diesen Fall sind Stäbe mit rechteckigem oder kreisförmigem Querschnitt, Rohre und I-Träger. Für U- oder T-Träger (Biegekraft nach oben oder unten) muss die Lage der neutralen Faser berechnet werden.

Versuchsausführung

Bei Aufgabe 1 wird der zu untersuchende Stab so auf die Schneiden gelegt, dass die Enden des Stabs nur wenig überstehen (Abb. M.3.1.2) und der Abstand l zwischen den Schneiden gemessen. Danach wird die Schale zur Aufnahme der Wägestücke in der Mitte zwischen den Schneiden an den Stab gehängt. Man misst den Biegefeil s_0 z. B. mit einer Messuhr oder einem elektronischen Sensor (Wegaufnehmer). In gleicher Weise sind die Biegefeile s_i nach Belastung der Schale mit Wägestücken der Masse m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) zu bestimmen. Zur graphischen Auswertung wird die Kraft über den Biegefeil dargestellt. Der gesuchte Elastizitätsmodul E ergibt sich nach Gl. (22) mit dem Anstieg ($\Delta F / \Delta s$) der Ausgleichsgeraden:

$$E = \frac{l^3 \Delta F / \Delta s}{48 I_\eta} . \quad (23)$$

Wenn statt des Biegefeils s der Winkel φ gemessen werden soll, befestigt man an einem Ende des Stabs einen kleinen Spiegel. Eine senkrecht stehende Skala wird über den Spiegel durch ein Fernrohr mit Visierlinie beobachtet. Anstelle eines Fernrohres kann man auch die Reflexion eines Laserstrahls (Durchmesser $< 1\text{ mm}$) nutzen, dessen reflektierter Strahl als kleiner Lichtfleck auf der Skala beobachtet werden kann. In diesem Fall sind die Sicherheitsbestimmungen beim Umgang mit Laserlicht zu beachten.

Der Abstand L zwischen Spiegel und Skala wird gemessen. Ist der Stab nur mit der Schale belastet, wird am Maßstab der Skala der Wert z_0 abgelesen, bei zusätzlicher Belastung mit einem Wägestück der Masse m_i der Wert z_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Dann gilt

$$2(\varphi_i - \varphi_0) \approx \tan 2\varphi_i - \tan 2\varphi_0 = \frac{(z_i - z_0)}{L}.$$

Man stellt $F_i = m_i g$ über $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_0$ dar und aus dem Anstieg der besten Geraden $\Delta F / \Delta\varphi$ kann der gesuchte Elastizitätsmodul E ermittelt werden:

$$E = \frac{l^2 \Delta F / \Delta\varphi}{16 I_\eta} \quad (24)$$

Die Gleichung zur Berechnung des Flächenträgheitsmoments I_η für unterschiedliche Stabquerschnitte kann der Tabelle A.14 im Anhang entnommen werden. Alle zur Berechnung von I_η benötigten Längen sind mit mechanischen Messwerkzeugen zu bestimmen.

Ergänzend zur zweiseitigen Auflage kann einer der flachen Stäbe bei einseitiger Einspannung vermessen werden (Abb. M.3.1.4).

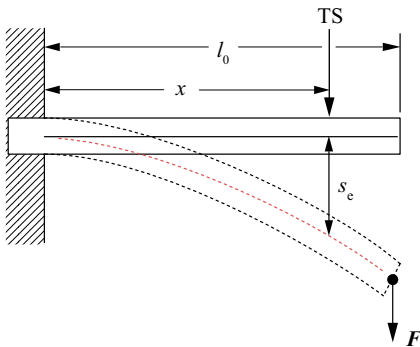


Abb. M.3.1.4 Zur Messung der Biegung eines einseitig eingespannten Stabs (schematisch), Taststift TS

In diesem Fall wirkt die Gewichtskraft F am freien Ende des Stabs der Länge l_0 und in

Analogie zur Herleitung der Gl.(18) folgt:

$$E I_\eta y_e(x) = \frac{1}{2} F \left(l_0 x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) + C_K \quad (20b)$$

mit dem Korrekturterm

$$C_K = \frac{1}{4} g \rho A \left\{ l_0^2 \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6} x^4 \right\},$$

der die Eigenmasse des Stabs berücksichtigt. Kann der Korrekturterm C_K vernachlässigt werden, ergibt sich für den Biegepfel $s_e = y_e(x)$ im Abstand x vom Befestigungspunkt des Stabs

$$s_e = \frac{F}{2 E I_\eta} \left(l_0 x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right). \quad (25)$$

Besonders einfach wird Gl.(25), wenn der Biegepfel unmittelbar am Ende ($x = l_0$) des einseitig eingespannten Stabs gemessen werden kann:

$$s_e = \frac{F l_0^3}{3 E I_\eta}. \quad (25a)$$

Nach dem Einspannen des Stabs misst man den Abstand x und die Stablänge l_0 , anschließend den Biegepfel s_e mit einer Messuhr oder einem induktiven Wegaufnehmer in Abhängigkeit von der Belastung F am Ende des Stabs. Die Auswertung soll graphisch unter Verwendung des Anstiegs der Ausgleichsgeraden mit Hilfe eines $s_e(F)$ -Diagramms erfolgen:

$$\frac{ds_e}{dF} = \frac{l_0 x^2 - \frac{x^3}{3}}{2 E I_\eta}.$$

Mit den zu messenden Werten für l_0 und x sowie dem Wert für I_η kann der Wert des Elastizitätsmoduls bestimmt werden.

Bei Aufgabe 2 ist für zwei Metallrohre aus demselben Material mit gleichem Außenradius aber verschiedenen Innenradien die Abhängigkeit $F(s)$ zu messen und graphisch

darzustellen. Bei bekanntem Wert für den Elastizitätsmodul des Rohrmaterials ist nach der Bestimmung des Anstiegs der Ausgleichsgeraden unter Anwendung von Gl.(23) das Flächenträgheitsmoment für beide Rohre zu bestimmen. Danach berechnet man die Biegesteifigkeit der beiden Rohre und diskutiert den Einfluss der unterschiedlichen Innenradien (Wanddicken) auf die Biegesteifigkeit auch im Vergleich zu einem entsprechenden Vollstab.

Bei Verwendung einer mechanischen Messuhr zur Messung des Biegepeils ist ggf. die Federkraft F_F , mit der der Taststift auf den Stab wirkt, zu berücksichtigen. In diesem Fall muss zur Kraft F noch die Kraft $F_F = c(x_a - x)$ addiert werden, wobei x den gespannten und x_a den nicht gespannten Zustand beschreibt. Die Größe von x hängt von der Größe des Biegepeils ab. Die Federkonstante c kann mit der im Versuch M.3.3 beschriebenen Methode bestimmt werden.

3.2 Torsionsmodul

Der Torsionsmodul G lässt sich aus Untersuchungen an verdrehten Stäben mit kreisförmigem Querschnitt bestimmen.

Gegeben sei ein einseitig eingespannter Stab, dessen Länge l groß gegen den Radius r sein soll. Betrachtet man im Stabinneren einen koaxialen Hohlzylinder mit dem Radius r' und der Dicke dr' (Abb. M.3.2.1) und lässt am freien Ende peripher eine Schubkraft dF_s angreifen, wird eine ursprünglich senkrechte Faser des Zylindermantels um den Scherwinkel α gedreht. Für den Bogen $s = r' \varphi$ gilt unter der Voraussetzung $|\alpha| \ll 1$ in guter Näherung $s = l \alpha$. Damit folgt nach Gl.(5)

$$\tau = G \alpha = G \frac{r'}{l} \varphi .$$

Das Produkt aus der Schubspannung τ und dem Querschnitt des Hohlzylinders ist die Schubkraft

$$dF_s = G \frac{r'}{l} \varphi 2\pi r' dr' .$$

Durch Multiplikation mit dem Hebelarm r' geht die Schubkraft in das Drehmoment über:

$$dM = \frac{2\pi G}{l} \varphi r'^3 dr' .$$

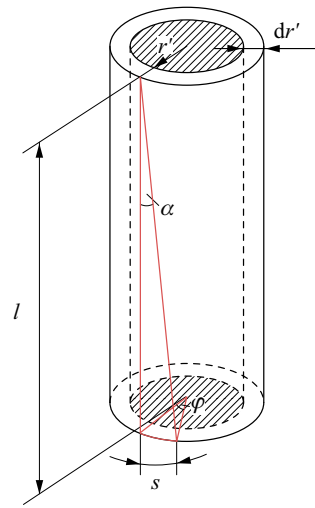


Abb. M.3.2.1 Torsion eines Zylinders

Das resultierende Drehmoment erhält man durch Integration

$$M = \int dM = \frac{2\pi G}{l} \varphi \int_0^r r'^3 dr' ,$$

über alle Hohlzylinder und es folgt

$$M = \frac{\pi G r^4}{2 l} \varphi . \quad (26)$$

Wenn zur Verdrehung des Stabs ein großes Drehmoment erforderlich ist, empfiehlt sich eine statische Bestimmung des Torsionsmoduls. Liegt dagegen das zu untersuchende Material als Draht vor, wird der Torsionsmodul zweckmäßigerweise mit einer dynamischen Messmethode ermittelt.

3.2.1 Statische Messmethode

Aufgabenstellung

Der Torsionsmodul von Stäben aus verschiedenem Material soll statisch bestimmt werden. Die Ergebnisse sind mit den Werten im Anhang A.7 zu vergleichen.

Das nicht eingespannte Ende eines Stabs wird starr mit einer zylindrischen Scheibe (Radius R) verbunden. Dabei sollen Stab- und Scheibenachse übereinstimmen. Wenn man nun die Schubkraft F_s in der in Abb. M.3.2.2 dargestellten Weise an der Scheibe angreifen lässt, ist das auf den Stab übertragene Drehmoment

$$M = R F_s . \quad (27)$$

Aus den Gln. (26) und (27) erhält man für den Torsionsmodul

$$G = \frac{2 l R F_s}{\pi r^4 \varphi} . \quad (28)$$

An das freie Ende des Stabs wird ein Spiegel befestigt. Ein auf den Spiegel fallender Laserstrahl soll nach der Reflexion auf eine Skala treffen, die den senkrechten Abstand L vom Spiegel hat.

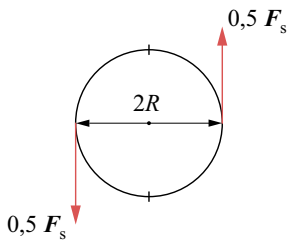


Abb. M.3.2.2 Wirkung der Schubkraft bei der statischen Methode

Dreht sich die mit dem Stab verbundene Scheibe um den Winkel φ , wird der Lichtpunkt des Lasers auf der Skala um die Strecke x verschoben. Dann gilt

$$\tan 2\varphi = x/L , \quad (29)$$

oder für $|\alpha| \ll 1$ folgt

$$\varphi = \frac{x}{2L} . \quad (29a)$$

Versuchsausführung

Man misst die Stablänge l , die Durchmesser $2r$ bzw. $2R$ des Stabs bzw. der Scheibe sowie den Abstand L zwischen Spiegel und Skala. Anschließend sind die Werte x_1, x_2, \dots, x_n für n verschieden große Schubkräfte zu ermitteln. Die zugehörigen Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ergeben sich aus Gl. (29) bzw. Gl. (29a). Man bestimmt den arithmetischen Mittelwert aller Quotienten F_{si}/φ_i und berechnet den Torsionsmodul aus Gl. (28). Der Versuch ist mindestens mit einem Stab aus anderem Material zu wiederholen. Die für die betreffende Laserschutzklasse gültigen Sicherheitsbestimmungen liegen am Arbeitsplatz aus und müssen strikt eingehalten werden.

3.2.2 Dynamische Messmethode

Aufgabenstellung

1. Der Torsionsmodul eines Drahts soll dynamisch bestimmt werden.
2. Das Trägheitsmoment eines Quaders in Bezug auf eine gegebene Drehachse durch den Schwerpunkt ist mit Hilfe von Dreh-schwingungen zu ermitteln.

Ein Draht habe die Länge l und den Radius r . Das obere Ende sei eingespannt, das untere mit einer zylindrischen Scheibe belastet. Dreht man die Scheibe um den Winkel φ_0 aus ihrer Ruhelage und lässt sie zum Zeitpunkt $t = 0$ los, führt das System unter der Wirkung der elastischen Kräfte des verdrehten Drahts Torsionsschwingungen aus (M.2.0.1). Bei einem Auslenkwinkel φ ist der Betrag des rücktreibenden Drehmoments durch Gl. (26) gegeben. Die Größe

$$D = \frac{\pi G r^4}{2l} \quad (30)$$

ist das Direktionsmoment des Torsionspendels. Bezeichnet man mit J das Trägheitsmoment des Systems, lautet nach Gl. (M.2-18) die Bewegungsgleichung

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -D \varphi \quad , \quad (31)$$

und für die Schwingungsdauer gilt (Gl. (M.2-23)):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \quad . \quad (31a)$$

Ist das Trägheitsmoment J bekannt, kann der Torsionsmodul G aus den Gln. (30) und (31a) bestimmt werden. Im Allgemeinen lässt sich aber das Trägheitsmoment des Systems (Draht, Scheibe und Befestigungsvorrichtung) nicht berechnen. Aus diesem Grunde ist es notwendig, J zu eliminieren. Dazu schraubt man einen Zylinder (Masse m , Radius R) so an die schon vorhandene Scheibe, dass die Achse des Zylinders mit der Drahtachse übereinstimmt. Das Trägheitsmoment des Torsionspendels vergrößert sich dadurch um den Anteil

$$J_1 = \frac{1}{2} m R^2$$

und die Schwingungsdauer wird

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J + J_1}{D}} \quad . \quad (31b)$$

Wenn man die Gln. (31a) und (31b) quadriert und anschließend voneinander abzieht, ergibt sich für das Direktionsmoment

$$D = \frac{4\pi^2 J_1}{T_1^2 - T^2} = \frac{2\pi^2 m R^2}{T_1^2 - T^2} \quad . \quad (32)$$

Aus den Gln. (30) und (32) folgt

$$G = \frac{4\pi l m R^2}{r^4 (T_1^2 - T^2)} \quad . \quad (33)$$

Versuchsausführung

Die Masse m und der Durchmesser $2R$ des Zylinders sowie die Länge l und der Durchmesser $2r$ des Drahts werden bestimmt. Der Drahtdurchmesser ist an verschiedenen Stellen zu messen. In Gl. (33) soll der arithmetische Mittelwert des Radius \bar{r} verwendet werden. Die Schwingungsdauern T , T_1 und T_2 (siehe unten) können mit einer elektronischen Messanordnung (Lichtschranke, Digitalzähler) oder manuell mit einer digitalen Stoppuhr gemessen werden. Im letzteren Fall stoppt man mehrfach die Zeit für je 50 Schwingungen, um die Messunsicherheit zu verringern. Der Torsionsmodul G ergibt sich aus Gl. (33). Als Versuchskörper in Aufgabe 2 wird ein flacher Quader verwendet (Länge a , Breite b , Dicke c , $a, b \gg c$, Masse M). Die Massen der Zusatzscheibe und des Versuchskörpers werden gegeben, die geometrischen Abmessungen sind selbst zu ermitteln. Zur Bestimmung des Trägheitsmoments J_2 des Versuchskörpers aus den durchgeführten Messungen verwendet man

$$J_2 = \frac{G r^4}{8l\pi} (T_2^2 - T^2) \quad , \quad (34)$$

die unmittelbar aus den Gln. (30) und (32) folgt. T_2 bezeichnet die Schwingungszeit für das System Grundscheibe mit Versuchskörper. Zur theoretischen Berechnung von J_2 geht man von der Definition des Trägheitsmoments (M.2.0.1) aus und berechnet das Integral zweckmäßigerweise unter Zugrundelegung kartesischer Koordinaten:

$$J_2 = \rho \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-c/2}^{c/2} (x^2 + y^2) dx dy dz \quad .$$

Daraus folgt nach wenigen Rechenschritten für das gesuchte Trägheitsmoment eines flachen Quaders

$$J_2 = \frac{M}{12} (a^2 + b^2) \quad .$$

3.3 Federkonstante und Torsionsmodul

Aufgabenstellung

1. Ein berührungsloser Wegaufnehmer ist zu kalibrieren.
2. Die Federkonstante einer Schraubenfeder soll mit einem Wegaufnehmer statisch und dynamisch bestimmt werden.
3. Der Torsionsmodul des Federmaterials ist zu berechnen.

Eine Schraubenfeder (Drahtradius r , Windungsradius R) habe n Windungen und sei am oberen Ende eingespannt. Hängt man an das untere Ende einen Körper der Masse m , wird die Feder um das Stück x gedehnt (Abb. M.3.3.1). Im Gleichgewichtsfall ist die Summe der Kräfte gleich null:

$$mg - cx = 0.$$

Darin sind g die Schwerkraftbeschleunigung und c die Federkonstante. Für den Zusammenhang zwischen Federkonstante c und der Belastung der Feder mit der Masse m folgt

$$c = \frac{m}{x} g. \quad (35)$$

Wenn man die belastete Feder, z. B. mit der Hand, aus ihrer Ruhelage zieht und dann loslässt, beginnt das System zu schwingen.

