Kapitel 2
Theoretische Grundlagen zur Bestimmung von Effizienzen

Im Verlauf dieses Kapitels werden für die in den nachfolgenden Kapiteln verwendeten Methoden die notwendigen theoretischen Grundlagen der Effizienzmessung von *Entscheidungseinheiten* (*DMUs*, engl.: *Decision Making Units*) etabliert. Die betrachteten DMUs, deren Effizienz zu bestimmen ist, sollten stets in der Hinsicht vergleichbar sein, dass sie die gleichen Inputs verwenden, um die gleichen Outputs zu produzieren und die Kontrolle über diesen Produktionsprozess haben (vgl. Thanassoulis et al., 2008, S. 251). In dieser Arbeit stellen die Verbandsgemeinden in Rheinland-Pfalz die betrachteten DMUs dar.

2.1 Produktions- und Kostentheorie

Die Grundlage zur Messung von Effizienz ist das Verständnis von den Möglichkeiten zur Transformation von Inputs in Outputs. Die *Produktionstechnologie* definiert hierbei die möglichen *Input-Output-Kombinationen* und kann wie folgt als Menge T beschrieben werden

$$\mathrm{T} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m \mid x \text{ kann } y \text{ produzieren}\right\},$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ den Vektor der Inputs und $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}_+^m$ den Vektor der Outputs darstellt (vgl. Thanassoulis et al., 2008, S. 252). Die Menge T beinhaltet somit alle Input-Output-Vektoren, so dass x in der Lage ist y zu produzieren. Zwei alternative Darstellungen einer Produktionstechnologie sind die Inputbedarfsmenge und die Produktionsmöglichkeitenmenge.

A. Dorfard, *Kosteneffizienzen und Einsparungspotenziale durch Fusionen*,
DOI 10.1007/978-3-658-01501-5_2,

Bei einer input-orientierten Betrachtung kann die *Inputbedarfsmenge* $\mathrm{I}(y)$, bei vorgegebenem Output y, wie folgt definiert werden

$$\mathrm{I}(y) = \{x \mid (x,y) \in \mathrm{T}\}\,,$$

wobei angenommen wird, dass die Menge $\mathrm{I}(y)$ den folgenden Bedingungen genügt (vgl. Coelli et al., 2005, S. 43f):

1. $\mathrm{I}(y)$ ist abgeschlossen und konvex und
2. wenn $x \in \mathrm{I}(y)$, dann gilt $x^* \in \mathrm{I}(y)\ \forall\, x^*$ mit $x^* \geq x$.

Da im Falle von Kommunen als DMUs die Leistungserbringung bzw. die Höhe der Outputs sowie die Umweltbedingungen extern vorgegeben und kaum veränderlich sind, ist in dieser Arbeit die Minimierung von Inputs und deren Kosten von Interesse, d. h. die Effizienzmessung wird aus input- und nicht output-orientierter Sicht betrachtet. Daher wird die Darstellung der Produktionstechnologie mittels der Inputbedarfsmenge favorisiert und deren Rand zur Untersuchung der Effizienz betrachtet. Da jede DMU gemäß ihrer individuellen Situation eine Technologie besitzt, welche bei vorgegebenem Output eine Höhe von Inputs erfordert, die nicht geringer ist als vom Rand von $\mathrm{I}(y)$ vorgegeben, leitet der Rand hin zur Definition der *Input-Isoquante* bzw. *Input-Frontier* $I_F(y)$ sowie dem *input-effizienten Rand* $I_{Eff}(y)$ (vgl. Fried et al., 2008, S. 21):

$$\begin{aligned} I_F(y) &= \{x \mid x \in \mathrm{I}(y) \text{ und } \theta x \notin \mathrm{I}(y) \text{ für } 0 \leq \theta < 1\}\,, \\ I_{Eff}(y) &= \left\{x \mid x \in \mathrm{I}(y) \text{ und } x' \notin \mathrm{I}(y) \text{ für } x' \leq x\right\}. \end{aligned}$$

Es gilt hierbei $I_{Eff}(y) \subseteq I_F(y)$. Abbildung 2.1 zeigt für den Fall zweier Inputs und eines Outputs die Menge $\mathrm{I}(y)$ sowie ihren Rand. Hierbei wird die erläuterte Beziehung zwischen $I_{Eff}(y)$ und $I_F(y)$ anhand der zwei Punkte $\tilde{x}$ und x verdeutlicht. Denn $\tilde{x}$ ist zwar in $I_F(y)$, jedoch nicht in $I_{Eff}(y)$ enthalten, wobei der Punkt x in beiden Mengen enthalten ist. Die zwei Mengen unterscheiden sich, wie in der Abbildung dargestellt, nur bei Berücksichtigung eines Schlupfes (engl.: slack).

