

Lektion 2

Doppelintegrale

2.1 Doppelintegrale über einem Normalbereich

Wir wollen das Integral für eine reellwertige, stetige Funktion mit zwei reellen Veränderlichen x, y einführen. Motiviert wird dies durch folgendes Beispiel:

Auf dem Rechteck $\mathcal{R} := [a, b] \times [c, d]$ in der x, y -Ebene sei die Funktion $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, dort stetig und nicht negativ. Gesucht ist das Volumen V des „Zylinders“ über dem Rechteck $\mathcal{R}$, das von dem Deckel $z = f(x, y)$ nach oben berandet ist, siehe Abbildung 2.1. Dieses Volumen ist gegeben durch das sogenannte Doppelintegral

$$V := \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) \, dx \, dy$$

mit dem Integrationsbereich $\mathcal{R}$. Wir führen nun das Doppelintegral für den allgemeineren Fall ein, dass das Rechteck $\mathcal{R}$ durch einen sogenannten Normalbereich G bezüglich einer der Koordinatenachsen x bzw. y ersetzt wird, und verzichten dabei noch auf die Bedingung $f \geq 0$.

Definition 2.1: Normalbereiche im $\mathbb{R}^2$

1. Gegeben sind ein Intervall $[a, b]$ mit $a \leq b$ sowie zwei stetige Funktionen $g_-, g_+ : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g_-(x) \leq g_+(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann heißt die kompakte Menge

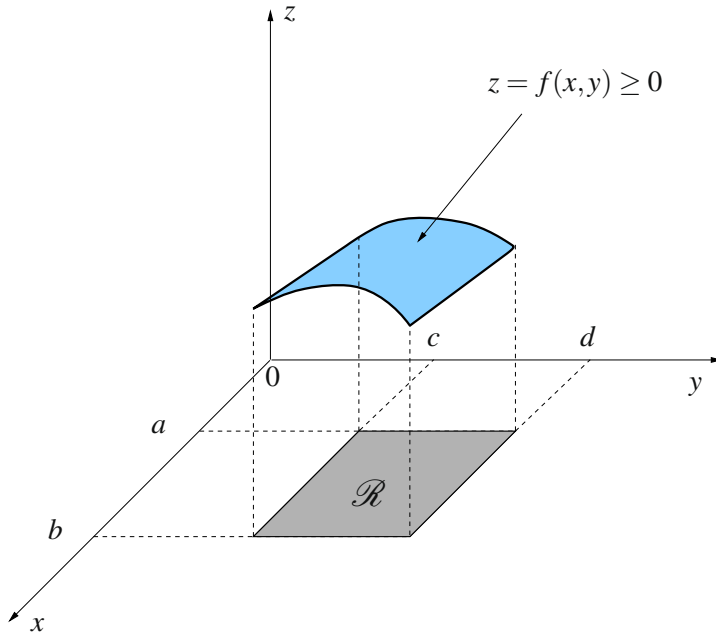
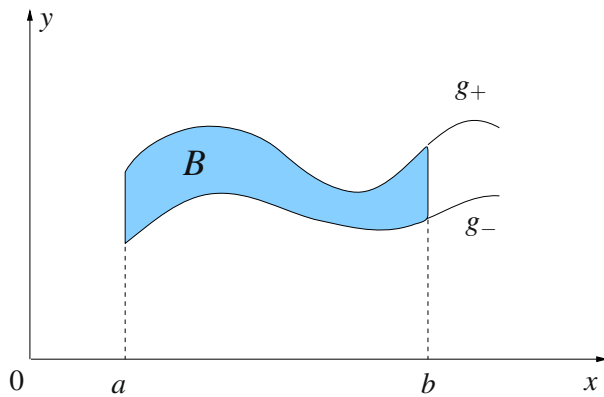
$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \, g_-(x) \leq y \leq g_+(x)\}$$

ein Normalbereich bezüglich der x -Achse, siehe Abbildung 2.2.