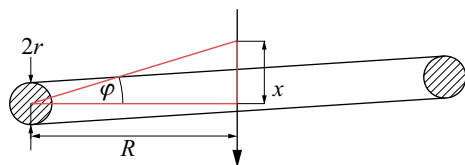


Abb. M.3.3.1 Schnitt durch die unterste Windung einer um das Stück x gedehnten Schraubenfeder

Die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g - \frac{c}{m} x = -\frac{c}{m} \left(x - \frac{mg}{c} \right) \quad (36)$$

hat eine partikuläre Lösung (Anhang A.2)

$$x = A \sin \omega t + \frac{mg}{c}, \quad (37)$$

worin A eine Konstante und ω die Kreisfrequenz ist. Aus Gl. (37) folgt

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 \left(x - \frac{mg}{c} \right). \quad (38)$$

Der Vergleich der Gln. (36) und (38) liefert für die Kreisfrequenz bei vernachlässigbarer Dämpfung

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{c}{m}. \quad (39)$$

Während der Schwingungen (Schwingungsdauer T) wandeln sich kinetische und potentielle Energie ständig ineinander um. Bei diesem Prozess müssen auch die Energieanteile der schwingenden Feder (Masse m_F) berücksichtigt werden. In Gl. (39) ist aus diesem Grunde m durch $(m + 1/3 m_F)$ zu ersetzen (siehe unten).

[[Bei einer Längenänderung x der Feder (Federkonstante c) durch die Belastung mit einer Masse m speichert die Feder potentielle Energie:

$$E_{\text{pot}} = - \int_0^x F_{x'} dx' = \int_0^x c x' dx', \quad E_{\text{pot}} = \frac{c x^2}{2}.$$

Zur Berechnung der kinetischen Energie wird die Feder (Federmasse m_F , Länge der Feder L) in kleine Massestücke dm_F zerlegt (Abb. M.3.3.2): $dm_F = m_F (dl/L)$. Die gleichmäßige Federdehnung über die gesamte Federlänge L bedingt eine Auslenkung δ eines Federstücks dl aus der Ruhelage: $\delta = x (l/L)$. Damit ergibt sich für die kinetische Energie des Federstücks dl

$$\frac{1}{2} dm_F \delta^2 = \frac{1}{2} m_F \frac{dl}{L} \dot{x}^2 \left(\frac{l}{L} \right)^2,$$

und für die kinetische Energie der Feder $E_{\text{kin,F}}$

$$E_{\text{kin,F}} = \int_{l=0}^L \frac{m_F}{2} \dot{x}^2 \frac{l^2}{L^3} dl = \frac{m_F}{2} \dot{x}^2 \frac{l^3}{3L^3} \Big|_0^L$$

folgt $E_{\text{kin},F} = \frac{1}{2} m_F \dot{x}^2 \frac{1}{3}$. Da die gesamte kinetische Energie die Summe aus den kinetischen Energien der Feder $E_{\text{kin},F}$ und der Masse m ($E_{\text{kin},m} = \frac{m}{2} \dot{x}^2$) ist, erhält man unter Berücksichtigung des Energieerhaltungssatzes als Gesamtenergie

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \\ = \frac{1}{2} \left(m + \frac{m_F}{3} \right) \dot{x}^2 + \frac{c x^2}{2} = \text{const.}$$

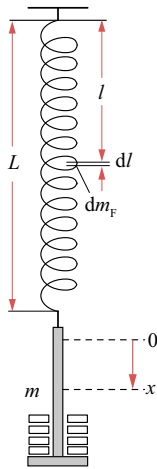


Abb. M.3.3.2 Zur Begründung des Einflusses der Federmasse m_F auf die Frequenz der Feder-schwingung, $dm_F = m_F (dl/L)$

Die Schwingungsgleichung (ohne Reibung) folgt aus der Ableitung $dE_{\text{ges}}/dt = 0$:

$$\frac{1}{2} \left(m + \frac{m_F}{3} \right) 2\dot{x}\ddot{x} + \frac{2c\dot{x}x}{2} = 0, \\ \ddot{x} + \frac{c}{m + \frac{m_F}{3}} x = 0.$$

Daraus ergibt sich die Eigenkreisfrequenz der Schwingung mit

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m + \frac{m_F}{3}}}$$

bei Vernachlässigung der Dämpfung.]

Für die Federkonstante folgt dann

$$c = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \left(m + \frac{1}{3} m_F \right). \quad (40)$$

Die Feder speichert bei einer Auslenkung x aus der Ruhelage eine potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = \frac{c}{2} x^2. \quad (41)$$

Bei dieser Dehnung wird nach Abb. M.3.3.1 der Draht um den kleinen Winkel $\varphi = x/R$ gedreht. Die potentielle Energie, die der Draht bei der Drillung aufnimmt, beträgt nach Gl. (26):

$$E_{\text{pot}} = \int_0^\varphi M d\varphi = \frac{\pi G r^4}{2l} \int_0^\varphi \varphi d\varphi = \frac{\pi G r^4}{4l} \varphi^2. \quad (42)$$

Für die Länge des Drahts kann man im Allgemeinen in guter Näherung

$$l = 2\pi n R$$

schreiben. Damit lautet Gl. (42)

$$E_{\text{pot}} = \frac{G r^4}{8nR} \varphi^2 = \frac{G r^4}{8nR^3} x^2. \quad (43)$$

Aus dem Vergleich der Gln. (41) und (43) erhält man für den Torsionsmodul

$$G = \frac{4nR^3c}{r^4}. \quad (44)$$

Versuchsausführung

Die Bestimmung der Federkonstanten soll mit einem berührungslos messenden induktiven Wegaufnehmer erfolgen, dessen Auflösung kleiner als 0,01 mm ist. Dieser besteht aus mehreren Spulen (Primär- und Sekundärspulen SP, Abb. M.3.3.3), die sich in einem Metallzylinder (Gehäuse G) befinden. Die Längsachse des Metallzylinders und die Bewegungsrichtung des Messobjekts müssen parallel zueinander verlaufen oder die Bewe-

gung muss durch geeignete mechanische Befestigungen in eine zum Zylinder achsenparallele Bewegung umgewandelt werden. Durch das Innere der Spulen wird ein dünner Stab mit einem magnetischen Kern (Anker A) geführt, der bei kleinen Veränderungen seiner Lage möglichst große Änderungen der Induktivität in den Spulen hervorruft und in den Sekundärspulen ausreichend hohe Spannungen induziert, die in ihrer Amplitude und in ihrer Phase zueinander von der Position des Ankers abhängen. Die Verschiebung des Ankers kann am Ausgang des Sensors als elektrische Spannung gemessen werden. In Aufgabe 1 muss der Wegaufnehmer kalibriert werden. Dazu befestigt man an der Messspindel MS einer Mikrometerschraube den Anker des Wegaufnehmers mit Hilfe eines mechanischen Adapters AD.

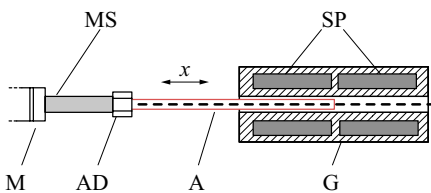


Abb. M.3.3.3 Kalibrierung eines induktiven Wegaufnehmers mit einer Mikrometerschraube (schematisch), Messschraube M, Messspindel MS, Adapter AD, Anker A, Gehäuse G, Sensorenspulen SP

Beim Eintauchen des Ankers in das Spulensystem des Wegaufnehmers werden die Induktivität des Spulensystems und dadurch die Größe der induzierten Spannung verändert. Der Wert der Sensorausgangsspannung U_s ist null, wenn sich der Anker in der Mitte des Spulensystems befindet. Man misst durch Verschieben des Ankers mit Hilfe der Messschraube die Abhängigkeit der Ausgangsspannung von der Verschiebung x des Ankers. Die graphische Darstellung $U_s(x)$ entspricht der Sensorkennlinie (Kalibrierkurve des Sensors). Dabei entspricht der Anstieg dU_s/dx der Sensorempfindlichkeit.

Um Aufgabe 2 auszuführen, wird der Sensor in senkrechter Position befestigt und man lässt den an der Schraubenfeder hängenden Anker so weit in den Wegaufnehmer hineinreichen, dass er sich im oberen Bereich der Spulen befindet. Anschließend belastet man die Feder mit verschiedenen Massen m_i und misst die zugehörigen Sensorspannungen U_{si} . Mit den in Aufgabe 1 ermittelten Parametern der Sensorkennlinie können die jeweiligen Verschiebungen x_i berechnet werden. Die Federkonstante c_{st} wird aus dem Anstieg der Ausgleichsgeraden der graphischen Darstellung $m(x)$ unter Verwendung von Gl. (35) bestimmt. Bei der dynamischen Messung schließt man einen digitalen Zähler an die Messeinrichtung an und belastet die Feder mit Gewichtsstücken bekannter Masse m , bestimmt hinreichend oft die zugehörigen Periodendauern T des schwingenden Systems und berechnet c_{dyn} nach Gl. (40). Dabei ist die Masse der Ankerbefestigung zu berücksichtigen. Mit den Werten von c_{st} und c_{dyn} ist der Torsionsmodul G nach Gl. (44) zu berechnen. Außerhalb der Messunsicherheiten auftretende Abweichungen sind unter Berücksichtigung der Unterschiede zwischen der statischen und der dynamischen Methode zu diskutieren.

Steht kein induktiver Wegaufnehmer zur Verfügung, kann der Versuch auch mit einfachen mechanischen Messmitteln durchgeführt werden.

4 Schallmessungen

4.0 Grundlagen

Erfährt in einem elastisch deformierbaren Medium ein Volumenelement durch Druck eine Verschiebung aus seiner stabilen Ruhelage, erleiden auch benachbarte Volumenelemente Verrückungen, die sich räumlich und zeitlich weiter ausbreiten. Es entsteht eine mechanische Welle. Die Gesamtheit

aller Flächenelemente des elastischen Körpers, die sich zu einer bestimmten Zeit im gleichen Schwingungszustand (in gleicher Phase) befindet, nennt man Wellenfläche. Eine ebene Welle liegt vor, wenn das Erregungszentrum von einem Aufpunkt unendlich weit entfernt liegt. Der Bereich von Schallwellen reicht von ≤ 1 Hz (Infraschall) bis ≥ 10 THz (Phononen), der Bereich des für den Menschen wahrnehmbaren Schalls liegt zwischen 20 Hz und 20 kHz. In Richtung höherer Frequenzen schließt sich der Bereich des Ultraschalls (20 kHz bis 10 GHz) an. In mehrdimensionalen Festkörpern treten infolge der nicht vernachlässigbaren Schubkräfte Longitudinal¹- und Transversalwellen² auf, die nur in unendlich ausgedehnten Systemen reine Dehnungs- bzw. Biegewellen sind. In begrenzten Festkörpern sind Dehnungs-, Torsions- und Biegewellen zu beobachten. Schallwellen in Flüssigkeiten und Gasen sind Longitudinalwellen, da man in ihnen im Allgemeinen den Einfluss der inneren Reibung und damit Scherkräfte vernachlässigen kann.

4.0.1 Wellengleichung

Im einfachsten (eindimensionalen Fall) kann die Ausbreitung der Verschiebungen in Richtung einer Koordinate x mit einer linearen Wellengleichung des Typs

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (1)$$

beschrieben werden. Dabei handelt es sich

¹Bei einer Longitudinalwelle sind Ausbreitungs- und Schwingungsrichtung der Teilchen identisch.

²Bei Transversalwellen schwingen die Teilchen in Ebenen, die senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Welle liegen. Derartige Wellen sind nur in Medien möglich, in denen infolge vorhandener Formelastizität Schubkräfte übertragen werden können.

um eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, für die unendlich viele Lösungen existieren. Die in Gl.(1) eingeführte Größe c beschreibt eine Geschwindigkeit, mit der sich ein bestimmter Schwingungszustand (eine Phase) ausbreitet. Sie ist in homogenen Medien konstant. Partielle Differentialgleichungen des Typs der Gl.(1) sind nicht allgemein lösbar. Zu partikulären Lösungen gelangt man mit einem Funktionsansatz

$$\xi(x, t) = \xi(x \mp ct) ,$$

wobei ξ eine beliebige, zweimal differenzierbare Funktion ist.

Die lokalen Schallschwingungen erfolgen so schnell, dass Wärmetransport und Temperaturengleich zwischen den durch eine halbe Wellenlänge getrennten Stellen der Erwärmung (infolge Kompression) oder Abkühlung (infolge Entspannung) des Mediums nicht wirksam werden können. Die Schallausbreitung kann deshalb im Allgemeinen als adiabatischer Prozess betrachtet werden. In Flüssigkeiten hängt die Schallgeschwindigkeit c_{Fl} vom Kompressionsmodul K ab:

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} , \quad (2)$$

$$c_{\text{Fl}}^2 = \frac{K}{\rho_{\text{Fl}}} . \quad (3)$$

Wenn keine Scherkräfte zu berücksichtigen sind, ist c_{Fl} frequenzunabhängig, d. h., es tritt keine Dispersion auf. Ist das deformierbare Medium ein ideales Gas, gilt die Adiabatangleichung (W.2.0.2):

$$V^\gamma p = \text{const} . \quad (4)$$

Differenziert man Gl. (4) nach V , ergibt sich

$$\gamma V^{\gamma-1} p + V^\gamma \frac{dp}{dV} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{p}{V} .$$

Damit lautet Gl. (2)

$$K = \gamma p ,$$

und man erhält

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho} . \quad (5)$$

In Gl.(4) bedeutet γ das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck c_p zur spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Volumen c_V (W.2.0.2). Beachtet man die für ideale Gase gültige Beziehung

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{T}{T_0} = \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 + \frac{T - T_0}{T_0} \right) , \quad (6)$$

ergibt sich die Schallgeschwindigkeit in Gasen als eine vom Druck unabhängige Funktion der absoluten Temperatur:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 + \frac{T - T_0}{T_0} \right)} . \quad (7)$$

Für Luft erhält man im Bereich der Zimmertemperatur ($|T - T_0| \ll T_0$) in guter Näherung

$$c_{\text{Luft}} = 331,5 \left(1 + \frac{T - T_0}{2 T_0} \right) \text{ m s}^{-1} . \quad (8)$$

In der Differentialgleichung für die Wellenausbreitung in begrenzten Festkörpern können je nach Art der Anregung der Schwingungen Ausbreitungsgeschwindigkeiten auftreten, die von unterschiedlichen mechanischen Materialgrößen abhängen:

$$c_D^2 = \frac{E}{\rho} \quad (\text{Dehnungswelle}) , \quad (9)$$

$$c_T^2 = \frac{G}{\rho} \quad (\text{Torsionswelle}) . \quad (10)$$

Dabei bezeichnen E den Elastizitätsmodul und G den Torsionsmodul.

Werden die Schwingungen sinusförmig angeregt gemäß

$$b = b_0 \sin(\omega t + \alpha) , \quad (11)$$

erfolgt eine sowohl zeitliche als auch räumliche periodische Ausbreitung der Verschiebungen in Form einer harmonischen Welle:

$$\xi(x, t) = b_0 \sin \left(\omega \left(t \mp \frac{x}{c} \right) + \alpha \right) . \quad (12)$$

Dabei beschreiben ω die Kreisfrequenz der Frequenz f ($\omega = 2\pi f$) und α die Phasenverschiebung. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen, dass ein Stab der Länge l an einem Ende frei und in der Mitte eingespannt ist, bildet sich eine stehende Welle aus, falls die Stablänge l gleich dem ungeradzahigen Vielfachen von $\lambda/4$ ist:

$$l = (2n - 1) \frac{\lambda}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) . \quad (13)$$

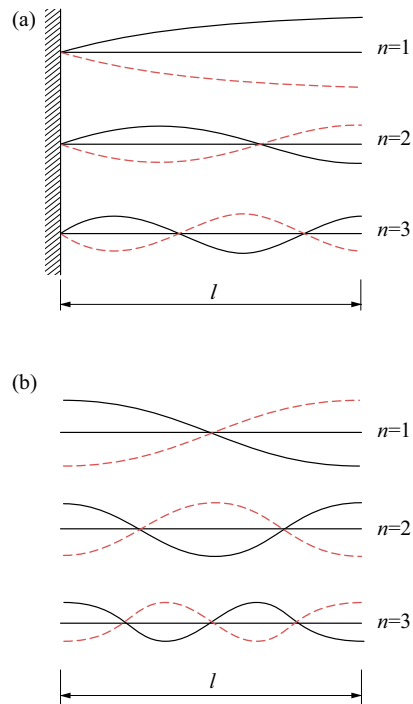


Abb. M.4.0.1 Longitudinalschwingungen in Stäben, (a) an einem Ende eingespannt, (b) an beiden Enden frei (Ordnung n)

Für die Eigenfrequenzen f_n der stehenden

longitudinalen Welle (Dehnungswelle) der Ordnung n erhält man

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = (2n-1) \frac{c}{4l}, \quad (14a)$$

wobei für die Grundschiwingung $n = 1$ und für die Oberschwingungen $n > 1$ (n ganzzahlig) gilt. Abb. M.4.0.1a vermittelt die entsprechenden stehenden Wellen bis zur zweiten Oberschwingung. Im Falle eines an beiden Enden freien Stabs (Abb. M.4.0.1b) bilden sich stehende Wellen aus, wenn die Stablänge l ein ganzzahliges Vielfaches von $\lambda/2$ ist. Die Eigenfrequenzen in Abhängigkeit von der Ordnung n ergeben sich dann nach der Gleichung

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n \frac{c}{2l}. \quad (14b)$$

Der Abstand zwischen benachbarten Schwingungsknoten (Schwingungsenergie null) ist eine halbe Wellenlänge.

