

2 Modellierung des Kreditrisikos und Arbitrage Theorie

Im Mittelpunkt dieses Kapitels stehen die mathematischen Konzepte, die zur Modellierung der in Kapitel 1 beschriebenen Märkte und Produkte eingesetzt werden. Der grundlegende Rahmen, in dem wir uns hier bewegen, ist das **arbitragefreie Marktmodell**, welches in der modernen Finanzmathematik seit den fundamentalen Arbeiten [155, 156, 157] von HARRISON & KREPS (1979) und von HARRISON & PLISKA (1981/1983) die theoretische Basis für die Bewertung aller Arten von Finanzinstrumenten, insbesondere Derivaten, bildet. Bereits im Jahr 1973 verwendeten F. BLACK und M. SCHOLES in ihrer epochalen Arbeit [41] die Idee der Arbitragefreiheit zur Herleitung von analytischen Optionspreismformeln. Wir werden im ersten Abschnitt das **Black-Scholes-Modell** vorstellen als Grundlage für die dann folgenden weitergehenden Überlegungen. Das allgemeine arbitragefreie Marktmodell führen wir im zweiten Abschnitt ein, allerdings ohne alle Einzelheiten zu beweisen, um den Umfang unserer Darstellung nicht zu sprengen. Es liefert eine universelle Bewertungsformel für kreditrisikobehaftete Produkte, bei der die konkrete stochastische Modellierung des Ausfallzeitpunktes noch nicht näher spezifiziert wird. Letzteres erfolgt im dritten Abschnitt dieses Kapitels und führt dann zu den weit verbreiteten Modellklassen der sog. **Unternehmenswertmodelle** sowie der **Hazardraten- bzw. Intensitätsmodelle**.

2.1 Diskontierung: Zerobonds und Forwards vor und nach der Krise

In diesem Kapitel verwenden wir zur Diskontierung künftiger Zahlungen zunächst die klassische Vorgehensweise, die bis zum Ausbruch der Finanzkrise gängige Praxis war (Pre-Crisis-Basis): Es gibt eine (einzige!) Basis-Zinskurve pro Währung. Aus dieser lassen sich dann die Forward-Rates ableiten, die auch als Basis für die Bewertung von Forward Rate Agreements (FRA's) galten. Um den Unterschied zur Bildung von Diskontkurven nach Ausbruch der Finanzkrise zu verdeutlichen, gehen wir in den beiden folgenden Unterabschnitten kurz auf die Thematik ein.

2.1.1 Diskontierung und Zinskurven vor der Krise

Die klassische Bewertung von zinsabhängigen Finanzinstrumenten basierte bis zur Finanzmarktkrise 2007/08 auf der auch für praktische Belange akzeptablen (approximativen) Identität der zum Diskontieren verwendeten risikoneutralen Zinsstrukturkurve mit der zur Ermittlung der Cashflows herangezogenen Forward-Kurve für die Forward- bzw. Forward-Swap-Raten.

So wurden bspw. in der „klassischen Anwendung“ der Bewertungstheorie (vor der Krise)

- Swapsätze für Swaps selber Restlaufzeit aber unterschiedlicher Zinsperioden (z.B. vierteljährliche vs. halbjährliche variable Zinszahlungen) als näherungsweise identisch angenommen,
- FRA-Sätze als bis auf wenige Basispunkte identisch mit Forward-Raten angesehen
- sowie die ebenso LIBOR/EURIBOR-basierten Deposit-Zinssätze und OIS-Raten für dieselbe Halteperiode einer Anlage als approximativ gleich unterstellt.

Bei einer OIS-Rate handelt es sich um die feste Seite eines Swaps, bei dem ein durchschnittlicher realisierter Tagesgeldsatz am Ende der Swaplaufzeit gegen einen vorab definierten Festzinssatz getauscht wird (jeweils bezogen auf einen Nominalbetrag, welcher nicht getauscht wird).

In der Tat sind die Differenzen zwischen den beobachteten Größen, die auch jeweils als **Basis** bezeichnet werden, sehr lange Zeit im Wesentlichen vernachlässigbar und in der Größenordnung nur sehr weniger Basispunkte, sodass auch wirtschaftlich kaum eine Notwendigkeit der Modellierung gesehen wird. Dass es sich hierbei um eine *Modellierung* bzw. *Approximation* an die Realität handelte, die durchaus eine (wenn auch gemeinhin als gering angesehene) wirtschaftliche Relevanz besaß, zeigte bereits die Arbeit [305] von 2003.

2.1.2 Auswirkungen der Finanzkrise auf die Diskontierung

Die im vorangehenden Unterabschnitt kurz geschilderte Situation in Bezug auf die vereinfachenden Annahmen bei der Diskontkurvenberechnung veränderte sich mit Beginn der Finanzkrise im August 2007 ebenso schlagartig wie fundamental, wie über die gesamte Industrie hin zu beobachtende Verluste deutlich dokumentieren.

Wir folgen in unserer Darstellung der Entwicklung der Grundlagen der Bewertung nach der Krise zunächst in weiten Teilen den später aufgeführten Ausarbeitungen von MORINI, BIANCHETTI und MERCURIO, welche vor allem folgende im

Widerspruch zur klassischen Herangehensweise stehenden Beobachtungen seit Beginn der Finanzkrise anführen:

- Eine zunehmende Divergenz zwischen LIBOR- bzw. EURIBOR- basierten und OIS-/EONIA-basierten Zinssätzen,
- eine deutliche und nicht-statische Basis zwischen FRA- und den zugehörigen Forward-Raten sowie
- eine wahre „Explosion“ der Basis zwischen Swaps unterschiedlicher variabler Zinszahlungsperioden.