2. Sind neben $c \leq d$ auch zwei stetige Funktionen $h_-, h_+ : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h_-(y) \leq h_+(y)$ für alle $y \in [c, d]$ gegeben, so heißt die kompakte Menge

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \, h_-(y) \leq x \leq h_+(y)\}$$

ein Normalbereich bezüglich der y -Achse, siehe Abbildung 2.3. □

Abbildung 2.1: „Zylinder“ über dem Rechteck $\mathcal{R}$ Abbildung 2.2: Normalbereich bezüglich der x -Achse

Wir definieren nun das Doppelintegral einer stetigen Funktion über einem Normalbereich als Schachtelung zweier eindimensionaler Riemann-Integrale. Dies hat den Vorteil, dass man hiermit sofort eine Fülle von Doppelintegralen auf eine sehr einfache Art berechnen kann:

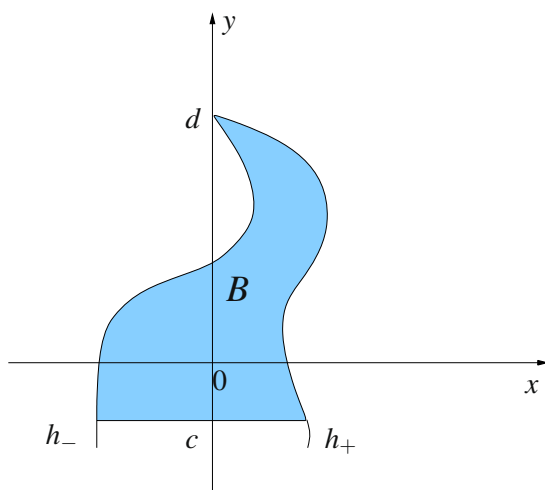


Abbildung 2.3: Normalbereich bezüglich der y-Achse

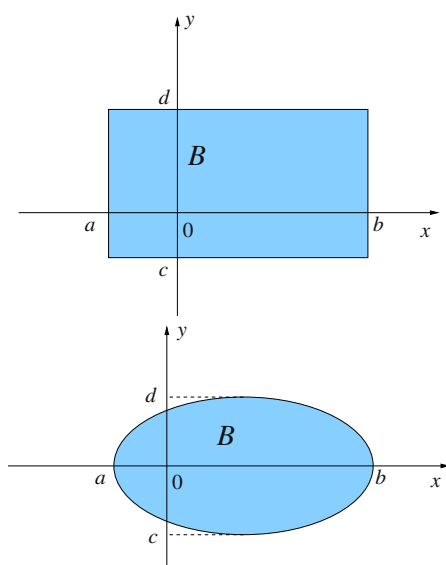


Abbildung 2.4: Normalbereiche bezüglich beider Achsen

Definition 2.2: Doppelintegral über einem Normalbereich

Es sei $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Normalbereich B stetig. Wir definieren das Doppelintegral von f über B

- (a) im Falle, dass B ein Normalbereich bezüglich der x -Achse ist, gemäß

$$\iint_B f(x, y) \, dy \, dx := \int_a^b \left(\int_{g_-(x)}^{g_+(x)} f(x, y) \, dy \right) dx,$$

(b) und im Falle, dass B ein Normalbereich bezüglich der y -Achse ist, gemäß

$$\iint_B f(x, y) \, dx \, dy := \int_c^d \left(\int_{h_-(y)}^{h_+(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

□

Bei dieser Definition haben wir das Doppelintegral über einem Normalbereich bezüglich der x -Achse bzw. der y -Achse klar voneinander unterschieden, indem wir im ersten Falle $\iint_B f(x, y) \, dy \, dx$ und im zweiten Falle $\iint_B f(x, y) \, dx \, dy$ schreiben. Man achte also hierbei auf die Reihenfolge der Integrationsvariablen. Der folgende wichtige Satz zeigt nun, dass beide Integrale übereinstimmen, wenn B ein Normalbereich bezüglich beider Achsen ist, siehe das achsenparallele Rechteck und die Ellipse in Abbildung 2.4 als Beispiele.