Bei Biegewellen treten kompliziertere Verhältnisse auf. Die zugrunde liegende Differentialgleichung lautet in diesem Fall

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = - \frac{E I_\eta}{\rho A} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}. \quad (15)$$

I_η bezeichnet das Flächenträgheitsmoment des Stabquerschnitts A (M.3.1.2), E den Elastizitätsmodul und ρ die Dichte des Stabmaterials. Die Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen ergeben sich zu

$$f_n = \frac{m_n^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{E I_\eta}{\rho A}}. \quad (16)$$

Dabei sind die Werte von m_n Wurzeln transzendenter Gleichungen vom Typ

$\cos m_n \cosh m_n = -1$, die man entsprechenden Tabellen entnehmen kann (z. B. $m_1 = 1,875$, $m_2 = 4,694$, $m_3 = 7,851$).

Für Ordnungen $n > 3$ lässt sich der Wert für m_n durch die Gleichung $m_n = (2n-1)\pi/2$ mit hinreichender Genauigkeit berechnen. In Abb. M.4.0.2 sind die ersten drei Ordnungen einer stehenden Biegewelle eines einseitig eingeklemmten Stabs dargestellt. Im Gegensatz zu den Dehnungswellen sind die Knotenabstände nicht konstant. Schwingungsknoten treten z. B. an den Positionen $x = 0$ bei der ersten, $x = 0; 77 l$ bei der zweiten und $x = 0; 0,5 l$; $0,88 l$ bei der dritten Ordnung auf.

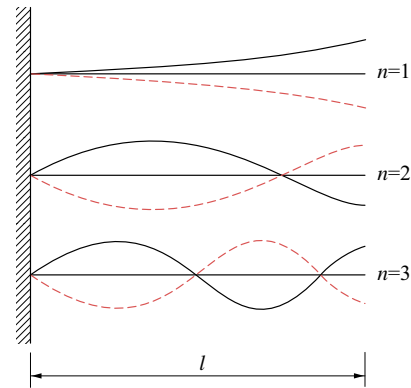


Abb. M.4.0.2 Biegeschwingungen in Stäben (Ordnung n), Stab an einem Ende eingespannt

Außerdem ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) der Biegewelle $c_{B,ph}$ frequenzabhängig (Schalldispersion) und genügt der Gleichung

$$c_{B,ph} = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{E I_\eta}{\rho A}}. \quad (17)$$

Mit der mittleren Wellenlänge

$$\lambda_n = \frac{4l}{2n-1} \quad (18)$$

und $c_{B,ph} = \lambda_n f_n$ erhält man

$$c_{B,ph} = \frac{8 m_n^2}{\pi (2n-1)^2} \sqrt{\frac{E I_\eta}{\rho A}} \frac{1}{\lambda_n}. \quad (17a)$$

Für Biegewellen auf Stäben folgt aus der allgemeinen Beziehung zwischen Gruppen (c_{gr})- und Phasengeschwindigkeit (c_{ph}),

$$c_{gr} = c_{ph} - \lambda \frac{dc_{ph}}{d\lambda}, \quad (19)$$

dass bei diesen die Gruppengeschwindigkeit $c_{B,gr}$ doppelt so groß wie die Phasengeschwindigkeit ist:

$$c_{B,gr} = 2 c_{B,ph}. \quad (20)$$

Dementsprechend wird in einem Festkörper durch eine Biegewelle mechanische Energie zweimal so schnell wie die Wellenphase transportiert. Die Bewegungsgleichung eines durch eine äußere Anregung mit der Frequenz $f = \omega/(2\pi)$ zu Schwingungen angeregten Stabs lautet analog zu den in M.2 bzw. im Anhang A.2 eingeführten Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\delta \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = a_0 \cos \omega t. \quad (21)$$

$z(t)$ bezeichnet die Auslenkung (Elongation), ω_0 die Eigenfrequenz der freien, ungedämpften Schwingung des Systems und δ die Dämpfungskonstante. Für den Schwingfall ($\delta \ll \omega_0$) wurde die Lösung von Gl. (21) bereits in M.2.3.1 beschrieben:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \approx \omega_0. \quad (22)$$

$$A(\omega) = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}, \quad (23)$$

$$A_{\max} = A(\omega_0) = \frac{a_0}{2\delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (24)$$

Zur Charakterisierung der materialabhängigen Dämpfung der Schallwellen werden dieselben Dämpfungsgrößen analog zum Versuch M.2.3.1 eingeführt:

Verlustfaktor D :

$$D = \frac{\Delta \omega}{\omega_0} \quad (\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1), \quad (25)$$

Dämpfungskonstante δ :

$$\delta = \frac{D \omega_0}{2} = \frac{\Delta \omega}{2}, \quad (26)$$

Güte Q :

$$Q = \frac{1}{D}, \quad (27)$$

Logarithmisches Dekrement A :

$$A = \pi D. \quad (28)$$

Die quadratische Form von Gl. (23)

$$A(\omega)^2 = \frac{a_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2} \quad (29)$$

wird durch die so genannte Lorentzkurve beschrieben (Abb. M.4.0.3).

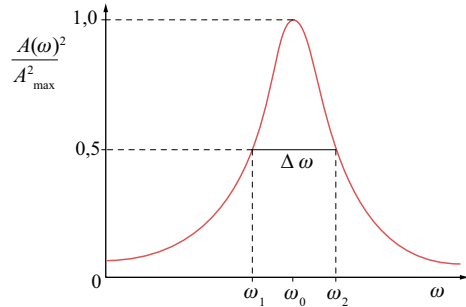


Abb. M.4.0.3 Lorentzkurve

Die Zeitkonstante des durch eine Exponentialfunktion beschreibbaren Ausschwingvorgangs $\tau = \delta^{-1}$, d. h., die Zeit, in der die Amplitude auf den e-ten Teil ihres Anfangswerts abgeklungen ist (Abb. M.2.3.2), entspricht gerade der halben Halbwertsbreite der stationären Resonanzkurve:

$$\Delta \omega = 2 \delta. \quad (30)$$

4.0.2 Schallwandler

Als Schallgeber und Schalldetektoren werden häufig piezoelektrische Wandler eingesetzt. Sie bestehen in der Regel aus speziellen Dielektrika, in denen unter dem Einfluss äußerer mechanischer Einwirkungen (z. B. Druck, Schallwellen) im Inneren elektrische Dipolmomente erzeugt bzw. vorhandene verändert werden. Dies hat zur Folge, dass an ihrer Oberfläche Ladungen messbar werden. Diese Erscheinung bezeichnet man als Piezoelektrizität. Oft wird die Piezoelektrizität ferroelektrischer Keramiken oder von Polymerelektronen genutzt.

Zur Erzeugung mechanischer Deformationen eines dielektrischen Mediums nutzt man den Effekt der Elektrostriktion aus, bei der in Abhängigkeit eines angelegten periodischen elektrischen Felds die Schwingungen des Schallgebers durch geeignete Schallankopplung auf das zu untersuchende Medium übertragen werden.

Alternativ werden Anordnungen verwendet, die auf dem Effekt der Magnetostraktion beruhen. Bringt man einen Stab aus ferromagnetischem Material in ein zur Stabachse parallel verlaufendes magnetisches Feld, erfährt dieser eine Längenänderung, die je nach der Magnetisierung des Materials und in Abhängigkeit von der Richtung des Magnetfelds eine Verlängerung oder Verkürzung sein kann. Die relativen Längenänderungen liegen in der Größenordnung von 10^{-6} .

Bei Anlegen eines magnetischen Wechselfelds (Frequenz f) ändert sich die Stablänge periodisch. Die im Stab auftretende mechanische Spannung ist eine Funktion der magnetischen Flussdichte und der elastischen Eigenschaften des Materials. Von den Enden des Stabs werden (Schall-) Wellen mit der gleichen Frequenz abgestrahlt. Dabei erreichen die Schwingungsamplituden ein Maximum für den Fall, dass die Frequenz der elastischen Eigenschwingung des Stabs (bzw. entsprechender Oberschwingungen) und die Erregerfrequenz übereinstimmen.

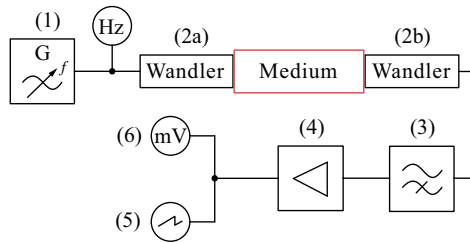


Abb. M.4.0.4 Versuchssatz für Schallmessungen an Metallstäben (schematisch)

Der bei den hier beschriebenen Versuchen verwendete Schallmessplatz besteht im Allgemeinen aus folgenden Grundgeräten (Abb. M.4.0.4):

(1) Generator zur Wellenanregung mit variabler Ausgangsfrequenz und der Möglichkeit der Feinabstimmung der Erregerfrequenz, (2a, b) Schallwandler (magnetostruktiv, piezoelektrisch) zur Anregung und zum Nachweis der Schallwelle, (3) Filter zur Beseitigung niederfrequenter Störsignale, (4) Messverstärker zur Verstärkung der Schallempfängerspannung, (5) Zweikanal-Digitaloszilloskop oder rechnergestützte Messwerterfassung zur Beobachtung, Speicherung und Verarbeitung der Signalspannungen, (6) AC-Millivoltmeter für die direkte Messung des Effektivwerts der verstärkten Wechselspannung zur Aufnahme einer Resonanzkurve.

4.1 Schallgeschwindigkeit in Festkörpern

4.1.1 Dehnungswelle

Aufgabenstellung

1. Es ist die Geschwindigkeit der Dehnungswelle von einem in der Mitte eingespannten Stab aus ferromagnetischem Material für verschiedene Ordnungen und der Elastizitätsmodul des Materials zu bestimmen.
2. Durch Schallübertragung mit piezokeramischen Schwingern auf einen nicht ferromagnetischen Metallstab mit freien Enden sind

für verschiedene Ordnungen die Resonanzfrequenzen zu messen. Daraus sind die Schallgeschwindigkeit und der Elastizitätsmodul des Stabmaterials zu ermitteln.

3. Die Resonanzkurve ist für eine ausgewählte Ordnung der Dehnungswelle aufzunehmen. Daraus ermittelt man die Halbwertsbreite und berechnet den Verlustfaktor. Die Anpassung an eine Lorentzkurve soll überprüft werden.

Versuchsausführung

Bei allen Messungen werden lange und dünne Metallstäbe mit kreisförmigem Querschnitt untersucht. Die Länge der Stäbe wird mit einem Maßband bestimmt. Zur Realisierung der Aufgabe 1 ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Dehnungswelle für verschiedene Ordnungen im Frequenzbereich von etwa 2 kHz bis ca. 50 kHz zu bestimmen. Für die Erregung einer Schallwelle in dem ferromagnetischen Metallstab wird ein magnetostriktiver Schallgeber (flache Kreisspule) verwendet. Die Erregerspule wird mit einem Sinusgenerator verbunden. Das Erregersignal beobachtet man mit einem der beiden Kanäle eines Zweikanal-Digitaloszilloskops und die Frequenz wird mit einem Digitalzähler gemessen. Infolge der schmalen Resonanzkurven muss der Generator ein stabiles und in der Frequenz fein abstimmbares Ausgangssignal liefern. Der zu untersuchende Stab wird in der Mitte eingespannt und an einem seiner beiden Enden ist ein piezokeramischer Sensor befestigt, mit dem die Amplitude der Schallwelle gemessen werden kann. Im Resonanzfall erfasst man mit dem zweiten Kanal des Oszilloskops ein maximales Messsignal.

In einem Vorversuch ist die Erregerfrequenz der Grundschwingung zu suchen. Dadurch kann sichergestellt werden, dass wirklich Dehnungswellen und keine anderen Formen von Schallwellen im Stab gemessen werden. Die Grundschwingung ($n = 1$) ist daran erkennbar, dass beim Verschieben der Spule

längs des Stabs am Oszilloskop nur nahe der Einspannstelle ein Maximum der Signalspannung beobachtet werden kann.

Mit der nun bekannten Grundfrequenz der Dehnungswelle können die Frequenzen höherer Ordnung bis etwa 50 kHz mit Gl. (14a) berechnet und experimentell ermittelt werden. Bei allen Berechnungen ist zu berücksichtigen, dass nach Abb. M.4.0.1a bei dieser Versuchsanordnung die in Gl. (14a) einzusetzende Länge l der halben Gesamtlänge l_{st} des Stabs entspricht ($l = l_{st}/2$). Anschließend sucht man die Resonanzfrequenzen der Oberschwingungen und berechnet mit diesen die Schallgeschwindigkeit (Mittelwert) sowie unter Verwendung der bekannten Dichte des Stabmaterials den Elastizitätsmodul.

Bei Aufgabe 2 wird der Stab z. B. an dünnen Kunststoffäden aufgehängt oder auf zwei Schneiden gelagert. Sowohl die Schallanregung als auch der Schallempfang des an beiden Enden freien, nicht ferromagnetischen Metallstabs erfolgt mit Hilfe der an den Stabenden angeklebten piezokeramischen Wandler. In Analogie zu Aufgabe 1 variiert man die Anregungsfrequenz und beobachtet das Messsignal mit dem Oszilloskop. Wenn dieses maximal wird, notiert man die Frequenz als Resonanzfrequenz der betreffenden Ordnung. Mit Gl. (14b) kann dann die Geschwindigkeit der Dehnungswelle mit der zuvor gemessenen Stablänge berechnet und daraus der Elastizitätsmodul des Materials bei bekannter Dichte ermittelt werden.

Zur Aufnahme der Resonanzkurve für eine ausgewählte Ordnung bei Aufgabe 3 unter Verwendung des an beiden Enden freien Stabs wird das Ausgangssignal am Verstärker direkt mit einem AC-Millivoltmeter gemessen. Man misst für etwa zehn unterschiedliche Frequenzen jeweils unter- und oberhalb der Resonanzfrequenz die Spannungswerte. Anschließend wird die Resonanzkurve analog zu dem in Abb. M.4.0.3 gezeigten Graphen dargestellt und die Halbwertsbreite $\Delta\omega$ ermittelt. Damit ist die Güte Q zu bestimmen.

4.1.2 Biegewelle

Aufgabenstellung

1. Es sind die Eigenfrequenzen f_n einer stehenden Biegewelle für die Ordnungen $n = 4$ bis $n = 10$ zu messen. Diese sollen in Abhängigkeit von $(2n-1)^2$ graphisch dargestellt werden und aus dem Anstieg der Ausgleichsgeraden ist der Elastizitätsmodul des Materials zu ermitteln.
2. Aus den gemessenen Frequenzen in Aufgabe 1 sind die Phasengeschwindigkeiten zu berechnen und in Abhängigkeit von der Wellenlänge graphisch darzustellen. Der Kurvenverlauf ist zum Vergleich mit der Gruppengeschwindigkeit auszuwerten.
3. Die Resonanzkurve für eine bestimmte Ordnung der Biegeschwingung ist aufzunehmen. Es sind die Halbwertsbreite, die Dämpfungskonstante, die Güte und das logarithmische Dekrement zu ermitteln.

Der flache Metallstab der Länge l mit rechteckförmigem Querschnitt, (Anhang A.14, Dicke b viel kleiner als Höhe h , $l \gg h$) wird durch das magnetische Wechselfeld des Wandlers (2a), der aus einer Magnetspule mit Eisenkern besteht, zu Schwingungen angeregt. Den Wechselstrom für die Magnetspule liefert ein Sinusgenerator (1) und mit einem Digitalzähler misst man die Anregungsfrequenz f .

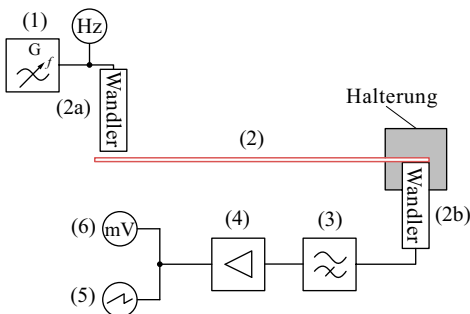


Abb. M.4.1.2.1 Versuchsaufbau zur Messung von Biegewellen in einem Metallstab (schematisch)

Der piezoelektrische Wandler (2b) wandelt die mechanischen Schwingungen in elektrische Spannungen um, die durch einen Verstärker (4) verstärkt und ggf. vorher mit einem Frequenzfilter (3) gefiltert werden. Mit einem Digitaloszilloskop (5) erfasst man die Signalamplitude sowie Signalform und mit einem AC-Millivoltmeter (6) misst man direkt den Effektivwert der Ausgangsspannung des Verstärkers.