Bei einer output-orientierten Betrachtung kann des Weiteren die *Produktionsmöglichkeitenmenge* $\mathrm{P}(x)$ bei vorgegebenem Input x wie folgt definiert werden

$$\mathrm{P}(x) = \{y \mid (x,y) \in \mathrm{T}\}\,,$$

wobei angenommen wird, dass die Menge $\mathrm{P}(x)$ den folgenden Bedingungen genügt (vgl. Coelli et al., 2005, S. 42f):

1. $0 \in \mathrm{P}(x)$, d. h. Nicht-Produktion ist möglich,
2. $y > 0$ nur wenn $x > 0$, d. h. wenn irgendein Output positiv ist, ist mindestens ein Input ungleich Null,

3. $\mathrm{P}(x)$ ist abgeschlossen, beschränkt und konvex,
4. wenn $y \in \mathrm{P}(x)$, dann gilt $y^* \in \mathrm{P}(x)\ \forall\, y^*$ mit $y^* \leq y$ und
5. wenn $y \in \mathrm{P}(x)$, dann gilt $y \in P(x^*)\ \forall\, x^* \geq x$.

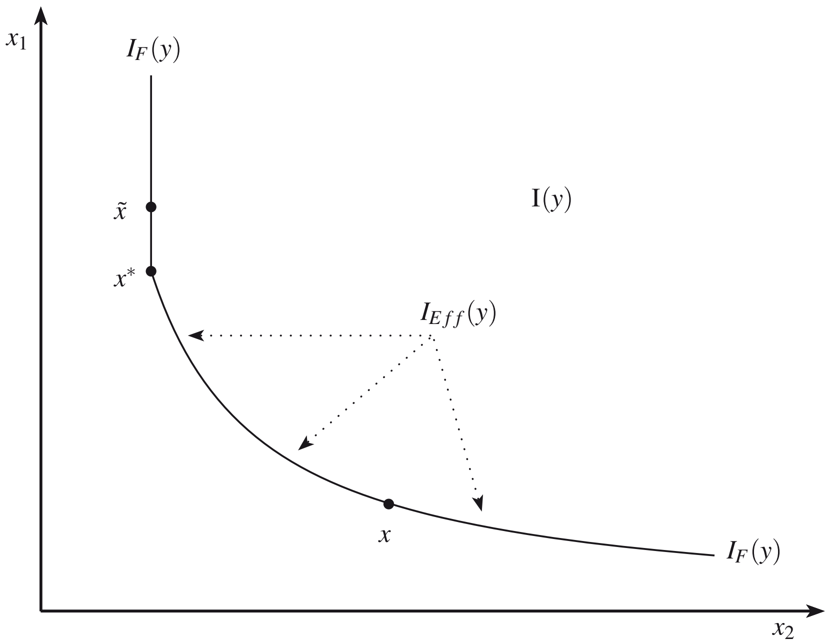

Abb. 2.1: Inputbedarfsmenge (Quelle: Eigene Darstellung nach Greene (2008, S. 101))

Die Konvexität impliziert, dass bei Produzierbarkeit zweier Outputs bei vorgegebenem Input auch das gewichtete Mittel der zwei Outputs produzierbar ist. Die Beschränktheit und Abgeschlossenheit implizieren, dass mit vorgegebenem Input nur endlich viel Output produziert werden kann und ein Rand existiert (vgl. Coelli et al., 2005, S. 43). Der Rand bezieht sich auf die *Produktionsisoquante* bzw. die *Produktions-Frontier*[8] $P_F(x)$ und den *produktionseffizienten Rand* $P_{Eff}(x)$ (vgl. Fried et al., 2008, S. 22):

$$P_F(x) = \{y \mid y \in \mathrm{P}(x) \text{ und } \theta y \notin \mathrm{P}(x) \text{ für } \theta > 1\},$$
$$P_{Eff}(x) = \left\{y \mid y \in \mathrm{P}(x) \text{ und } y' \notin \mathrm{P}(x) \text{ für } y' \geq y\right\}.$$

[8] In der wissenschaftlichen Literatur gibt es alternative Definitionen und Bezeichnungen für die Produktions-Frontier, so dass die Darstellung in dieser Arbeit keine Allgemeingültigkeit hat.