Satz 2.3: Satz von Fubini für Doppelintegrale

Es sei

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \, g_-(x) \leq y \leq g_+(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \, h_-(y) \leq x \leq h_+(y)\} \end{aligned}$$

ein Normalbereich bezüglich beider Achsen und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann gilt

$$\int_a^b \left(\int_{g_-(x)}^{g_+(x)} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{h_-(y)}^{h_+(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

□

Dieser Satz lässt sich mit mäßigem Aufwand schon im Rahmen der Theorie des Riemann-Integrals beweisen, man benötigt hierzu im Wesentlichen die Aussage, dass jede stetige Funktion auf einem Kompaktum bereits gleichmäßig stetig ist. Er wird jedoch in der Regel in viel allgemeinerer Form direkt im Rahmen der Lebesgueschen Integrationstheorie bewiesen, siehe Lektion 4.

Bemerkungen zum Doppelintegral:

- (1) Das Doppelintegral ist in jedem Falle wohldefiniert: Ist z.B. B ein Normalbereich bezüglich der x -Achse, so ist $f(x, y)$ bei festgehaltenem $x \in [a, b]$ ein in y

stetiger Ausdruck, so dass das innere Integral bereits im Riemannschen Sinne existiert. Das innere Integral ist seinerseits ein in x stetiger Ausdruck, so dass auch das äußere Integral gebildet werden kann. Die Klammern um das innere Integral pflegt man auch ohne Gefahr fortzulassen.

- (2) Aufgrund des Fubinischen Satzes schreiben wir im Folgenden auch dann ohne Verwechslungsgefahr das Doppelintegral in der Form $\iint_B f(x,y) dx dy$, wenn B

kein Normalbereich bezüglich der x -Achse ist.

- (3) Der Satz von Fubini für Doppelintegrale lässt sich noch ohne die Lebesguesche Integrationstheorie mit moderatem Aufwand beweisen. Hierbei wird entscheidend von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass stetige Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich bereits gleichmäßig stetig sind. Ebenfalls im Rahmen der Riemannschen Integrationstheorie erhält man die endliche Gebietsadditivität für Doppelintegrale, worunter folgendes zu verstehen ist: Wird ein Normalbereich B irgendwie so in Normalbereiche $B_1, \dots, B_n$ zerlegt, dass $B = \bigcup_{k=1}^n B_k$ gilt und sich die Normalbereiche B_k nur in ihren Randpunkten schneiden, so gilt

$$\iint_B f(x,y) dx dy = \sum_{k=1}^n \iint_{B_k} f(x,y) dx dy.$$

Dies ist das Analogon zur bekannten Intervalladditivität für Einfachintegrale. Die Additivität unter möglichst allgemeinen, auch abzählbar unendlichen Gebietszerlegungen sowie die anderen grundlegenden Sätze der Integrationstheorie im $\mathbb{R}^n$ lassen sich allerdings erst im Rahmen der Lebesgueschen Theorie meistern, siehe Lektion 4.

- (4) Der Jordaninhalt $|B|$, auch Flächeninhalt oder kurz Inhalt eines Normalbereiches B , ist gegeben durch das spezielle Doppelintegral

$$|B| := \iint_B 1 dx dy.$$

Ist B ein Normalbereich bezüglich der x -Achse, so wird

$$|B| = \int_a^b (g_+(x) - g_-(x)) dx.$$

- (5) Für $f \geq 0$ ist $\iint_B f(x,y) dy dx$ bzw. $\iint_B f(x,y) dx dy$ das Volumen eines Zylinders im $\mathbb{R}^3$ über der Grundfläche B mit oberem Deckel $z = f(x,y)$. □

Die Definition von Gebieten im $\mathbb{R}^n$ werden wir im Folgenden oft verwenden.