In Analogie zu den Untersuchungen von Dehnungswellen im Versuch M.4.1.1 ist es von Vorteil, in einem Vorversuch die Erregerfrequenz der Grundschiwingung zu bestimmen, um eindeutig Biegewellen zu messen. Dazu wird der Stab aus seiner Ruhelage ausgelenkt und mit dem Digitaloszilloskop der Abklingvorgang aufgezeichnet. Die daraus zu ermittelnde Frequenz der freien gedämpften Schwingung entspricht infolge der kleinen Dämpfungskonstante in guter Näherung der Frequenz der Grundschiwingung f_1 . Mit den Werten f_1 , $m_1 = 1,875$ und m_n ($n > 3$) $\cong (2n-1)\pi/2$ kann man mit Hilfe der Verhältnisse $f_n/f_1 = (m_n/m_1)^2$ nach Gl. (16) näherungsweise die Frequenzen der höheren Ordnungen berechnen.

Für den Fall, dass die Anregungsfrequenz der Gl. (16) genügt, kommt es zur Ausbildung einer stehenden Welle und das Messsignal wird maximal. Um experimentell die Resonanz einer entsprechenden Ordnung zu finden, variiert man in kleinen Schritten die Frequenz der Sinusspannung des Generators nahe um den berechneten Wert bis zum Auftreten eines Maximums. Oberhalb 400 Hz ist ggf. ein Hochpass (7) einzuschalten, um niederfrequente Signalstörungen zu beseitigen. Durch Erhöhung der Verstärkung bzw. der Ausgangsspannung am Generator kann man die Signalabschwächung infolge der Signalfilterung kompensieren. Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls E erfolgt über den Anstieg der Ausgleichsgeraden in der graphischen Darstellung f_n in Abhängigkeit von $(2n-1)^2$ für $n > 3$.

Bei Kenntnis der Dichte ρ des Materials und der Abmessungen des flachen Stabs (Flächenträgheitsmoment A.14, $I_\eta = (h b^3)/12$, Querschnitt $A = h b$) kann mit Gl. (16) der Wert von E ermittelt werden.

Zur Berechnung der Phasengeschwindigkeit $c_{B,ph}$ in Aufgabe 2 kann Gl. (17a) unter Berücksichtigung der Näherung für $n > 3$ sowie dem Flächenträgheitsmoment und der Querschnittsfläche umgeschrieben werden:

$$c_{B,ph}(n) = 2 \pi \sqrt{\frac{E b}{12 \rho}} \frac{1}{\lambda_n} \quad (30)$$

Die mittlere Wellenlänge λ_n ermittelt man mit Gl. (18). Es ist $c_{B,ph}(n) = f(1/\lambda_n)$ graphisch darzustellen und mittels nichtlinearer Regression die Funktion des Kurvenverlaufs mit der Fit-Funktion $c_{B,ph} = P_1/\lambda$ (Fit-Parameter P_1) zu berechnen. Für zwei Ordnungen soll die Gruppengeschwindigkeit berechnet werden. Dazu verwendet man Gl. (19) und erhält mit

$$P_1 = \frac{dc_{B,ph}}{d(1/\lambda)} = -\lambda^2 \frac{dc_{B,ph}}{d\lambda}$$

eine Gleichung zur Berechnung von $c_{B,gr}$ mit dem Fit-Parameter P_1 :

$$c_{B,gr}(n) = c_{B,ph}(n) + \frac{P_1}{\lambda_n} \quad (31)$$

Es ist die Gültigkeit der Gl. (20) unter Berücksichtigung der Unsicherheiten zu überprüfen.

Die Aufnahme der Resonanzkurve bei Aufgabe 3 erfolgt für eine ausgewählte Ordnung. Da die Resonanzkurve sehr schmal ist, wird die verstärkte Signalspannung in kleinen Frequenzintervallen um das Resonanzmaximum gemessen (etwa je zehn Messungen unter- und oberhalb der Resonanzfrequenz). Zur graphischen Darstellung der Resonanzkurve trägt man die Quadrate der normierten Werte der Amplitude $[A(\omega)/A_{\max}]^2$ in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ (vgl. Abb. M.4.0.3) auf und führt die Anpassung

mit einer Lorentz-Funktion nach Gl. (29) durch. Steht keine geeignete Software für die Anpassung zur Verfügung, kann die Bestimmung der Halbwertsbreite $\Delta\omega$ auch graphisch erfolgen. Damit sind die gesuchten Dämpfungsgrößen zu ermitteln.

4.2 Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten

Aufgabenstellung

1. Es sind die Schallwellenlänge und die Schallausbreitungsgeschwindigkeit in verschiedenen Flüssigkeiten nach der Methode von *Debye* und *Sears* zu bestimmen.
2. Es ist die Schallgeschwindigkeit in verschiedenen Flüssigkeiten mit der Methode der Zentralprojektion zu ermitteln.
3. Von allen Versuchsflüssigkeiten ist der Kompressionsmodul zu bestimmen.

Die infolge einer durch eine Flüssigkeit laufenden Schallwelle auftretenden periodischen Dichteschwankungen (Verdichtungen und Verdünnungen) führen zu einer in gleicher Weise periodischen Änderung des optischen Brechungsindex. Eine ebene Schallwelle bewirkt dementsprechend ein Beugungsgitter, dessen Gitterkonstante gleich der Schallwellenlänge λ_s im Medium ist. Ein solches Gitter bezeichnet man auch als Phasengitter. Die Lichtwellen, die an unterschiedlichen Stellen das Gitter durchlaufen, legen wegen der periodischen Änderung des Brechungsindex unterschiedliche optische Weglängen zurück und sind beim Austritt aus dem Medium gegeneinander phasenverschoben.

Beim Phasengitter treten im Wesentlichen die gleichen Beugungserscheinungen auf, die man an einem üblicherweise verwendeten optischen Strichgitter (Amplitudengitter) beobachtet (O.2.0.3). Die Erscheinung der Lichtbeugung an Schallwellen bezeichnet man auch als Debye-Sears-Effekt und die Frequenz der Schallwellen liegt im Ultraschallbereich. Zum Nachweis des Beugungs-

effekts beleuchtet man die mit der Messflüssigkeit gefüllte Glasküvette, in der sich der piezoelektrische Schallgeber befindet, senkrecht zur Schallausbreitungsrichtung mit parallelem und monochromatischem Licht.

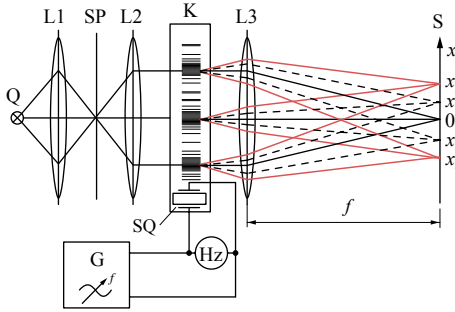


Abb. M.4.2.1 Versuchsaufbau zum Debye-Sears-Effekt (Fraunhofer'sche Beugung, stark schematisiert)

Der durch die Linse (L1) in Abb. M.4.2.1 von einer Lichtquelle (Q) beleuchtete Spalt (SP) wirkt als sekundäre Lichtquelle und wird durch die Linsen L2 und L3, zwischen denen die ungebeugten Strahlen parallel verlaufen, scharf auf einem Schirm (S) abgebildet. Anstelle des Schirms kann auch ein Messokular verwendet werden. Ein Hochfrequenzgenerator (G) mit angeschlossenem Digitalzähler bringt den Schwingquarz (SQ), der in der mit der Testflüssigkeit gefüllten Küvette (K) befestigt ist, zum Schwingen. Bei entsprechend hoher Güte der Schwingung und guter Schallankopplung an die Flüssigkeit werden ausreichend intensive Schallwellen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Lichtwelle ausgesendet. Durch die Wirkung der Ultraschallwelle treten auf beiden Seiten des zentralen Spaltbilds eine Reihe von Beugungsbildern auf. Die Beugungserscheinungen sind sehr ähnlich denen, die an einem Strichgitter entstehen. Die Lage der Beugungsmaxima wird ebenfalls durch die Formel

$$g \sin \alpha_k = k \lambda_L, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

beschrieben (O.2.0.3); die Gitterkonstante g ist gleich der Schallwellenlänge λ_s . Zur Unterscheidung wird die Lichtwellenlänge hier mit λ_L bezeichnet. Beugungsmaxima k -ter Ordnung treten also bei Beugungswinkeln α_k auf, für die gilt:

$$\lambda_s \sin \alpha_k = k \lambda_L, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (32)$$

Ist x_k der Abstand des k -ten Maximums vom Maximum nullter Ordnung (Zentralbild), gilt für kleine Winkel α_k die Beziehung $x_k/f = \tan \alpha_k \approx \sin \alpha_k \approx \alpha_k$, wobei f hier die Brennweite der Sammellinse L3 ist. Für die Wellenlänge der Ultraschallwelle erhält man

$$\lambda_s = \frac{k \lambda_L f}{x_k} \quad (33)$$

Die Abstände Δx benachbarter Maxima sind gleich. Es gilt

$$\Delta x = |x_{k+1} - x_k| = \frac{\lambda_L f}{\lambda_s} \quad (34)$$

Mit der Frequenz ν_s der Schallwelle lässt sich die Schallgeschwindigkeit c_s mit

$$c_s = \lambda_s \nu_s = \frac{k \lambda_L f \nu_s}{x_k} \quad (35)$$

oder

$$c_s = \lambda_s \nu_s = \frac{\lambda_L f \nu_s}{\Delta x} \quad (36)$$

berechnen. Für die Lage der Beugungsbilder bei der Fraunhofer'schen Beugung ist es gleichgültig, ob die beugende Struktur senkrecht zur optischen Achse verschoben wird oder sich bewegt. Der Debye-Sears-Effekt tritt bei fortlaufenden wie auch bei stehenden Wellen in gleicher Weise auf. Die Wellenlänge und damit die Gitterkonstante ist in beiden Fällen die gleiche. Auftretende Dopplerverschiebungen des gebeugten Lichts sind sehr klein und können in diesem Versuch vernachlässigt werden.

Bei der Methode der Zentralprojektion wird

die Probe mit monochromatischem, divergentem Licht durchstrahlt. Infolge der sich räumlich ausbildenden Dichteverteilung kommt es auch zu räumlichen Änderungen des Brechungsindex und das Licht breitet sich nicht mehr geradlinig in der Flüssigkeit aus. Dadurch entstehen Gebiete, in denen die Phasendifferenzen zwischen den sich überlagernden Wellenbündeln eine Verstärkung oder Verringerung der Intensität hervorrufen. Als Folge davon kann man Intensitätsmuster erkennen, die im Falle einer stehenden Welle besonders stark ausgeprägt sind. Die Abstände zwischen Stellen verstärkter Intensität (konstruktive Interferenz) und abgeschwächter Intensität (destruktive Interferenz) korrespondieren mit den aus der Beugungstheorie bekannten Beziehungen (O.2.0.3).

In Abb. M.4.2.2 ist schematisch die Versuchsanordnung zur Bestimmung der Wellenlänge mit der Methode der Zentralprojektion dargestellt. Für die Berechnung der Schallwellenlänge müssen neben der Geometrie der Versuchsanordnung und der bekannten Brennweite f der Linse in Luft noch Korrekturen berücksichtigt werden, die durch die verschiedenen Brechungsindizes (Flüssigkeit, Glas, Luft) bedingt sind:

$$\lambda_s = \frac{2x_N}{N} \cdot \frac{f - \frac{g_1}{n_g} - \frac{a_1}{n_{fl}}}{s - \left(f - \frac{g_1 + g_2}{n_g} - \frac{a_1 + a_2}{n_{fl}} \right)}. \quad (37)$$

Der Abstand a_1 zwischen dem von der Schallquelle (S) abgestrahlten Schallfeld und der Glaswand auf der Linsenseite (Linse L) sowie der Abstand a_2 können näherungsweise mit jeweils der Hälfte der betreffenden Innenabmessungen der Küvette (K) angenommen werden. Die Glasstärken der Wände der Küvette (g_1 , g_2) und der Brechungsindex des Glases (n_g) sowie der Versuchsflüssigkeit (n_{fl}) werden am Arbeitsplatz mitgeteilt. Die Größe x_N in Gl. (37) beschreibt den Abstand zwischen dem $-k$ -ten und dem $+k$ -

ten Beugungsmaximum und N die Anzahl dieser Maxima, die im Abstand x_N auf einem Schirm (SC) beobachtet werden. Als Lichtquelle verwendet man einen Laser.

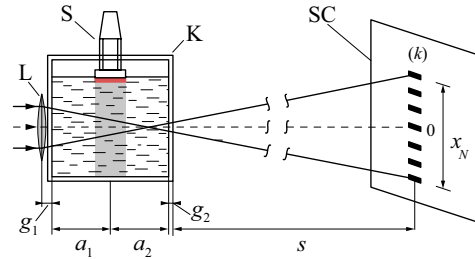


Abb. M.4.2.2 Schema des Versuchsaufbaus zur Zentralprojektion

Versuchsausführung

Die zur Realisierung von Aufgabe 1 erforderlichen optischen Komponenten sind auf einer optischen Bank anzuordnen. Mit der Linse L1 in Abb. M.4.2.1 bildet man die Lichtquelle (z. B. Na- oder Hg-Spektrallampe mit Filter) scharf auf den Spalt ab. Um die Küvette mit parallelem Licht zu bestrahlen, wird zuerst der Schirm bzw. ein Messokular in die Brennebene der Linse L3 gebracht. Danach ist die Linse L2 bei weit geöffnetem Spalt solange zu verschieben, bis der Spalt scharf abgebildet wird. Anschließend ist die mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllte Küvette zwischen die Linsen zu stellen, die Spaltbreite zu verringern und der Generator einzuschalten. Dessen Frequenz wird in einem vorgegebenen Bereich langsam verändert, bis man eine möglichst große Anzahl heller Streifen beobachten kann. Das wird insbesondere der Fall sein, wenn sich in der Flüssigkeit eine stehende Schallwelle ausbildet. Zur Bestimmung der Schallwellenlänge verwendet man Gl. (33). Die Brennweite f der Sammellinse L3 und die Wellenlänge des monochromatischen Lichts λ_L sind bekannt, andernfalls kann man mit den in den Versuchen O.1.1 und O.3.2 beschriebenen Metho-

den bestimmen. x_k bzw. Δx werden am besten mit einem Messokular und die Frequenz ν_s mit einem Digitalzähler gemessen. Danach kann die Schallgeschwindigkeit mit Gl. (35) bestimmt werden. Verwendet man einen Laser als Lichtquelle, kann infolge der geringen Divergenz des Laserstrahls dieser direkt die Flüssigkeit durchstrahlen. In diesem Fall werden die Linsen L1 und L2 sowie der Spalt in Abb. M.4.2.1 nicht benötigt. Das Interferenzmuster wird in diesem Fall direkt auf einen ausreichend weit entfernten Schirm abgebildet (Übergang der Beobachtung der Fresnel-Beugung zur Fraunhofer-Beugung für $N_F < 1$, Fresnel-Zahl $N_F = g^2 / (4a \lambda_L)$, g Gitterkonstante, a Abstand zwischen Schallfeld und Schirm). In Analogie zur Herleitung der Gl. (33) ergibt sich für den Abstand zwischen dem nicht gebeugten Licht ($k = 0$) und dem Maximum der Ordnung k

$$x_k = \frac{k \lambda_L a}{\lambda_s} . \quad (38)$$

Durch die Messung von a und x_k kann bei bekanntem Wert von λ_L die Schallwellenlänge bestimmt werden. Mit anderen Flüssigkeiten ist die Messung zu wiederholen. Es bietet sich an, den Versuch mit einer anderen Lichtwellenlänge durchzuführen, um die Anwendung der Gl. (32) zu bestätigen.

Bei Aufgabe 2 beginnt man mit dem Versuchsaufbau nach Abb. M.4.2.2, wobei die Halterung der Ultraschallsonde auf exakt senkrechten Einfall der Schallwelle zum einfallenden Laserstrahl justiert werden muss. An einer der Außenwände der Küvette befindet sich eine Halterung für den Laser sowie für eine Linse (L), um divergentes Licht zu erzeugen. Anschließend füllt man möglichst entgaste Flüssigkeit (z. B. destilliertes Wasser, Ethanol) in die Küvette, so dass sich die Ultraschallsonde ausreichend tief in der Messflüssigkeit befindet. Danach werden der Laser und die Ultraschallquelle eingeschaltet. Durch Variation der Frequenz der Ultraschallwelle kann man erreichen,

dass wenigstens drei Maxima auf dem Schirm zu sehen sind. Unter optimalen Messbedingungen (stehende Welle) sind auch mehr als zehn Ordnungen zu erkennen. Es sind der Abstand x_N und die zugehörige Anzahl von Maxima N mehrfach zu messen. Nach erneuter Justierung werden die Messungen bei verschiedenen Frequenzen ν_s bzw. nach Austausch des Lasers bei einer anderen Wellenlänge λ_L durchgeführt. Mittels Gl. (37) und den bekannten Abmessungen der Küvette sowie den Werten für den Brechungsindex der verschiedenen Medien kann die Schallwellenlänge als Mittelwert bestimmt und mit der gemessenen Ultraschallfrequenz die Schallgeschwindigkeit ermittelt werden. Die Messungen sollen mit anderen Flüssigkeiten wiederholt werden. Verwendet man eine Versuchsanordnung zur Zentralprojektion, bei der sich die Linse L mit der Brennweite f (Abb. M.4.2.2) zur Erzeugung von divergentem Laserlicht im Abstand s_L vor der Küvette befindet, ist ebenfalls die Bestimmung der Schallwellenlänge möglich:

$$\lambda_s = \frac{2 x_N}{N} \frac{s_1}{s_1 + s_2} . \quad (39)$$

Nach Abb. M.4.2.2 ergibt sich der Abstand s_2 aus $s_2 = s + a_2$. Für den Abstand s_1 folgt der Zusammenhang $s_1 = a_1 + (s_L - f)$. Mit den Werten von ν_s und λ_s werden die Schallgeschwindigkeiten in den Flüssigkeiten sowie deren Kompressionsmodul K mit Gl. (3) berechnet. Die dazu erforderlichen Dichten der Flüssigkeiten können der Tabelle im Anhang A.8 entnommen werden. Es ist zu beachten, dass der piezoelektrische Schallgeber nur in Betrieb gesetzt werden darf, wenn sich Flüssigkeit in der Küvette befindet. Bei längeren Messzeiten kann es infolge der in der Flüssigkeit dissipierten Schallenergie zur Erwärmung und zu Konvektionsströmungen kommen. Die Temperaturkontrolle erfolgt mit einem in der Küvette befestigten Messfühler eines Digitalthermometers.