Die zwei Mengen $P_{Eff}(x)$ und $P_F(x)$ unterscheiden sich somit analog zur Beziehung von $I_{Eff}(x)$ und $I_F(x)$ nur bei Berücksichtigung eines Schlupfes.

In dieser Arbeit sind bei der Untersuchung von DMUs über die Transformation von Inputs in Outputs hinaus speziell die Kosten dieser Transformation von Interesse. Voraussetzung für die Betrachtung der Kosten sind Informationen über die Preise der Inputs. Unter der Annahme, dass die DMUs mit Input-Preisen von $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n_{++}$ konfrontiert sind, d. h. der j-te Eintrag in p dem Preis des j-ten Inputs in x entspricht, sind die *effektiven Kosten* eines Inputs x gegeben durch $k(p,x) = p^T x$ und die *Kosten-Frontier* bzw. *minimale Kostenfunktion* $K(p,y)$ zur Produktion des Outputs y bei minimalen Kosten definiert durch

$$K(p,y) = \min_x \{k(p,x) \mid x \in \mathrm{I}(y)\}.$$

Dabei besitzt die Kosten-Frontier $K(p,y)$ folgende Eigenschaften (vgl. Coelli et al., 2005, S. 23):

1. $K(p,y) \geq 0 \; \forall p$ und $\forall y$,
2. wenn $p' \geq p$, dann gilt $K(p',y) \geq K(p,y)$,
3. wenn $y' \geq y$, dann gilt $K(p,y') \geq K(p,y)$,
4. $K(\alpha p,y) = \alpha \cdot K(p,y)$ und
5. $K(p,y)$ ist konkav in p.

Als Pendant zur hier dargestellten Kosten-Frontier, existiert ebenfalls das Konzept der Umsatz-Frontier sowie deren Aggregation in Form der Gewinn-Frontier. Da jedoch Kommunen für ihre öffentlichen Dienstleistungen nur geringe oder keine Gebühren erheben, können sie keine relevanten Umsätze verzeichnen, so dass weder das Konzept einer Umsatz- noch einer Gewinn-Frontier in dieser Arbeit Anwendung finden können. Daher wird auch deren Erläuterung in diesem Kapitel außen vor gelassen.[9] Im Folgenden werden einige Effizienzmaße eingeführt, wobei diese aus den oben erläuterten Gründen aus input-orientierter Sicht betrachtet werden.[10]

[9] Siehe Kumbhakar und Lovell (2000) oder Coelli et al. (2005) für eine Einführung in Umsatz- und Gewinn-Frontiers.

[10] Siehe Kumbhakar und Lovell (2000) oder Coelli et al. (2005) für eine Darstellung der Effizienzmaße aus output-orientierter Sicht.

2.2 Effizienzmaße

Die technische Effizienz beurteilt die Fähigkeit einer DMU bei vorgegebenem Output minimalen Input zu verwenden. Eine Input-Output-Kombination $(x,y) \in \mathrm{T}$ ist genau dann *technisch effizient im Sinne von* Koopmans (1951), wenn deren Input auf dem input-effizienten Rand liegt, d. h. $x \in I_{Eff}(y)$ (vgl. Kumbhakar und Lovell, 2000, S. 43). Eine metrische Messbarkeit des Grades der Effizienz bei dieser Definition der technischen Effizienz ist nicht vorgesehen.