Definition 2.4: Gebiete im $\mathbb{R}^n$

Eine nichtleere offene Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ wird *Gebiet* genannt, wenn sich M nicht als Vereinigung zweier disjunkter, offener und nichtleerer Teilmengen darstellen lässt. Dies ist die topologische Zusammenhangseigenschaft einer offenen Menge des $\mathbb{R}^n$. $\square$

Im Folgenden bedeutet $|\underline{z}|$ die Euklidische Norm eines Vektors $\underline{z} \in \mathbb{R}^n$.

2.2 Aufgaben**Aufgabe 2.1: Gebiete im $\mathbb{R}^2$**

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ eine nichtleere offene Menge. Man zeige:

G ist genau dann ein Gebiet gemäß Definition 2.4, wenn es zu je zwei Punkten $\underline{z}_0$ und $\underline{z}$ aus G stets einen *achsenparallelen Polygonzug* gibt, der $\underline{z}_0$ mit $\underline{z}$ verbindet und ganz in G liegt, siehe Abbildung 2.5.

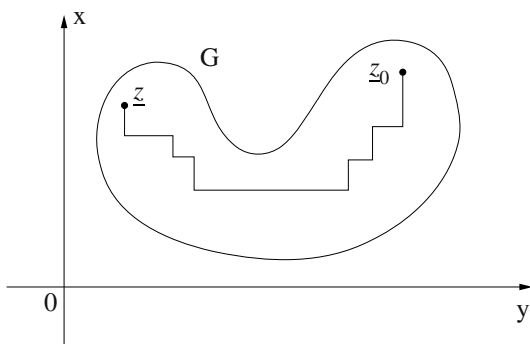


Abbildung 2.5: Achsenparalleler Polygonzug von $\underline{z}_0$ nach $\underline{z}$ in G

Lösung:

Wir definieren die folgende Relation R_G zwischen zwei Punkten $\underline{z}_0, \underline{z} \in G$:

Es soll $\underline{z}_0 R_G \underline{z}$ genau dann gelten, wenn es einen achsenparallelen Polygonzug gibt, der $\underline{z}_0$ mit $\underline{z}$ verbindet und ganz in G liegt. Wir zeigen zunächst, dass R_G eine Äquivalenzrelation ist:

(i) R_G ist reflexiv: Es sei $\underline{z}_0 \in G$, $B_r(\underline{z}_0) := \{\underline{z} \in \mathbb{R}^2 : |\underline{z} - \underline{z}_0| < r\}$ und $r > 0$ so klein, dass $B_r(\underline{z}_0) \subseteq G$ gilt. Wähle einen geschlossenen Polygonzug von $\underline{z}_0$ nach $\underline{z}_0$ gemäß Abbildung 2.6. Wir haben dann $\underline{z}_0 R_G \underline{z}_0$ für alle $\underline{z}_0 \in G$.

(ii) Offensichtlich ist R_G symmetrisch.

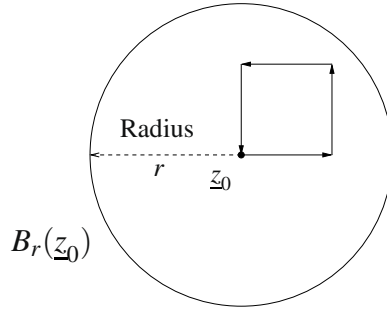


Abbildung 2.6: Geschlossener Polygonzug von $\underline{z}_0$ nach $\underline{z}_0$ in der offenen Kugel $B_r(\underline{z}_0)$

(iii) R_G ist transitiv, da die Zusammensetzung zweier achsenparalleler Polygonzüge von $\underline{z}_0$ nach $\underline{z}_1$ und $\underline{z}_1$ nach $\underline{z}_2$ in G wieder einen solchen Polygonzug liefert. Dies ist in Abbildung 2.7 illustriert.