5 Oberflächenspannung

5.0 Grundlagen

Zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit wirken sowohl anziehende als auch abstoßende Kräfte geringer Reichweite. Der Abstand r_1 zweier nächster Nachbarn stellt sich so ein, dass die Summe der abstoßenden und der anziehenden Kräfte gerade verschwindet. Wenn der Abstand zwischen zwei Molekülen etwas größer als dieser Normalabstand ist, überwiegt die Anziehungskraft, ist er dagegen etwas kleiner, stoßen sich die Moleküle gegenseitig ab. Ein beliebiges Molekül der Flüssigkeit (Zentralmolekül) wird daher von allen Nachbarmolekülen angezogen, deren Abstand vom Zentralmolekül größer als r_1 , aber kleiner als der Radius r_2 der Wirkungssphäre der Molekularkräfte ist.

Die Anziehungskräfte zwischen den Bausteinen (Molekülen, Atomen, Ionen) eines Stoffes nennt man allgemein Kohäsionskräfte, da sie für den Zusammenhalt der Stoffe sorgen. Es existieren aber auch anziehende Kräfte zwischen benachbarten Bausteinen verschiedener Stoffe, die als Adhäsionskräfte bezeichnet werden.

Betrachtet man ein Molekül im Inneren einer Flüssigkeit, ist die Resultierende der Anziehungskräfte null, da die Nachbarmoleküle über alle Richtungen gleichmäßig verteilt sind. Für ein Flüssigkeitsmolekül in einer Grenzschicht (Oberfläche), deren Dicke dem Radius der Wirkungssphäre der Molekularkräfte entspricht, verschwindet dagegen die resultierende Kraft im Allgemeinen nicht. Es sind zwei Möglichkeiten zu diskutieren:

1. Die Kohäsionskräfte zwischen den Molekülen der Flüssigkeit sind größer als die Adhäsionskräfte zwischen den Flüssigkeitsmolekülen und den Bausteinen des angrenzenden Stoffs (Abb. M.5.0.1). In diesem Falle wirkt auf ein Flüssigkeitsmolekül eine resultierende Kraft F senkrecht zur Oberfläche in das Innere der Flüssigkeit hinein.

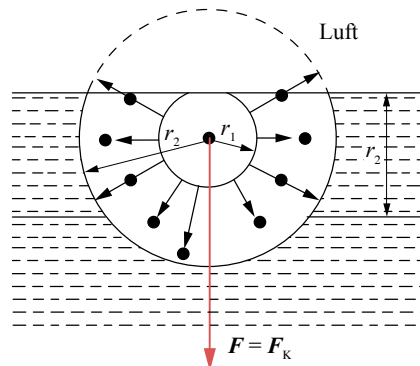


Abb. M.5.0.1 Grenzschicht zwischen Luft und Flüssigkeit (schematisch)

Die Flüssigkeit ist daher bestrebt, eine möglichst kleine Grenzfläche mit dem anderen Stoff zu bilden. Zur Vergrößerung dieser Fläche um ΔA muss der Flüssigkeit eine Arbeit zugeführt werden:

$$\Delta W = \sigma \Delta A . \quad (1)$$

Bei einer Verkleinerung der Grenzfläche um ΔA wird eine Arbeit gemäß Gl. (1) frei. Den Proportionalitätsfaktor σ nennt man Oberflächenspannung. Ihre Einheit ist

$$\text{J m}^{-2} = \text{N m}^{-1} = \text{kg s}^{-2} .$$

Man muss sich darüber im Klaren sein, dass die Oberflächenspannung sowohl von der Natur der Flüssigkeit als auch von der des angrenzenden Stoffs abhängig ist. Bei Angabe eines Werts für σ ist daher stets der angrenzende Stoff zu nennen. Die Oberflächenspannung kann nur dann als reine Materialeigenschaft der Flüssigkeit angesehen werden, wenn die Resultierende der Adhäsionskräfte F_A vernachlässigbar klein gegen die Resultierende der Kohäsionskräfte F_K ist (Beispiel: Flüssigkeit-Luft).

Im Falle der Abb. M.5.0.2 bezeichnet man die Flüssigkeit als nicht benetzend für den angrenzenden festen Körper (z. B. Randwinkel bzw. Kontaktwinkel $\varphi = 140^\circ$ für Grenzfläche Quecksilber-Glas). Wird der Rand-

winkel $\varphi = \pi$, d. h., ist $F_A \ll F_K$, ist die Nichtbenetzung vollständig.

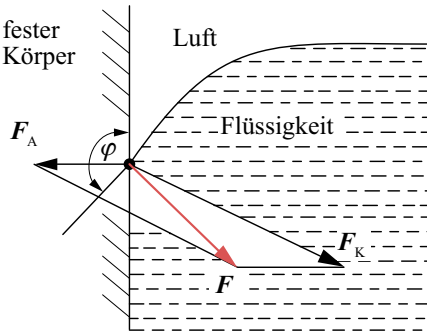


Abb. M.5.0.2 Beispiel einer nicht benetzenden Flüssigkeit (schematisch)

2. Die Kohäsionskräfte sind kleiner als die Adhäsionskräfte (Abb. M.5.0.3). Dann wirkt auf ein Flüssigkeitsmolekül der Grenzschicht eine resultierende Kraft F senkrecht zur Oberfläche aus der Flüssigkeit heraus. Die beiden Stoffe bilden daher eine möglichst große Grenzfläche. In diesem Falle bezeichnet man die Flüssigkeit als benetzend für den angrenzenden Stoff.

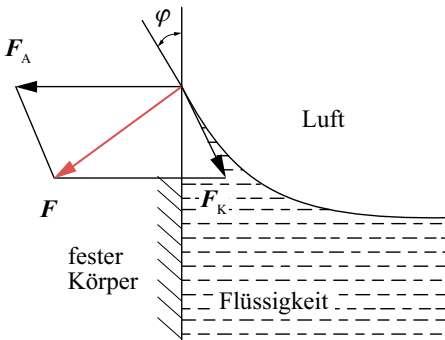


Abb. M.5.0.3 Beispiel einer benetzenden Flüssigkeit (schematisch)

Verschwindet der Randwinkel φ (z. B. $\varphi \approx 0$ für Grenzflächen Wasser-Glas und Ethanol-Glas), dann sind die Kohäsionskräfte viel kleiner als die Adhäsionskräfte ($F_K \ll F_A$) und man spricht von vollständiger Benetzung.

Taucht man einen festen Körper in eine vollständig benetzende Flüssigkeit, bleibt nach dem Herausziehen ein dünner Flüssigkeitsfilm an ihm haften. Die gründliche Entfernung solcher Flüssigkeitsschichten auf Festkörpern kann unter Umständen sehr aufwendig sein.

Für die Temperaturabhängigkeit der Oberflächenspannung gilt mit guter Näherung die von Eötvös empirisch gefundene Gleichung

$$\sigma V_M^{2/3} = K_E (T_c - T) . \quad (2)$$

In Gl.(2) ist V_M das molare Volumen ($V_M = M/\rho$, M molare Masse, ρ Dichte) und T_c eine kritische Temperatur der Flüssigkeit (z. B. $T_c = 647 \text{ K}$ für Wasser). Oberhalb dieser kritischen Temperatur ist die Oberflächenspannung null.

Das Produkt auf der linken Seite von Gl. (2) nennt man auch molare Oberflächenspannung ($\sigma_{\text{mol}} = \sigma V_M^{2/3}$). Die Größe K_E wird als Eötvös-Konstante bezeichnet. Für nicht assoziierte Flüssigkeiten wurde der Wert $K_E = 2,1 \cdot 10^{-7} \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-2/3}$ experimentell ermittelt. Nach Gl. (2) ändert sich die Oberflächenspannung linear mit der Temperatur. Dieses Verhalten wird von vielen Flüssigkeiten in nicht zu großen Temperaturbereichen gut erfüllt. Ein Vorteil der Eötvös-Gleichung besteht darin, dass man die $\sigma(T)$ -Abhängigkeit für Flüssigkeiten graphisch so darstellen kann, dass sich bei bekannten Werten für die molare Masse und die Dichte der Flüssigkeiten dieselbe lineare Abhängigkeit ergibt. Daraus folgt die Möglichkeit, die Oberflächenspannung einer beliebigen Flüssigkeit für eine bestimmte Temperatur vorhersagen zu können. Eine genauere Beschreibung der Temperaturabhängigkeit der Oberflächenspannung ist mittels einer aus experimentellen Ergebnissen gewonnenen empirischen Korrektur durch eine modifizierte Eötvös-Gleichung möglich:

$$\sigma V_M^{2/3} = K_E (T_c - 6K - T) . \quad (2a)$$

5.1 Abreißmethode

Aufgabenstellung

1. Es soll die Oberflächenspannung verschiedener Flüssigkeiten nach der Abreißmethode bestimmt werden.
2. Für eine Flüssigkeit ist die Abhängigkeit der Oberflächenspannung von der Temperatur zu ermitteln.

Ein Platindraht der Länge l ist in einen Bügel eingelötet, der an einer Waage hängt. Der Bügel soll so weit in die zu untersuchende Flüssigkeit eintauchen, dass sich der Platindraht unmittelbar unter der Oberfläche befindet. Es wird vorausgesetzt, dass die Flüssigkeit den Draht vollständig benetzt. Belastet man die Waage, zieht der Draht einen dünnen Flüssigkeitsfilm (Lamelle) aus der Flüssigkeit heraus (Abb. M.5.1.1).

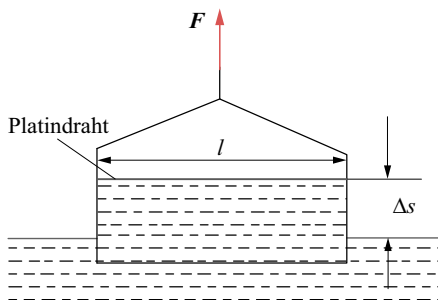


Abb. M.5.1.1 Bestimmung der Oberflächenspannung mit der Abreißmethode

Diese Lamelle soll bei der Belastung F gerade noch nicht abreißen. Da sich sowohl auf der Vorder- als auch auf der Rückseite des Bügels eine Lamelle ausbildet, vergrößert sich die Flüssigkeitsoberfläche um $\Delta A = 2 l \Delta s$. Nach Gl. (1) folgt $\Delta W = \sigma 2 l \Delta s$, Andererseits ist $\Delta W = F \Delta s$ und es ergibt sich

$$\sigma = \frac{F}{2l} \quad (3)$$

In der Betrachtung, die zu Gl. (3) führt, sind alle Randeffekte des Bügels und der Einfluss des Gewichts der herausgezogenen Lamelle unberücksichtigt geblieben.

Wenn der Platindraht einen Durchmesser von 0,3 mm hat, ergeben sich für σ nach Gl. (3) Werte, die um etwa 10 % zu groß sind. Die Abweichungen werden umso kleiner, je dünner der Platindraht ist. *Lenard* hat eine genauere Beziehung zur Bestimmung der Oberflächenspannung nach der Abreißmethode begründet. Diese lautet bei Vernachlässigung von Gliedern in r^2

$$\sigma = \frac{F}{2l} - r \left\{ \sqrt{\frac{F \rho g}{l}} - \frac{F}{l^2} \right\} \quad (3a)$$

In Gl. (3a) sind r der Radius des Platindrahts und ρ die Dichte der Flüssigkeit.

Versuchsausführung

Die Drahtbügel sind mit größter Vorsicht zu behandeln. Vor allen Dingen darf der Platindraht nicht berührt oder der Bügel verbogen werden. Die Bügel sind vor jeder Messung zur Reinigung mit destilliertem Wasser und der zu untersuchenden Flüssigkeit abzuspielen. Man misst zunächst die Drahtlänge l und hängt anschließend den Bügel an die Waage, die so abgeglichen wird, dass der Platindraht in der Ebene der Flüssigkeitsoberfläche liegt. Zur Bestimmung der Kraft F eignen sich besonders gut Spiralfederwaagen oder auch moderne rechnergestützte Kraftmessgeräte, mit denen man die Zugkraft kontinuierlich erhöhen kann, bis die Flüssigkeitslamelle abreißt. Für F ist derjenige Wert für die Zugkraft einzusetzen, bei dem die Lamelle gerade noch nicht abreißt.

Die Oberflächenspannung soll nach Gl. (3a) berechnet werden. Der Drahtradius r sei gegeben oder wird mit einer Bügelmessschraube bestimmt, die Dichte der Flüssigkeit kann einer Tabelle am Arbeitsplatz entnommen werden. Die Messungen sind mit Bügeln unterschiedlicher Länge und mit anderen Flüssigkeiten zu wiederholen. Jede Messung

soll mehrfach ausgeführt werden, um einen guten Mittelwert für die Abreißkraft zu erhalten. Häufig verwendet man bei der Abreißmethode statt eines Bügels einen Ring, dessen Unterkante im Allgemeinen zu einer Schneide ausgeführt ist, damit die Schichtdicke der Lamelle sehr dünn und damit das Gewicht der Flüssigkeitslamelle so klein wie möglich wird (Ringmethode nach *De Notüy*). Die Lamelle wird annähernd in Form eines Zylindermantels nach oben gezogen. In Analogie zur Begründung von Gl. (3) erhält man

$$\sigma_{\text{Ring}} = \frac{F}{4 \pi r_{\text{Ring}}} \quad (4)$$

wobei r_{Ring} der Ringradius und F diejenige Kraft ist, die genau beim Abreißen der Lamelle gemessen wird. Im Allgemeinen ist noch eine Korrektur der nach Gl. (4) ermittelten Oberflächenspannung notwendig. Bei kommerziellen Ringtensiometern werden die Korrekturwerte vom Hersteller mitgeteilt, andernfalls bestimmt man den Korrekturfaktor mit Hilfe einer Kalibrierflüssigkeit.

Für die Messung der Temperaturabhängigkeit der Oberflächenspannung wird die zu untersuchende Flüssigkeit auf etwa 60 °C erwärmt und anschließend in das Messgefäß gefüllt, das mit einer Wärmeisolierung versehen ist. Man misst während der langsamen Abkühlung der Flüssigkeit die Abreißkraft bei fünf verschiedenen Temperaturen. Kurz vor der Messung ist die Flüssigkeit gut zu mischen, um die Temperaturunterschiede in der Flüssigkeit auszugleichen. Es ist die lineare Abnahme der molaren Oberflächenspannung nach Gl. (2) zu überprüfen.

5.2 Steighöhenmethode

Aufgabenstellung

Die Oberflächenspannung σ verschiedener Flüssigkeiten ist aus der Steighöhe in einem Kapillarrohr aus Glas zu bestimmen.

Eine Glaskapillare (Innenradius r , Außenra-

dius r_1) sei vollständig von der zu untersuchenden Flüssigkeit benetzt. Wenn man die Kapillare senkrecht in ein mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß eintaucht, steigt die Flüssigkeit in dem Kapillarrohr bis zu einer Höhe h über den äußeren Flüssigkeitsspiegel an. Der innere, horizontale Querschnitt des Gefäßes soll mit A , der Umfang dieses Querschnittes mit U bezeichnet werden.