Nach Debreu (1951) und Farrel (1957) hingegen ist die input-orientierte *technische Effizienz* $TE_I(x,y)$ einer Input-Output-Kombination $(x,y) \in \mathrm{T}$ wie folgt definiert (vgl. Kumbhakar und Lovell, 2000, S. 44):

$$TE_I(x,y) = \min\{\lambda \mid \lambda x \in \mathrm{I}(y)\}.$$

Diese entspricht bei vorgegebenem Output der höchstmöglichen proportionalen Kontraktion des Inputs auf die Input-Frontier $I_F(y)$ und besitzt die nachfolgend dargestellten Eigenschaften (vgl. Kumbhakar und Lovell, 2000, S. 44):

1. $TE_I(x,y) = 1 \Leftrightarrow x \in I_F(y)$ und $0 \leq TE_I(x,y) < 1 \Leftrightarrow x \in \mathrm{I}(y) \setminus I_F(y)$,
2. wenn $x' \geq x$, dann gilt $TE_I(x',y) \leq TE_I(x,y)$,
3. $TE_I(\alpha x,y) = \alpha^{-1} \cdot TE_I(x,y)$ und
4. Invarianz in Bezug auf die Einheiten in denen x und y gemessen werden.

Der Vollständigkeit halber wird darüber hinaus die output-orientierte technische Effizienz $TE_O(x,y)$ bei vorgegebenem Input dargestellt, welche ähnlich zu oben durch den Kehrwert der höchstmöglichen proportionalen Streckung des Outputs auf die Produktions-Frontier $P_F(x)$ definiert werden kann (vgl. Kumbhakar und Lovell, 2000, S. 44):

$$TE_O(x,y) = (\max\{\psi \mid \psi y \in \mathrm{P}(x)\})^{-1}.$$

Die Debreu-Farrel Definition liefert demnach ein metrisches Maß für die technische Effizienz und ist damit geeignet, verschiedene DMUs relativ einfach durch quantitative Verfahren miteinander zu vergleichen. Daher wird diese in der wissenschaftlichen Literatur vorrangig verwendet.

Die Definition der *Kosteneffizienz* einer Input-Output-Kombination $(x,y) \in \mathrm{T}$ erfolgt in der Gegenwart von Preisinformationen p über $k(p,x)$, den effektiven Kosten von x, sowie $K(p,y)$, der Kosten-Frontier von y, durch

$$KE(p,x,y) = \frac{K(p,y)}{k(p,x)}, \tag{2.1}$$

wobei $KE(p,x,y)$ folgende Eigenschaften besitzt (vgl. Kumbhakar und Lovell, 2000, S. 53):

1. $0 \leq KE(p,x,y) \leq 1$, wobei $KE(p,x,y) = 1 \;\Leftrightarrow\; x = x(p,y)$, so dass $k(p,x) = K(p,y)$,
2. für $\alpha > 0$ gilt $KE(\alpha p,x,y) = KE(p,x,y)$,
3. für $\alpha > 0$ gilt $KE(p,\alpha x,y) = \alpha^{-1} \cdot KE(p,x,y)$ und
4. für $\alpha \geq 1$ gilt $KE(p,x,\alpha y) \geq KE(p,x,y)$.

Abbildung 2.2 zeigt für den Fall zweier Inputs und eines Outputs, dass im Punkt der kosteneffizienten Input-Output-Kombination die Isokostenkurve zur Tangente an die Input-Isoquante bzw. Input-Frontier wird. Damit wird deutlich, dass es zur Erreichung einer Kosteneffizienz nicht ausreicht technisch effizient zu produzieren, sondern darüber hinaus die Wahl der richtigen Input-Output Kombination unter den technisch effizienten Punkten eine Auswirkung auf die Höhe der Kosteneffizienz besitzt (vgl. Bogetoft und Otto, 2011, S. 37).

Das Maß, welches die Auswirkung dieses Allokationsproblems beschreibt, ist die *allokative Effizienz* $AE(p,x,y)$, die wie folgt definiert ist

$$AE(p,x,y) = \frac{KE(p,x,y)}{TE_I(x,y)}$$

und die folgenden Eigenschaften besitzt (vgl. Kumbhakar und Lovell, 2000, S. 54):

1. $0 \leq AE(p,x,y) \leq 1$,
2. für $\alpha > 0$ gilt $AE(\alpha p,x,y) = AE(p,x,y)$ und
3. für $\alpha > 0$ gilt $AE(p,\alpha x,y) = AE(p,x,y)$.