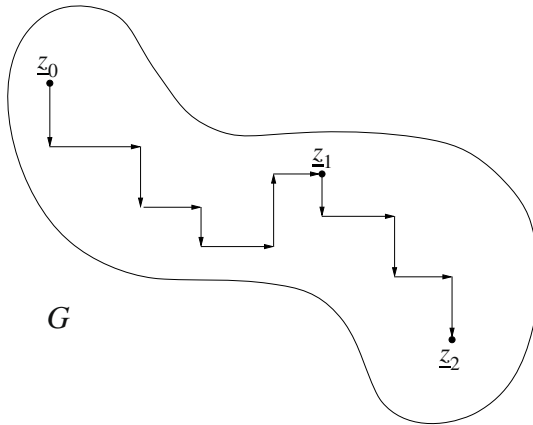


Abbildung 2.7: Zusammengesetzter Polygonzug von $\underline{z}_0$ nach $\underline{z}_1$ und von $\underline{z}_1$ nach $\underline{z}_2$

Somit zerfällt G in disjunkte Äquivalenzklassen. Wir zeigen nun, dass diese Äquivalenzklassen sogar Gebiete sind, d.h. sie sind offen und zusammenhängend gemäß Definition 2.4. Es sei $K \subseteq G$ solch eine Äquivalenzklasse mit einem Repräsentanten $\underline{z}_0 \in K$. Da G offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $B_r(\underline{z}_0) = \{\underline{z} \in \mathbb{R}^2 : |\underline{z} - \underline{z}_0| < r\} \subseteq G$ und zu jedem $\underline{z} \in B_r(\underline{z}_0)$ einen achsenparallelen Polygonzug von $\underline{z}_0$ nach $\underline{z}$ in dieser Kugel, siehe Abbildung 2.8. Somit gilt $B_r(\underline{z}_0) \subseteq K$, und K ist offen. Wäre K nicht zusammenhängend, so hätten wir offene, disjunkte und nichtleere Mengen $U, V \subseteq \mathbb{C}$ mit $\underline{z}_0 \in U$, $\underline{z} \in V$ und $U \cup V = K$, sowie nach der Definition von K

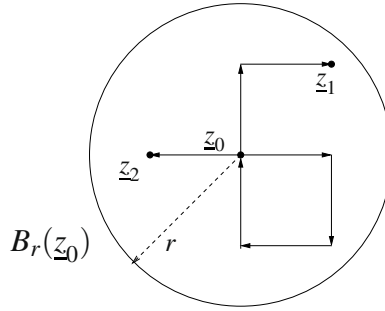


Abbildung 2.8: Polygonzug von $\underline{z}_0$ nach $\underline{z}_0$ bzw. nach $\underline{z}_1$ und $\underline{z}_2$ in der offenen Kugel $B_r(\underline{z}_0)$

einen achsenparallelen Polygonzug $\gamma: [a, b] \rightarrow K$ mit $\gamma(a) = \underline{z}_0$ und $\gamma(b) = \underline{z}$. Für $t_* := \inf\{t \in [a, b] : \gamma(t) \in V\}$ ist $a < t_* < b$, denn γ ist stetig und V offen. Da U offen ist, gilt $\gamma(t_*) \notin \bar{U}$. Folglich ist $\gamma(t_*) \in V$ und somit auch $\gamma(t_* - \varepsilon) \in V$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, da V offen ist. Dies steht im Widerspruch zur Definition von t_* . Also ist K zusammenhängend, und G genau dann ein Gebiet, wenn es nur eine einzige Äquivalenzklasse gibt.

Bemerkung: Das Ergebnis dieser Aufgabe läßt sich analog für höhere Dimensionen zeigen. Da man die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ mit dem $\mathbb{R}^2$ identifizieren kann, wird diese Charakterisierung des Gebietszusammenhangs insbesondere in der Funktionentheorie verwendet. $\square$

Aufgabe 2.2: Konstante Funktionen auf Gebieten

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $u: G \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion mit verschwindenden partiellen Ableitungen $u_x = u_y = 0$. Man zeige, dass u konstant ist.

Hinweis: Man verwende das Ergebnis der Aufgabe 2.1.