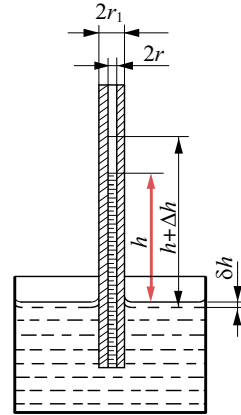


Abb. M.5.2.1 Bestimmung der Oberflächenspannung mit der Steighöhenmethode

Die Steighöhe h berechnet man zweckmäßigerweise nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit. Eine unendlich langsam verlaufende Vergrößerung der Steighöhe von h auf $h + \Delta h$, bei der der Flüssigkeitsspiegel im Gefäß um δh sinkt (Abb. M.5.2.1), erfordert die Arbeit

$$\Delta W_1 = \rho \pi r^2 h g (\Delta h - \delta h) \quad (5)$$

In Gl. (5) ist ρ die Dichte der zu untersuchenden Flüssigkeit. Da das Volumen der Flüssigkeit konstant ist, gilt

$$\pi r^2 (\Delta h - \delta h) = (A - \pi r_1^2) \delta h$$

Durch das Anheben der Flüssigkeitssäule verkleinert sich die Grenzfläche zwischen der Luft und dem an der Innenwand der Kapillare haftenden Flüssigkeitsfilm um

$$\Delta A_{\text{ab}} = 2 \pi r (\Delta h - \delta h)$$

Gleichzeitig nimmt die Grenzfläche zwischen der Luft und dem an der Innenwand des Gefäßes sowie dem Außenmantel der Kapillare haftenden Flüssigkeitsfilm um

$$\Delta A_{\text{zu}} = (U + 2\pi r_1) \delta h$$

$$= \frac{\pi r^2 (U + 2\pi r_1)}{A - \pi r_1^2} (\Delta h - \delta h)$$

zu. Die gesamte Verkleinerung der Grenzfläche zwischen Luft und Flüssigkeit ist daher

$$\Delta A = \Delta A_{\text{ab}} - \Delta A_{\text{zu}} = 2\pi r (\Delta h - \delta h) c_G \quad (6)$$

mit dem Korrekturfaktor

$$c_G = 1 - \frac{r \left(\frac{1}{2} U + \pi r_1 \right)}{A - \pi r_1^2}, \quad (6a)$$

der von den geometrischen Abmessungen der Kapillare und des Gefäßes abhängt. Entsprechend Gl. (1) wird die Energie

$$\Delta W_2 = \sigma 2\pi r (\Delta h - \delta h) c_G \quad (7)$$

frei. Diese Energie dient zum Anheben der Flüssigkeitssäule. Aus dem Gleichsetzen der Energien gemäß den Gln. (5) und (7) und der Berücksichtigung des Korrekturfaktors c_G nach Gl.(6a) folgt die Bestimmungsgleichung für die Oberflächenspannung

$$\sigma = \frac{\rho g r h}{2} \frac{1}{c_G}. \quad (8)$$

Hat die Schale einen kreisförmigen Querschnitt (Innenradius R), erhält man für den entsprechenden Korrekturfaktor $c_{G,\text{kr}}$:

$$c_{G,\text{kr}} = \left\{ 1 - \frac{r}{R - r_1} \right\}. \quad (8a)$$

Die genaue Bestimmung der Steighöhe h bereitet insofern Schwierigkeiten, als man die Höhe des Flüssigkeitsspiegels in der Schale im Allgemeinen nicht sehr genau messen

kann. Aus diesem Grunde empfiehlt es sich, als Vorratsgefäß eine optische Küvette zu verwenden. Diese ist ein Glasgefäß mit rechteckigem Querschnitt und planparallelen Wänden, bei der die beiden gegenüberliegenden Deckflächen aus geschliffenem Glas bestehen. Wenn man auf eine solche Deckfläche blickt, kann man den Flüssigkeitsspiegel sehr deutlich erkennen.

Bei Verwendung einer Küvette mit den Kantenlängen a und b folgt

$$c_{G,\text{re}} = \left\{ 1 - \frac{r(a + b + \pi r_1)}{ab - \pi r_1^2} \right\}. \quad (8b)$$

Wenn der Querschnitt A des Gefäßes mit kreisförmigem Querschnitt sehr groß gegen den Querschnitt der Kapillare ist ($A \gg \pi r_1^2$), vereinfacht sich die Gl. (8) in guter Näherung zu

$$\sigma = \frac{1}{2} \rho g r h. \quad (9)$$

Die Kenntnis der Höhe des Flüssigkeitsspiegels wird überflüssig, wenn man mehrere Kapillaren mit unterschiedlichen Innenradien in das Vorratsgefäß taucht. Die Oberflächenspannung lässt sich dann aus den Differenzen der verschiedenen Steighöhen berechnen. Bei nicht vollständiger Benetzung hängt die Steighöhe h noch vom Randwinkel φ ab:

$$h = \frac{2 \sigma \cos \varphi}{\rho g r}. \quad (10)$$

Das hat z. B. bei einer nicht völlig sauberen Benetzungsfläche innerhalb einer Glaskapillare zur Folge, dass der Messwert von h zu klein wird und damit die Oberflächenspannung einen im Vergleich zur idealen Benetzung ($\cos \varphi = 1$) zu niedrigen Wert ergibt.

Versuchsausführung

Die benötigten Abmessungen der Gefäße ($2R$ oder a und b) und der Außendurchmesser des

Kapillarrohrs $2r_1$ werden mit einem Messschieber bzw. mit einer Messschraube ermittelt. Zur Bestimmung des Innenradius r der Kapillare sollen zwei unterschiedliche Methoden beschrieben werden.

Volumenmethode

Eine geeignete Flüssigkeit wird z. B. mit einem Gummigebläse in die trockene Kapillare gesaugt. Der Flüssigkeitsfaden soll eine Länge l von mehreren Zentimetern haben. Diese wird so genau wie möglich gemessen und anschließend die Masse m der in der Kapillare enthaltenen Flüssigkeit mit einer Laborwaage bestimmt. Daraus ergibt sich das auf die Länge l zu beziehende Zylindervolumen ($V_{\text{Zyl}} = m/\rho_{\text{Fl}}$) und für die Bestimmung des Kapillarradius folgt

$$r = \sqrt{\frac{V_{\text{Zyl}}}{\pi l}} = \sqrt{\frac{m}{\pi l \rho_{\text{Fl}}}}. \quad (11)$$

Die Dichte der Flüssigkeit ρ_{Fl} kann der Tabelle im Anhang A.8 entnommen werden. Bei der Verwendung von speziellen Kapillarpipetten, die z. B. in der Medizin zum Einsatz kommen, erübrigt sich die Volumenbestimmung. Diese Mikropipetten verfügen bereits über eine Volumenkalibrierung in Bezug auf eine an der Pipette angebrachte Ringmarke und die relativen Unsicherheiten der Volumenangaben sind kleiner als ein Prozent. Damit beschränkt sich die Radiusbestimmung auf die Messung des Abstands l zwischen der Ringmarke und dem unteren Ende der Pipette.

Optische Methode

Zu Beginn ist der Abbildungsmaßstab der Objektivlinse mit einer Objektmikrometer-Glasplatte zu bestimmen. Dazu vergleicht man die vergrößerte Objektmikrometerskala mit dem Maßstab einer Okularstrichplatte. Danach wird die Kapillare auf den Tisch eines Durchlichtmikroskops gelegt und mit monochromatischem parallelem Licht durchstrahlt. Die in Abb. M.5.2.2 dargestellten

Strahlen lassen sich als helle Linie erkennen. Ihr Abstand $2s$ kann mit einem Okularmaßstab bestimmt werden. Aus Abb. M.5.2.2 folgt:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}, \quad (12)$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{s - r}{\sqrt{r_1^2 - s^2}},$$

$$\sin \alpha = \frac{s}{r_1}, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{s}{r_1}\right)^2}.$$

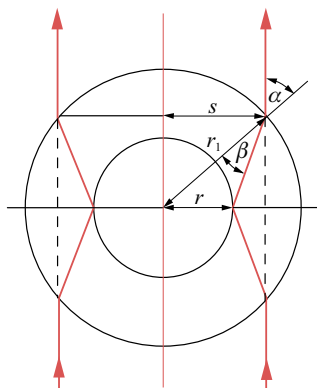


Abb. M.5.2.2 Strahlen durch eine Kapillare

Nach dem Brechungsgesetz $\sin \alpha = n \sin \beta$ (O.3.0.1- Gl. (1)) gilt

$$\sin \beta = \frac{1}{n} \frac{s}{r_1} \quad \text{und} \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{s}{n r_1}\right)^2}.$$

Drückt man in Gl. (12) alle Winkelfunktionen durch s , r_1 und n aus und löst die Gleichung nach r auf, folgt

$$r = \frac{s}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{s}{r_1}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{n r_1}\right)^2} + \left(\frac{s}{r_1}\right)^2},$$

$$r = \frac{s}{n} \frac{1}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{s}{n} \sqrt{1 + \tan^2(\alpha - \beta)}.$$

Damit ergibt sich

$$r = \frac{s}{n} \sqrt{1 + \frac{(s-r)^2}{r_1^2 - s^2}} . \quad (13)$$

Kann man nachweisen, dass

$$\frac{\left(s - \frac{s}{n}\right)^2}{r_1^2 - s^2} < 10^{-2}$$

gilt, vereinfacht sich Gl. (13) zu

$$r = \frac{s}{n} . \quad (14)$$

Für Steighöhenbestimmungen muss die Glaskapillare sehr sauber sein. Eine Reinigung ist oft aufwendig, so dass sich die Verwendung von Einweg-Kapillarpipetten empfiehlt. Man taucht die Kapillare senkrecht in die Flüssigkeit ein, saugt diese z. B. mit einem Gummigebläse hoch und wartet die Einstellung der Steighöhe h von oben her ab. Der Wert von h kann entweder mit einer Spiegelskala, die sich hinter dem Kapillarrohr befindet, ermittelt oder mit einem Kathetometer gemessen werden. Das Kathetometer besteht aus einem Fernrohr (O.1.4), das sich längs eines vertikalen Metallrohrs verschieben lässt. Nach Scharfstellung der Flüssigkeitsoberfläche in der Küvette bzw. der Flüssigkeitssäule in der Kapillare kann mit einem in der Okularbrennebene scharf abgebildeten Fadenkreuz die Messung der Steighöhe erfolgen. Dazu verwendet man die am vertikalen Führungsrohr des Kathetometers angebrachte Millimeter-Skala mit Feinablesung. Die Differenz der beiden Ablesungen ergibt den Wert für h . Bevor man mit der Messung beginnt, ist mit Hilfe einer Dosenlibelle zu überprüfen, ob das Kathetometer genau waagrecht steht.

Die Steighöhenbestimmung ist für jede Flüssigkeit mehrmals auszuführen. Mit dem daraus bestimmten Mittelwert ist die gesuchte Oberflächenspannung nach Gl. (8) unter

Berücksichtigung der betreffenden Korrekturfaktoren in den Gln. (8a) bzw. (8b) zu berechnen. Die Dichte ρ kann der Tabelle A.8 im Anhang oder der Versuchsanleitung entnommen werden.

5.3 Tropfenmethode

Aufgabenstellung

Es ist die Veränderung der Oberflächenspannung von Wasser bei Zumischung von Ethanol zu untersuchen.

Bei der Bestimmung der Oberflächenspannung einer Flüssigkeit gegenüber Luft mit der Tropfen-Gewichtsmethode lässt man ein bestimmtes Flüssigkeitsvolumen V aus einer Kapillare mit plangeschliffener Endfläche und bekanntem Radius r_K (z. B. Stalagmometer) in Luft ausfließen und misst die Zahl der sich bildenden Tropfen. Für die Auswertung der Messergebnisse geht man von der Annahme aus, dass ein Tropfen dann von der Kapillare abreißt, wenn seine Gewichtskraft

$$F_G = m_T g \quad (15)$$

gleich (oder geringfügig größer) der Kraft ist, die aufgrund der Oberflächenspannung entlang der Umfanglinie des Tropfens an der Kapillare wirkt, d. h.

$$F_\sigma = 2 \pi r_K \sigma . \quad (16)$$

Da für die Masse des Tropfens $m_T = \rho_T V_T$ gilt, folgt für das Kräftegleichgewicht im Moment des Abreißens

$$\rho_T V_T g = 2 \pi r_K \sigma . \quad (17)$$

Dabei sind ρ_T die Dichte der austropfenden Flüssigkeit, V_T das Volumen des abreißen Tropfens, g die Erdbeschleunigung, r_K der Radius der Kapillare und σ die Grenzflächenspannung. Das Volumen eines Tropfens V_T lässt sich aus dem bekannten Volumen V der ausfließenden Flüssigkeit und der Tropfenzahl n berechnen: $V_T = V / n$.

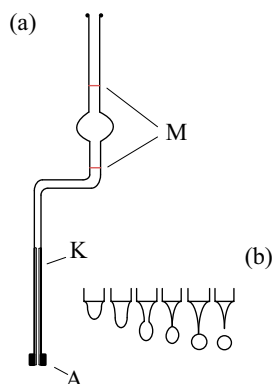


Abb. M.5.3.1 (a) Stalagmometer mit Referenzmarken, (b) Austropfen einer Flüssigkeit aus einer Kapillare (schematisch)

In Wirklichkeit ist die Masse des abfallenden Tropfens kleiner als nach Gl. (15) zu erwarten ist. Das hängt mit den kinetischen Vorgängen beim Abreißen des Tropfens zusammen. Deshalb wird in Gl. (17) ein empirischer Korrekturfaktor $K_{\text{kor}}^{\text{r}}$ eingeführt, der dieses Problem berücksichtigen soll:

$$\rho_{\text{Fl}} V_T g = 2 \pi r_K \sigma K_{\text{kor}}^{\text{r}}.$$

Es ergibt sich dann für die Oberflächenspannung

$$\sigma = \frac{g \rho_{\text{Fl}} V_T}{2 \pi r_K K_{\text{kor}}^{\text{r}}} \quad (18)$$

Falls der Korrekturfaktor nicht bekannt ist, kann man diesen durch Kalibriermessungen ermitteln. In der Regel verwendet man als Kalibriersubstanz Wasser, dessen Oberflächenspannung gegenüber Luft als Funktion der Temperatur ϑ gut bekannt ist und mit der empirischen Gleichung

$$\sigma_{\text{H}_2\text{O}} = [72,9 - 0,155(\vartheta - 18^\circ\text{C})] 10^{-3} \text{ Nm}^1$$

im Temperaturbereich zwischen 15°C und 60°C gut beschrieben werden kann (relative Abweichungen kleiner als 1 %). Wenn man den Radius der Kapillare nicht kennt, kann r_K experimentell bestimmt werden (M.5.2).

Versuchsauführung

Bei der praktischen Durchführung von Messungen der Oberflächenspannung wird ein Stalagmometer (Gerät zur Messung der Tropfengröße, Abb. M.5.3.1) verwendet. Es besteht im Wesentlichen aus einer Kapillare, oberhalb der sich das Referenzvolumen mit Eichmarken befindet. Aus Gl. (18) folgt, dass bei Kalibrierung des Stalagmometers mit Wasser die Oberflächenspannung einer unbekannten Flüssigkeit mit einer Relativmethode durch Zählen der jeweiligen Tropfenzahl (z_W Zahl der Wassertropfen, z Zahl der Tropfen der zu messenden Flüssigkeit) bestimmt werden kann:

$$\frac{\sigma}{\sigma_W} = \frac{\rho}{\rho_W} \frac{z_W}{z} \quad (19)$$

Dabei muss die Temperatur bei allen Messungen konstant und das Ausfließverhalten der Flüssigkeiten darf nicht zu unterschiedlich sein. Falls die Dichten ρ und ρ_W nicht am Arbeitsplatz gegeben sind, können diese z. B. mit einer Mohr-Westphal-Waage (M.1.2) gemessen werden.

Das Stalagmometer wird senkrecht in ein Stativ eingespannt und am oberen Ende ein Schlauchstück, das mit einer Schlauchklemme versehen ist, aufgesetzt. Die zu untersuchende Flüssigkeit, die sich in einem Gefäß unterhalb der Kapillare befindet, wird vorsichtig bis über die obere Marke in das trockene und saubere Stalagmometer mit Hilfe eines Gummigebläses nach oben gesaugt. Die Schlauchklemme wird geschlossen und das Gummigebläse entfernt. Nun wird die Schlauchklemme soweit geöffnet, dass die Tropfen gut zählbar (etwa 2 Tropfen/s) abfallen. Wenn der Flüssigkeitsmeniskus während des Ausfließens die obere Marke passiert, werden die Tropfen gezählt, bis die untere Marke erreicht ist. Die Messung ist mehrfach zu wiederholen. Anschließend durchspült man das Stalagmometer zur Beseitigung von Wasserresten mit der zu untersuchenden

Wasser-Ethanol-Mischung und beginnt wieder mit dem Zählen der Tropfen. Es ist für fünf verschiedene Konzentrationen die Oberflächenspannung bei einer konstanten Temperatur zu messen und deren Änderung in Abhängigkeit von der Konzentration von Ethanol in der Mischung graphisch darzustellen und zu diskutieren.