Die Beziehung der drei Effizienzmaße kann auch grafisch anhand von Abbildung 2.2 durch den Abstand der Punkte $\tilde{x}$, x' und x^* zum Nullpunkt wie folgt veranschaulicht werden (vgl. Bogetoft und Otto, 2011, S. 37)

$$TE_I(\tilde{x},y) = \frac{\|\tilde{x}\|}{\|x'\|}, \quad AE(p,\tilde{x},y) = \frac{\|x'\|}{\|x^*\|} \quad \text{und} \quad KE(p,\tilde{x},y) = \frac{\|\tilde{x}\|}{\|x^*\|}.$$

Sind also für die zu beurteilenden DMUs Informationen zu den tatsächlichen Input-Output-Kombinationen und den Input-Preisen vorhanden, so lässt sich die Kosteneffizienz in ihre Bestandteile technische und allokative Effizienz aufteilen. Sind dagegen nur die effektiven Kosten der DMUs ohne Kenntnis von Mengen bzw. Preisen bekannt, dann ist die Aufteilung in technische und allokative Effizienz nicht zu erreichen, sondern allein die Kosteneffizienz zu bestimmen,

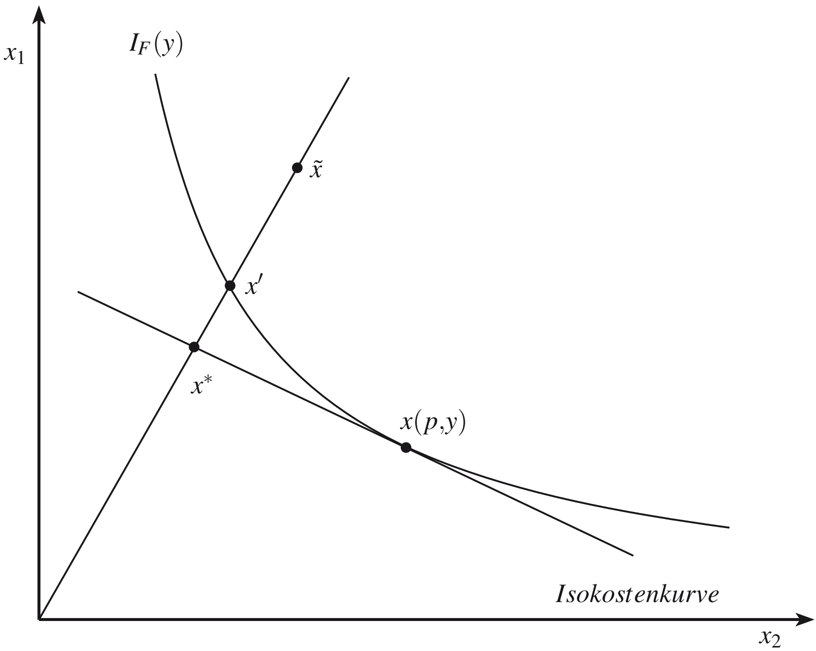

Abb. 2.2: Anschauung der Effizienzmaße (Quelle: Eigene Darstellung nach Bogetoft und Otto (2011, S. 36)

wenn gleichzeitig angenommen werden kann, dass alle DMUs den gleichen Input-Preisen ausgesetzt sind.

Da die Kosteneffizienz das Produkt der technischen und allokativen Effizienz darstellt, gilt die Äquivalenz (vgl. Kumbhakar und Lovell, 2000, S. 54)

$$KE(p,x,y) = 1 \Leftrightarrow TE_I(p,x) = AE(p,x,y) = 1.$$

Daher ist die alleinige Kenntnis der Kosteneffizienz relevanter als die alleinige Kenntnis der technischen oder allokativen Effizienz, so dass die Kosteneffizienz aus input-orientierter Sicht einen ganzheitlicheren Blick auf die Effizienz einer DMU ermöglicht.

http://www.springer.com/978-3-658-01500-8

Kosteneffizienzen und Einsparungspotenziale durch Fusionen
Eine Anwendung auf die Kommunal- und Verwaltungsreform in Rheinland-Pfalz
Dorfard, A.
2014, XXVIII, 264 S. 73 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-01500-8