Lösung: Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $u: G \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion mit $u_x = u_y = 0$. Die achsenparallelen Strecken S_1 von $(x_0, y_0) \in G$ nach $(x_0 + h_x, y_0) \in G$ sowie S_2 von $(x_0, y_0) \in G$ nach $(x_0, y_0 + h_y) \in G$ mit $h_x, h_y > 0$ mögen ganz in G liegen. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung für geeignet gewählte Zahlen $0 < \xi_1 < h_x$ und $0 < \xi_2 < h_y$:

$$\begin{aligned} u(x_0 + h_x, y_0) &= u(x_0, y_0) + h_x \cdot u_x(x_0 + \xi_1, y_0) = u(x_0, y_0), \\ u(x_0, y_0 + h_y) &= u(x_0, y_0) + h_y \cdot u_y(x_0, y_0 + \xi_2) = u(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Folglich ist u auf S_1 und S_2 konstant, und somit ist u auch auf allen achsenparallelen Polygonzügen in G konstant. Da G ein Gebiet ist, muß u nach Aufgabe 2.1 konstant sein.

Aufgabe 2.3: Doppelintegrale

Man berechne die folgenden Doppelintegrale im $\mathbb{R}^2$, wobei zuerst die jeweiligen Normalbereiche B zu bestimmen und zu skizzieren sind:

- (a) $\iint_B \frac{x^2}{y^2} dx dy$, wobei B durch $x = 2$, $y = x$ und $xy = 1$ begrenzt wird,
 (b) $\iint_B \sin(x+y) dx dy$, wobei B durch $x = 0$, $y = \pi$ und $y = x$ begrenzt wird.

Lösung: (a) Der in Abbildung 2.9 skizzierte Normalbereich bzgl. der x -Achse ist

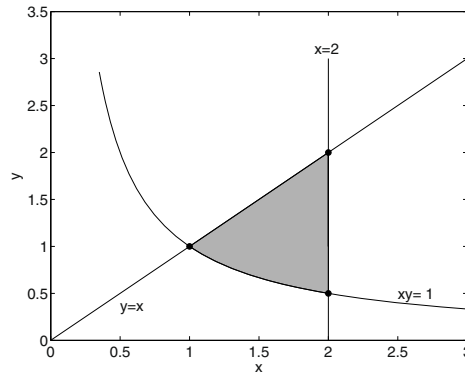


Abbildung 2.9: Der Normalbereich B aus Teilaufgabe 2.3(a)

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x \right\}.$$

Für das Integral ergibt sich

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{x^2}{y^2} dx dy &= \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy \right) dx = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y} \right]_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} dx \\ &= \int_1^2 (x^3 - x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 = (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

(b) Der in Abbildung 2.10 skizzierte Normalbereich bzgl. der x -Achse ist

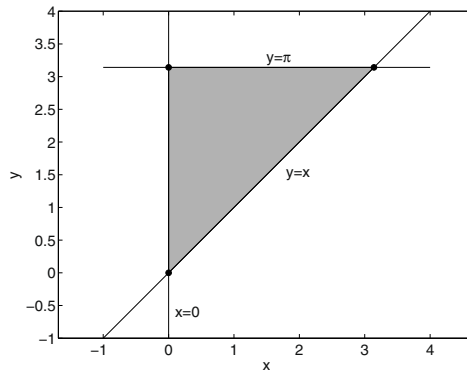


Abbildung 2.10: Der Normalbereich B aus Teilaufgabe 2.3(b).

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, \ x \leq y \leq \pi\}.$$

Für das Integral ergibt sich

$$\begin{aligned} \iint_B \sin(x+y) \, dx \, dy &= \int_0^\pi \left(\int_x^\pi \sin(x+y) \, dy \right) dx = \int_0^\pi [-\cos(x+y)]_{y=x}^{y=\pi} dx \\ &= \int_0^\pi (-\cos(x+\pi) + \cos(2x)) \, dx \\ &= \int_0^\pi (\cos(x) + \cos(2x)) \, dx = \left[\sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.4: Gewichtsmittelpunkt eines ebenen Gebietes

Die Schwerpunktkoordinaten $S = (x_s, y_s)$ eines ebenen Gebietes G bestimmt man über

$$x_s = \frac{1}{|G|} \iint_G x \, dx \, dy, \quad y_s = \frac{1}{|G|} \iint_G y \, dx \, dy,$$

wenn $|G|$ der Flächeninhalt von G ist. Man bestimme den Schwerpunkt des Flächenstückes, das durch die Gerade $y = x$ und die Parabel $y = 4x - x^2$ begrenzt wird. Ist G ein Normalbereich bzgl. beider Achsen?