6 Viskosität und Strömung

6.0 Grundlagen

6.0.1 Bernoulli-Gleichung

Eine idealisierte Flüssigkeit oder ein idealisiertes Gas ströme durch ein Rohr. Die Idealisierung soll darin bestehen, dass der strömende Stoff als inkompressibel angesehen und die Wechselwirkung der Flüssigkeits- bzw. Gasmoleküle untereinander und mit der Rohrwand vernachlässigt wird. Das Volumen V eines Stromfadens, dessen Querschnitt A von Ort zu Ort verschieden sein kann, bewegt sich in der Zeit dt bei Vorhandensein einer Druckdifferenz $p_1 - p_2$ gemäß Abb. M.6.0.1. Das Rohrstück mit dem größeren Querschnitt A_1 befindet sich in einer größeren Höhe h_1 als das mit dem kleineren Querschnitt A_2 in der Höhe h_2 . Die betreffenden statischen Drücke und Strömungsgeschwindigkeiten sind p_1 bzw. p_2 und v_1 bzw. v_2 . In einer Zeit dt kommt es zur Verschiebung des Volumens V um die Wegstücke ds_1 und ds_2 . Da der Stoff inkompressibel sein soll (Dichte ρ konstant), gilt

$$dV = A_1 ds_1 = A_2 ds_2 .$$

Die durch die Strömung (Verschiebung des Volumens) verrichtete Arbeit ist

$$\Delta W_{\text{Str}} = (p_1 - p_2) dV .$$

Die kinetische Energie vergrößert sich um

$$\Delta W_{\text{kin}} = \left(\frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 \right) dV ,$$

während die potentielle Energie um

$$\Delta W_{\text{pot}} = \rho g (h_2 - h_1) dV$$

zunimmt.

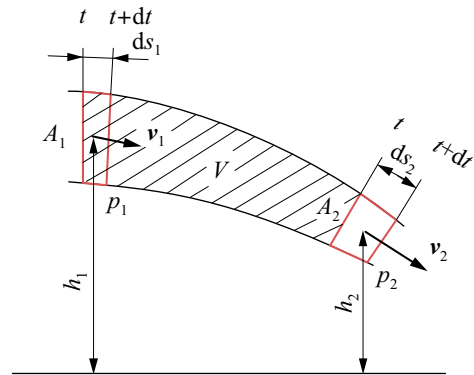


Abb. M.6.0.1 Zur Herleitung der Bernoulli-Gleichung

Da jegliche Wechselwirkung vernachlässigt werden soll, muss die verrichtete Arbeit gleich der Summe der gewonnenen kinetischen und potentiellen Energie sein. Es gilt also

$$\Delta W_{\text{Str}} = \Delta W_{\text{kin}} + \Delta W_{\text{pot}} ,$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = \quad (1)$$

$$p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 = \text{const}$$

oder unter Verzicht auf die Indizes und mit $\text{const} = p_0$ ergibt sich

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = p_0 . \quad (2)$$

Gl. (2) bezeichnet man nach ihrem Entdecker *Daniel Bernoulli* als Bernoulli-Gleichung. Diese besagt, dass die Summe aus dem statischen Druck p , dem dynamischen Druck

(Staudruck) und dem vom Höhenunterschied h abhängigen Druck (geodätischer Druck) konstant ist. Wenn die Strömung durch ein horizontales Rohr erfolgt, bleibt die potentielle Energie konstant und der geodätische Druck ist null. Dann vereinfacht sich die Bernoulli-Gleichung (2) zu

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0 . \quad (2a)$$

Im Falle eines realen Stoffs (Flüssigkeit, Gas) treten bei einer Strömung Reibungskräfte aufgrund zwischenmolekularer Wechselwirkungen auf, deren Wirkung man auch als innere Reibung bezeichnet.

Wenn dieser Stoff durch ein zylindrisches Rohr strömt, hat die Geschwindigkeit in der Rohrachse einen maximalen Wert, während sie an der Rohrwand verschwindet. Bei hinreichend kleinen Geschwindigkeiten kann man annehmen, dass differentiell dünne Hohlzylinder wirbelfrei aneinander gleiten. Eine solche Strömung nennt man laminar. Zwischen benachbarten Hohlzylindern muss eine Reibungskraft F_R wirken. Diese ist der Berührungsfläche A und dem Geschwindigkeitsgefälle dv/dr senkrecht zur Fließrichtung proportional. Als Proportionalitätsfaktor führt man die dynamische Viskosität (den Koeffizienten der inneren Reibung) η ein:

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dr} . \quad (3)$$

Der Zusammenhang in Gl. (3) wird auch als Reibungsgesetz nach *Newton* bezeichnet. Die SI-Einheit der dynamischen Viskosität ist $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$, die kohärente abgeleitete Einheit Pa s (Pascal Sekunde). Das Verhältnis von dynamischer Viskosität η zur Dichte ρ bezeichnet man als kinematische Viskosität η^* :

$$\eta^* = \frac{\eta}{\rho} . \quad (4)$$

Die kinematische Viskosität hat die SI-Einheit $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$.

6.0.2 Gesetz von Hagen und Poiseuille

In einem mit Flüssigkeit oder Gas gefüllten Rohr vom Radius R entsteht eine laminare Strömung, wenn ein nicht zu großes Druckgefälle vorhanden ist. Im stationären Zustand ist für jeden koaxialen Zylinder vom Radius r die Summe von Druckkraft F_p und Reibungskraft F_R gleich Null:

$$F_p + F_R = 0 .$$

Für die Reibungskraft verwendet man Gl. (3) und es folgt

$$\pi r^2 (p_1 - p_2) + \eta 2 \pi r l \frac{dv}{dr} = 0 ,$$

$$dv = - \frac{(p_1 - p_2)}{2 \eta l} r dr .$$

Die Lösung lautet unter Berücksichtigung der Randbedingung $v(R) = 0$:

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4 \eta l} (R^2 - r^2) . \quad (5)$$

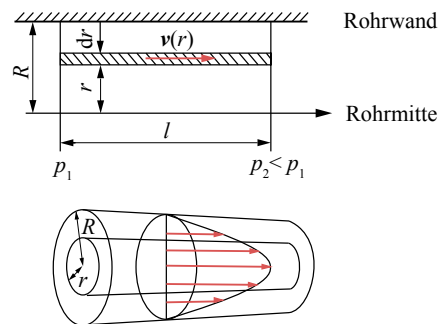


Abb. M.6.0.2 Laminare Rohrströmung mit parabelförmiger Geschwindigkeitsverteilung (Hagen-Poiseuille'sche Gesetz)

Durch einen Hohlzylinder vom Radius r und der Dicke dr fließt in der Zeit dt das Volumen dV (Abb. M.6.0.2). Dann berechnet sich der Volumenstrom mit

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = 2 \pi r dr v(r) .$$

Mit $v(r)$ gemäß Gl. (5) und Integration über alle Hohlzylinder

$$\dot{V} = \int_0^R \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\eta l} (R^2 - r^2) r dr$$

folgt das Gesetz von *Hagen* und *Poiseuille*:

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\eta l} \quad (6)$$

Es ist zweckmäßig, einen Mittelwert der Geschwindigkeit einzuführen. Als mittlere Geschwindigkeit \bar{v} definiert man das ausfließende Volumen je Zeit, geteilt durch den Rohrquerschnitt:

$$\bar{v} = \frac{\dot{V}}{t} \frac{1}{\pi R^2} \quad (7)$$

Aus dem Vergleich der Gln. (6) und (7) folgt für die mittlere Strömungsgeschwindigkeit auch der Zusammenhang

$$\bar{v} = \frac{(p_1 - p_2) R^2}{8\eta l} \quad (8)$$

Das Gesetz von *Hagen* und *Poiseuille* gilt unter der Voraussetzung, dass die Strömung laminar ist. Bei turbulenter Strömung, bei der durch Wirbel Teilchen aus einer dünnen Schicht in benachbarte Schichten gelangen, kann Gl. (6) nicht angewendet werden. Aber auch im Bereich der laminaren Strömung ist das Gesetz von *Hagen* und *Poiseuille* nur richtig, wenn die kinetische Energie der Flüssigkeitsteilchen nicht zu groß gegenüber derjenigen Energie ist, die durch die innere Reibung bestimmt wird.

Um das zu verdeutlichen, betrachtet man die in einem Hohlzylinder mit dem Radius r und der Dicke dr bei einer Geschwindigkeitsverteilung gemäß Gl. (5) enthaltene kinetische Energie

$$dE_k = \frac{1}{2} v^2 dm \quad \text{bzw.}$$

$$dE_k = \frac{1}{2} \left(\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} \right)^2 (R^2 - r^2)^2 \rho 2\pi r l dr.$$

Die gesamte kinetische Energie ergibt sich durch Integration über alle Hohlzylinder zu

$$E_k = \int_0^R dE_k = \frac{\pi \rho (p_1 - p_2)^2 R^6}{96 \eta^2 l}.$$

Dafür kann man

$$E_k = \pi R^2 (p_1 - p_2) \left[\frac{\rho \bar{v} R}{\eta} \right] \frac{R}{12} \quad (9)$$

schreiben. Der in Gl. (9) auftretende Faktor in den rechteckigen Klammern ist dimensionslos und wird Reynolds-Zahl Re genannt:

$$Re = \frac{\rho \bar{v} R}{\eta} \quad (10)$$

Bei Rohrströmungen ist es üblich, statt des Radius R den Innendurchmesser des Rohrs als charakteristische Länge $L = 2R$ für die Bestimmung der Reynolds-Zahl zu verwenden:

$$Re = \frac{\rho \bar{v} L}{\eta} \quad (10a)$$

Die Reynolds-Zahl hat keine Dimension und beschreibt als eine wichtige Kennzahl der Strömungslehre das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften.

Die kinetische Energie E_k kann nun unter keinen Umständen größer als die in den strömenden Stoff hineingesteckte Arbeit

$$W = \pi R^2 (p_1 - p_2) l \quad (11)$$

sein. Der Vergleich der Gln. (11) und (9) liefert

$$l > \frac{\rho \bar{v} R}{\eta} \frac{R}{12} = \frac{Re}{12} R \quad (12)$$

Aus sorgfältigen Messungen ist bekannt, dass

für $Re < 1160$ die Strömung in einem Rohr mit Sicherheit laminar ist. Versteht man unter l die Länge des Rohrs, folgt aus der Ungleichung Gl.(12), dass sich eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung im gesamten Bereich der laminaren Strömung nur dann einstellen kann, wenn das Verhältnis der Rohrlänge zum Rohrradius größer als 100 ist. Da bei der Herleitung des Gesetzes von *Hagen* und *Poiseuille* Gl.(5) verwendet wird, kann Gl.(6) nur gelten, wenn die Ungleichung Gl.(12) erfüllt ist.

6.1 Kugelfallmethode

Aufgabenstellung

Die dynamische Viskosität einer sehr zähen Flüssigkeit ist mit der Kugelfallmethode nach *Stokes* bei Zimmertemperatur zu bestimmen.

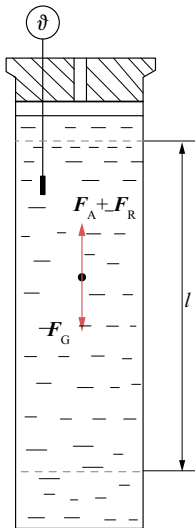


Abb. M.6.1.1 Kugelfallmethode nach *Stokes*

Auf eine in einer zähen Flüssigkeit fallende Kugel (Abb. M.6.1.1) vom Radius r wirken drei Kräfte: die Gewichtskraft F_G , der Auftrieb F_A und die Reibungskraft F_R :

$$F_G = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_K g \quad , \quad (13)$$

$$F_A = -\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{Fl} g \quad . \quad (14)$$

Es sind ρ_K bzw. ρ_{Fl} die Dichte der Kugel bzw. der Flüssigkeit. Für eine Kugel, die sich mit der Relativgeschwindigkeit v zwischen der Kugel und einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit bewegt, gilt nach *Stokes*

$$F_R = -6 \pi \eta r v \quad . \quad (15)$$

Im Experiment fällt die Kugel in einem Rohr mit dem Radius R und der Höhe h . Der Betrag der Reibungskraft vergrößert sich mit wachsenden Verhältnissen r/R und r/h . Da nicht in jedem Fall $h \gg R \gg r$ gilt, ist die Reibungskraft zu korrigieren. Unter Berücksichtigung der *Ladenburg'schen* Korrektur (*A. Ladenburg*) mit dem Korrekturfaktor

$$C_{\text{kor}} = \left(1 + 2,1 \frac{r}{R}\right) \left(1 + 3,3 \frac{r}{h}\right)$$

ergibt sich als modifizierte Gleichung für die Reibungskraft

$$F_{R,\text{kor}} = -6 \pi \eta r v C_{\text{kor}} \quad . \quad (15a)$$

Nachdem die Kugel eine gewisse Strecke in der Flüssigkeit zurückgelegt hat, stellt sich eine konstante Geschwindigkeit $v = l / t$ ein. Dann muss die Summe der auf die Kugel wirkenden Kräfte verschwinden:

$$F_G + F_A + F_R = 0 \quad . \quad (16)$$

Setzt man die Gln. (13), (14) und die korrigierte Reibungskraft nach Gl.(15a) in Gl.(16) ein, erhält man für die dynamische Viskosität die Gleichung

$$\eta = \frac{2(\rho_K - \rho_{Fl})g}{9l} r^2 t \cdot \left(1 + 2,1 \frac{r}{R}\right)^{-1} \left(1 + 3,3 \frac{r}{h}\right)^{-1} \quad . \quad (17)$$

Die *Stokes-Beziehungen* Gln.(15) bzw. (15a) gelten unter der Voraussetzung, dass die

Reynolds-Zahl nach Gl. (10a)

$$\text{Re} = \frac{\rho_{\text{Fl}} v L}{\eta} \quad (L = 2r) \quad (18)$$

sehr klein gegen eins ist. Aus diesem Grunde ist auch Gl. (17) nur für sehr kleine Reynolds-Zahlen brauchbar. Die Kugelfallmethode zur Bestimmung der dynamischen Viskosität kann nur als Demonstrationsversuch angesehen werden. Für die meisten Flüssigkeiten sind die Fallzeiten von Glas- oder Metallkugeln selbst bei großen Fallstrecken relativ klein. Außerdem ist die Viskosität aller Flüssigkeiten stark von der Temperatur abhängig. Es bereitet experimentell viel Mühe, die Temperatur einer in einem langen Rohr befindlichen Flüssigkeit konstant zu halten.

Versuchsausführung

Man misst mit einem Maßband die Fallstrecke l , den Rohrradius R und die Höhe der Flüssigkeitssäule h . Der Durchmesser der Kugeln wird mit einer Bügelmessschraube bestimmt. Die Fallzeiten der Kugeln zwischen oberer und unterer Marke am Rohr werden mit einer elektronischen Stoppuhr gemessen. Es ist darauf zu achten, dass die Kugeln längs der Rohrachse fallen und dass keine Luftblasen an den Kugeln hängen.

Die Messungen sind bei einer konstanten Temperatur durchzuführen. Man berechnet die Viskosität η nach Gl. (17), die Dichten ρ_{Fl} und ρ_{K} können den Tabellen im Anhang (A.7, A.8) bzw. den Versuchshinweisen im Praktikum entnommen werden. Es ist zu zeigen, ob die Reynolds-Zahlen für alle verwendeten Kugelradien viel kleiner als eins ist (Gl. (18)).

6.2 Kugelfall-Viskosimeter

Aufgabenstellung

Es ist die Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität einer Flüssigkeit mit dem Kugelfall-Viskosimeter nach *Höppler* in

einem vorgegebenen Temperaturbereich zu ermitteln und deren Beschreibung durch eine Exponentialfunktion zu überprüfen.

Fällt eine Kugel in einem senkrecht stehenden Rohr, dessen Durchmesser nur wenig größer als der Kugeldurchmesser ist, berührt die Kugel im Allgemeinen in unkontrollierbarer Weise die Rohrwand.

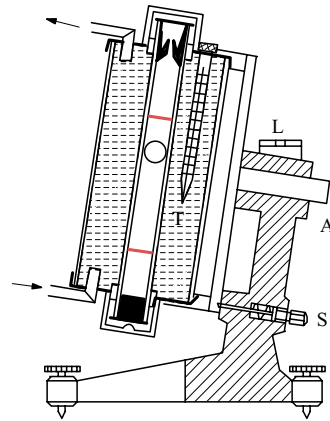


Abb. M.6.2.1 Aufbau des Kugelfall-Viskosimeters nach *Höppler* mit den beiden Messmarken (rote Ringe), Dosenlibelle L, Thermometer T

Ihre Bewegung wird reproduzierbar, wenn man das Rohr um einige Grad gegen die Vertikale neigt, d. h. die Kugel an der Rohrwand nach unten gleiten lässt. Diese Überlegung veranlasste *Höppler*, ein Viskosimeter mit geneigtem Rohr zu entwickeln (Abb. M.6.2.1). Das Viskosimeterrohr befindet sich in einem weiten Glasrohr, durch das man Flüssigkeit konstanter Temperatur strömen lässt. Hat die Kugel die Messstrecke (Abstand zwischen oberer und unterer Marke am Viskosimeterrohr) durchlaufen, dreht man das Viskosimeter 180° um die Achse A und lässt die Kugel zurückgleiten. Während der Messung ist das Viskosimeter mit der Schraube S zu arretieren. Die Viskosität bestimmt man mit der Gleichung

$$\eta = K(\rho_{\text{K}} - \rho_{\text{Fl}}) t \quad (19)$$

In Gl.(19) ist K die Kugelkonstante, t die Zeit, in der die Kugel die Messstrecke durchläuft, und ρ_K bzw. ρ_F sind die Dichte der Kugel bzw. der Flüssigkeit. Die Gln. (17) und (19) stimmen formal überein. Während sich aber für eine in einem weiten Rohr fallende kleine Kugel die Kugelkonstante berechnen lässt, muss die Größe K in Gl.(19) gegeben sein oder mit Hilfe einer Kalibrierflüssigkeit empirisch ermittelt werden. Um das Höppler-Viskosimeter in einem sehr großen Viskositätsbereich verwenden zu können, gehört zu jedem Gerät ein Satz von Kugeln verschiedener Größe und Dichte. Eine der Kugeln ist auch zur Bestimmung der Viskosität von Gasen geeignet. Bei den Messungen ist darauf zu achten, dass man eine bestimmte Mindestfallzeit nicht unterschreitet, da anderenfalls die Strömung um die Kugel nicht mehr laminar ist.

Versuchsausführung

Die Versuchsflüssigkeit, die ggf. vor dem Einfüllen in das Glasrohr durch Erwärmung und anschließend durch langsames Abkühlen weitestgehend zu entgasen ist, wird in das Viskosimeter gefüllt. Alle an der Rohrwand haftenden Luftblasen sind sorgfältig zu entfernen. Dann steckt man langsam die Kugel in das Rohr, ohne dass sich um die Kugel Luftblasen bilden können. Der Einsatz am oberen Ende des Viskosimeterrohrs soll nicht vollständig gefüllt sein, damit sich die Flüssigkeit beim Erwärmen ausdehnen kann. Man schließt das Rohr mit dem dafür vorgesehenen Schraubverschluss und justiert das Viskosimeter. Danach wählt man an einem Umwälzthermostaten die gewünschte Mess-temperatur und schaltet diesen ein.

Die Zeit, in der sich die Kugel von der oberen bis zur unteren Messmarke am Viskosimeterrohr bewegt, wird mit einer Stoppuhr gemessen. Da die Temperatur nicht in der zu untersuchenden Flüssigkeit, sondern im Temperierbad bestimmt wird, ist die Fallzeit bei jeder Temperatur so oft zu stoppen, bis

sich ein im Rahmen der Messunsicherheit konstanter Wert ergibt. Die Dichten ρ_K und ρ_F sind der Anleitung am Arbeitsplatz zu entnehmen. Die Viskosität η wird nach Gl.(19) berechnet und ihre Temperaturabhängigkeit ist graphisch darzustellen. Da die Viskosität vieler Flüssigkeiten einer exponentiellen Temperaturabhängigkeit entsprechend $\eta(T) = A_1 \exp(A_2/T)$ genügt, trägt man $\ln \eta$ über der reziproken absoluten Temperatur $1/T$ auf. Mit Hilfe des linearen Ausgleichs (graphisch oder rechnerisch) bestimmt man die in einem nicht zu großen Temperaturbereich konstanten Materialparameter A_1 und A_2 .

6.3 Kapillar-Viskosimeter

Aufgabenstellung

1. Die Abhängigkeit der kinematischen Viskosität einer Flüssigkeit von der Temperatur ist in einem vorgegebenen Temperaturbereich mit dem Kapillar-Viskosimeter nach *Ubbelohde* zu bestimmen.
2. Aus den Werten der kinematischen Viskosität sind die Werte der dynamischen Viskosität zu berechnen. Es ist die molare Energie für die molekularen Platzwechselvorgänge bei laminarer Schichtenströmung durch graphische Auswertung zu ermitteln.

Das Viskosimeter nach *Ubbelohde* ist ein Kapillarviskosimeter. Es unterscheidet sich von dem älteren Viskosimeter nach *Ostwald* durch das Rohr 3 (Abb. M.6.3.1).

Dieses Rohr bewirkt, dass am unteren Ende der Kapillare (4, Rohr 2) Luftdruck herrscht. Die aus der Kapillare austretende Flüssigkeit fließt in einer dünnen Schicht an der Innenwand des Volumens C ab. Dabei bildet sich ein so genanntes hängendes Kugelniveau, das nach sorgfältigen Untersuchungen von *Ubbelohde* unabhängig von der Dichte, der Viskosität und der Oberflächenspannung der zu untersuchenden Flüssigkeit ist. Die untere

Grenze der Druckhöhe h ist daher das untere Ende der Kapillare (nicht wie beim Ostwald-Viskosimeter die variable Höhe des Flüssigkeitsspiegels im Volumen B).

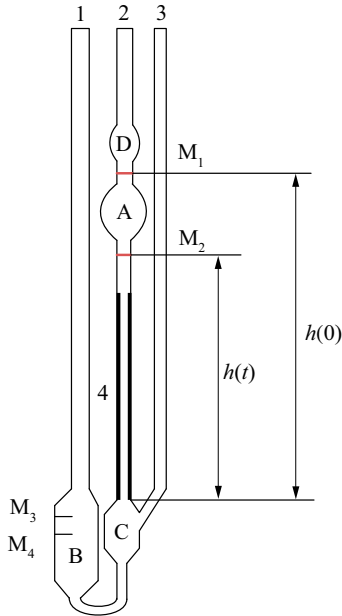


Abb. M.6.3.1 Aufbau des Kapillar-Viskosimeters nach Ubblohde

Die Druckhöhe h ändert sich während der Messung von $h(0)$ bis $h(t)$. Man rechnet deshalb mit dem zeitlichen Mittelwert

$$\langle h \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t h dt.$$

Für die kinematische Viskosität gilt nach den Gln. (6) und (4)

$$\eta^* = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4 t}{8Vl\rho}. \quad (20)$$

Beim Eintritt in die Kapillare muss die Flüssigkeit beschleunigt werden. Dazu ist ein Druck δp notwendig.

$$p_1 - p_2 = \rho g \langle h \rangle - \delta p. \quad (21)$$

[[Zur Berechnung von δp (Hagenbach-Korrektur) schreibt man die kinetische Energie je Zeit der durch einen Hohlzylinder mit dem Radius r und der Dicke dr (Abb. M.6.0.2) strömenden Flüssigkeit auf:

$$dE'_k = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \rho d\dot{V} v(r)^2.$$

Für $d\dot{V}$ gilt $d\dot{V}(r) = 2\pi r v(r) dr$. Daraus folgt

$$dE'_k = \frac{1}{2} \rho 2\pi r dr v(r)^3 \text{ bzw. mit Gl. (5) erhält}$$

$$\text{man } dE'_k = \rho \pi r \left[\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) \right]^3 dr.$$

Die Integration über alle Hohlzylinder liefert die gesamte kinetische Energie je Zeit:

$$E'_k = \rho \pi \left[\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} \right]^3 \frac{R^8}{8}.$$

Mit Gl. (6) ergibt sich $E'_k = \frac{\rho V^3}{\pi^2 R^4 t^3}$. Andererseits

$$\text{ist } E'_k = \frac{\delta p V}{t} \text{ und es folgt } \delta p = \frac{\rho V^2}{\pi^2 R^4 t^2}. \quad (22)$$

Die dargestellte Überlegung ist insofern nicht exakt, weil beim Eintritt der Flüssigkeit in die Kapillare eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung gemäß Gl. (5) noch gar nicht vorliegt. Aus diesem Grunde bringt man an Gl. (22) einen Korrekturfaktor k_p an, der einen Wert von etwa 1,1 hat:

$$\delta p = \frac{k_p \rho V^2}{\pi^2 R^4 t^2}. \quad (23)$$

Setzt man die Gln. (21) und (23) in Gl. (20) ein, folgt

$$\eta^* = \frac{\pi g \langle h \rangle R^4}{8Vl} t - \frac{mV}{8\pi l} \frac{1}{t}.$$

Mit den Konstanten $K = \frac{\pi g \langle h \rangle R^4}{8Vl}$ und

$$K' = \frac{mV}{8\pi l} \text{ wird } \eta^* = K \left[t - \frac{K'}{Kt} \right].$$

Die Größe $K'/(Kt)$ muss die Dimension einer Zeit haben. Deshalb führt man eine Korrekturzeit ein:

$$t' = K'/(Kt). \quad (24)$$

Für die Bestimmungsgleichung der kinematischen Viskosität folgt dann der Gleichung

$$\eta^* = K(t - t') \quad (25)$$

Die Kapillar-Viskosimeter nach *Ubbelohde* sind so dimensioniert, dass sich die Werte der Viskosimeterkonstanten K nur sehr wenig von $1 \text{ mm}^2 \text{ s}^{-2}$, $0,1 \text{ mm}^2 \text{ s}^{-2}$ bzw. $0,01 \text{ mm}^2 \text{ s}^{-2}$ unterscheiden. Der Wert von K ist in das kalibrierte Viskosimeter geätzt oder kann dem Gerätezertifikat des Herstellers entnommen werden, in dem auch die Standardunsicherheit für K mitgeteilt wird.

Versuchsausführung

Zunächst wird das Rohr 1 (Abb. M.6.3.1) mit Messflüssigkeit gefüllt, bis der Flüssigkeitsspiegel zwischen den Marken M_3 und M_4 liegt. Danach stellt man am Regelteil des Thermostaten die gewünschte Temperatur ein und schaltet den Thermostaten ein. Dieser speist einen Glasbehälter mit der Thermostatflüssigkeit, in den das Viskosimeter einzusetzen ist. Rohr 3 wird mit dem Finger geschlossen und die Messflüssigkeit z. B. mit Hilfe eines Gummigebläses in Rohr 2 hochgesaugt. Wenn das Volumen D völlig gefüllt ist, öffnet man Rohr 3 und bestimmt die Zeit t , in der der Flüssigkeitsspiegel von der Marke M_1 bis zur Marke M_2 sinkt. Man notiert die Temperatur des Flüssigkeitsbads und die Ausflusszeit t bei dieser Temperatur so oft, bis sich der Wert von t nicht mehr ändert. Die der Ausflusszeit entsprechende Korrekturzeit t' wird der vom Hersteller des Viskosimeters mitgelieferten Tabelle entnommen und die kinematische Viskosität nach Gl. (25) berechnet. Der Versuch ist bei anderen Temperaturen zu wiederholen. Unter Verwendung von Gl. (4) kann die dynamische Viskosität berechnet werden.

Die Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität ist graphisch in einem kartesischen Koordinatensystem mit den transformierten Koordinaten $x = 1/T$ und $y = \ln \eta$

darzustellen (Ausgleichsgerade $y = A + Bx$, Auswertung siehe Einführung 2.3 bzw. 2.4). Für viele (nicht assoziierte) Flüssigkeiten wird zur Beschreibung der Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität die Andrade-Arrhenius-Beziehung

$$\eta(T) = C \exp\left(\frac{E_A}{RT}\right) \quad (26)$$

verwendet, die einen direkten Zusammenhang zwischen der molaren Aktivierungsenergie E_A und dem Fit-Parameter B herstellt ($E_A = RB$). In Gl. (25) sind C eine Materialkonstante und R die universelle Gaskonstante. Die Größe E_A ist eine Maß für die Größe der zwischenmolekularen Wechselwirkungen, die für das wirbelfreie aneinander Vorbeifließen der Schichten bei laminarer Strömung notwendig ist.

6.4 Strömung im Rohr

Aufgabenstellung

1. Bei einer Rohrströmung soll diejenige Reynolds-Zahl bestimmt werden, bei der die laminare Strömung in einem Rohr in turbulente Strömung umschlägt.
2. Für den Bereich der laminaren Strömung ist zu zeigen, dass zwischen dem Widerstandsbeiwert und der Reynolds-Zahl ein linearer Zusammenhang besteht.

Bei einer stationären Strömung durch ein Rohr vom Radius R ist die Summe aus Druckkraft F_p und Reibungskraft F_R gleich null:

$$F_p + F_R = 0 \quad (27)$$

Für F_R soll ein Ansatz gewählt werden, der im Gegensatz zu Gl. (3) sowohl im Bereich der laminaren als auch in dem der turbulenten Strömung brauchbar ist. Man setzt die Reibungskraft F_R proportional der angeströmten Mantelfläche A und der kinetischen Energie je Volumen mit der mittleren Ge-

schwindigkeit \bar{v} (Gln. (7) und (8)):

$$F_R = -c_W A \frac{\rho}{2} \bar{v}^2 \quad (28)$$

Die Größe c_W beschreibt den dimensionslosen Widerstandsbeiwert, wobei ρ die Dichte der Flüssigkeit ist. Aus

$$\pi R^2 (p_1 - p_2) - c_W 2 \pi R l \frac{\rho}{2} \bar{v}^2 = 0$$

folgt

$$c_W = \frac{(p_1 - p_2) R}{\rho l \bar{v}^2} \quad (29)$$

Wird die Druckdifferenz $(p_1 - p_2)$ mit Manometerrohren (Abb. M.6.4.1) gemessen, gilt

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_1 - h_2) \quad (30)$$

Damit wird der Widerstandsbeiwert

$$c_W = \frac{g (h_1 - h_2) R}{l \bar{v}^2} \quad (30)$$

Ist die Strömung laminar, kann man Gl.(8) als

$$(p_1 - p_2) \pi R^2 - 8 \pi \eta l \bar{v} = 0 \quad (31)$$

schreiben. Aus den Gln. (27) und (31) folgt

$$F_R = -8 \pi \eta l \bar{v} \quad (32)$$

Der Vergleich der Gln. (28) und (32) liefert den Widerstandsbeiwert einer laminaren Strömung mit der Reynolds-Zahl nach Gl.(10a):

$$c_{W, \text{lam}} = \frac{16}{\text{Re}} \quad (33)$$

Trägt man $\lg c_W$ über $\lg \text{Re}$ auf, erhält man für den Bereich der laminaren Strömung gemäß Gl.(33) eine Gerade mit dem Anstiegswert -1. Bei turbulenter Strömung besteht zwischen c_W und Re ein anderer Zusammenhang, der empirisch aus Strömungs-

experimenten gewonnen wurde:

$$c_{W, \text{turb}} = \frac{0,0791}{\text{Re}^{1/4}} \quad (34)$$

Versuchsausführung

Man stellt eine Druckdifferenz $(p_1 - p_2)$ als Höhendifferenz $(h_1 - h_2)$ ein, die durch Manometer im Abstand l längs des Rohrs gemessen wird (Abb. M.6.4.1). Befindet sich Luft im Strömungsrohr, darf erst dann mit der Messung begonnen werden, wenn die strömende Flüssigkeit alle Luftblasen aus dem Rohr entfernt hat. Die Temperatur der Flüssigkeit (Wasser) ist abzulesen, die Werte für die Dichte ρ sowie die Viskosität η können der Tabelle A.9 im Anhang entnommen werden. Man wiederholt die Messung bei etwa 20 verschiedenen Druckdifferenzen.

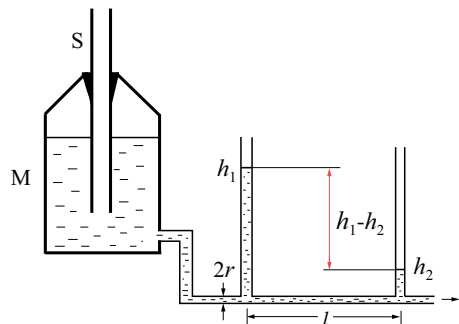


Abb. M.6.4.1 Schematische Darstellung der Versuchsanordnung zur Strömung in einem Rohr mit Mariott'scher Flasche (M)

Als Vorratsbehälter kann eine Mariott'sche Flasche verwendet werden, die über einen Wasserzulauf verfügt, so dass sich auch bei kontinuierlichem Abfluss das untere Ende des Steigrohrs immer im Wasser befindet. Bei konstanter Höhe des unteren Ende des Steigrohrs S herrscht ein konstanter Überdruck am Auslass der Mariott'schen Flasche. Durch Variation der Höhe der Flasche gegenüber der Lage des horizontalen Strömungsrohrs sowie durch die Änderung der

Eintauchtiefe des Steigrohrs, aber auch mit Hilfe eines Ausflusshahns, kann die Druckdifferenz und damit der Volumenstrom geändert werden. Am Ausgang des Strömungsröhrs wird mit einem Messzylinder das ausfließende Volumen in einer bestimmten Zeit ermittelt.

Da das Gesetz von *Hagen* und *Poiseuille* nur für laminare Strömungen gilt, verwendet man für die experimentelle Bestimmung von R die bei kleinen Druckdifferenzen ermittelten Volumenströme. Die mittleren Geschwindig-

keiten erhält man aus Gl.(7), die Widerstandsbeiwerte c_w aus Gl.(30) und die Reynolds-Zahlen Re aus Gl.(10). Man stellt $\lg c_w$ in Abhängigkeit von $\lg Re$ graphisch dar und entnimmt dem Graphen den Wert der kritischen Reynolds-Zahl (Re_{kr}), bei dem der Wechsel von einer laminaren in eine turbulente Strömung beobachtet wird. Unterhalb und oberhalb von Re_{kr} ist der Verlauf des Graphen zu diskutieren. Dabei ist insbesondere die Anwendbarkeit der Gln.(33) und (34) zu überprüfen.

Physikalisches Praktikum

Schenk, W.; Kremer, F.; Beddies, G.; Franke, Th.;

Galvosas, P.; Rieger, P. - Schenk, W.; Kremer, F. (Hrsg.)

2014, XIV, 397 S. 325 Abb. in Farbe.,

ISBN: 978-3-658-00666-2