Lösung:

G ist ein Normalbereich bzgl. der x -Achse,

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, \ x \leq y \leq 4x - x^2\}.$$

G ist *auch* ein Normalbereich bzgl. der y -Achse,

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4, \ h_-(y) \leq x \leq h_+(y)\},$$

mit $h_-, h_+ : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $h_-(y) = 2 - \sqrt{4 - y}$ und

$$h_+(y) = \begin{cases} y & \text{für } 0 \leq y \leq 3, \\ 2 + \sqrt{4 - y} & \text{für } 3 < y \leq 4. \end{cases}$$

Die Funktionen $h_{\pm}$ sind stetig. Somit ist G ein Normalbereich bzgl. beider Achsen,

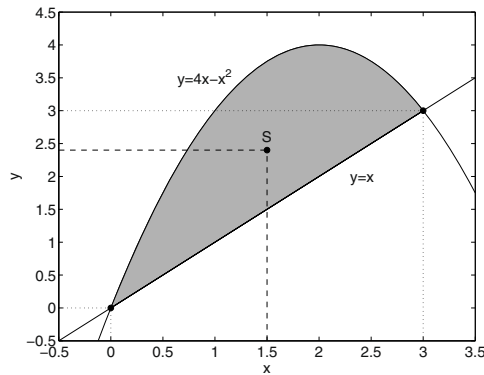


Abbildung 2.11: Der Normalbereich ist begrenzt durch die Gerade $y = x$ und die Parabel $y = 4x - x^2$.

siehe Abbildung 2.11. Die Integralberechnung mit G als Normalbereich bzgl. der y -Achse ist in unserem Beispiel komplizierter. Der Flächeninhalt von G bestimmt sich aus

$$\begin{aligned} |G| &= \iint_G dx dy = \int_0^3 \left(\int_x^{4x-x^2} 1 dy \right) dx \\ &= \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 \\ &= \frac{3}{2} \cdot 3^2 - \frac{1}{3} \cdot 3^3 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Die Koordinaten des Gewichtsmittelpunktes ergeben sich aus den Integralmitteln:

$$\begin{aligned}
 x_s &= \frac{1}{|G|} \iint_G x \, dx \, dy = \frac{2}{9} \int_0^3 \left(\int_x^{4x-x^2} x \, dy \right) dx = \frac{2}{9} \int_0^3 x(3x-x^2) \, dx \\
 &= \frac{2}{9} \int_0^3 (3x^2 - x^3) \, dx = \frac{2}{9} \left[x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^3 \\
 &= \frac{2}{9} \left(27 - \frac{81}{4} \right) = \frac{3}{2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_s &= \frac{1}{|G|} \iint_G y \, dx \, dy = \frac{2}{9} \int_0^3 \left(\int_x^{4x-x^2} y \, dy \right) dx = \frac{1}{9} \int_0^3 [y^2]_{y=x}^{y=4x-x^2} dx \\
 &= \frac{1}{9} \int_0^3 ((4x-x^2)^2 - x^2) \, dx \\
 &= \frac{1}{9} \int_0^3 (x^4 - 8x^3 + 15x^2) \, dx \\
 &= \frac{1}{9} \left(\frac{1}{5} \cdot 3^5 - 2 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^3 \right) = \frac{12}{5}.
 \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt von G ist $(x_s, y_s) = \left(\frac{3}{2}, \frac{12}{5} \right)$.

Höhere Analysis durch Anwendungen lernen
Für Studierende der Mathematik, Physik und
Ingenieurwissenschaften

Kunik, M.; Skrzypacz, P.

2014, X, 397 S. 93 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-02265-5