Die seit August 2007 evidente massive Abkopplung der alten „arbitrage-freien Einkurven-Welt“ von der Realität der Märkte lässt sich eingängig an einem einfachen Zahlenbeispiel aus dem Vergleich von FRA- und Forward-Raten verdeutlichen, welches MERCURIO (2009) [233] entlehnt ist:

BEISPIEL 2.1 Die Schlusskurse für 3-Monats-Deposits und 6-Monats-Deposits vom 12.11.2008 beliefen sich auf 4.286% bzw. 4.345%, wobei wir der Einfachheit halber eine 30/360 daycount convention unterstellen.

Bezeichnen wir mit $F(0,3m,6m)$ die zugehörige implizite Forward-Rate, so folgt aus der Bedingung

$$\left(1 + \frac{1}{4} \cdot r_0(3m)\right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot F(0,3m,6m)\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{2} \cdot r_0(6m)\right)^{-1}$$

die klassische Forward-Rate

$$\begin{aligned} F(0,3m,6m) &= 4 \cdot \left(\frac{1 + \frac{1}{2} \cdot r_0(6m)}{1 + \frac{1}{4} \cdot r_0(3m)} - 1 \right) = 4 \cdot \left(\frac{1 + \frac{1}{2} \cdot 4.345\%}{1 + \frac{1}{4} \cdot 4.286\%} - 1 \right) \\ &= 4.357\%. \end{aligned}$$

Der am 12.11.2008 am Markt quotierte FRA-Satz betrug 2.85% für die entsprechende Periode, also mehr als 150bp unter der Forward-Rate.

Nach der klassischen Bewertungstheorie würde die im Beispiel geschilderte Situation unmittelbar die Möglichkeit der Arbitrage garantieren. Berücksichtigt man jedoch auch Aspekte des Kontrahentenrisikos sowie des Liquiditätsrisikos, also bspw. die Fragen,

- ob die Gegenpartei bis zum Ende der sechsmonatigen Laufzeit überhaupt das geliehene Geld zurückzahlen kann und wird, bzw.
- ob die eigene sowie die Marktliquidität ausreicht, sich heute bzw. in 3 Monaten mit den entsprechenden Zinsinstrumenten zu den angenommenen Preisen einzudecken,

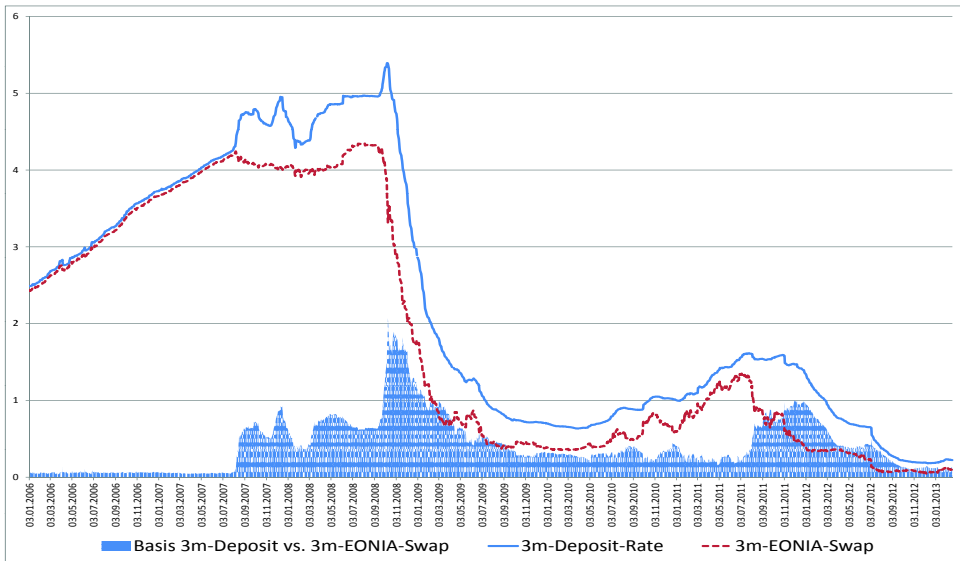


Abbildung 2.1 Vergleich von EONIA und Deposit-Rates.

sowie zusätzlich die weiter gestiegenen regulatorischen Anforderungen, so wird nachvollziehbar, warum mit Entfaltung der Finanzkrise die zuvor geltende Annahme der kredit- und liquiditätsrisikolosen Bewertung von Finanzinstrumenten nicht mehr anwendbar blieb und daher diese Situation auch keine Arbitragemöglichkeiten am Markt ermöglicht.

Die Situation aus dem Beispiel führt also unter Berücksichtigung dieser beiden Aspekte *nicht* mehr zu Arbitrage, was aber im Gegenzug auch bedeutet, dass die klassische Bewertungstheorie ihre Gültigkeit verloren hat! Abbildung 2.1 zeigt die zeitliche Entwicklung der EONIA 3m-Swap- und der 3m-Deposit-Tagesschlusskurse sowie der Differenz, also des **Basis-Spreads**, zwischen beiden Raten.

Während bis zum August 2007 in der Tat von einem approximativen Gleichklang bis auf eine kleine Basis zwischen EONIA- und Deposit-Rate zu sprechen ist, der nur geringe Diskrepanzen zwischen beiden Raten und der daraus resultierenden P&L zur Folge hatte, zeigt sich auch hier das im Rechenbeispiel zu beobachtende Entkoppeln zwischen den beiden Zinsraten, die sich u.a. damit erklären lässt, dass das Kredit- und Liquiditätsrisiko einer Übernachtenanlage (zur EONIA/OIS-Rate) im Vergleich zu einer Dreimonatsanlage wesentlich geringer (aber immer noch vorhanden (!)) ist.

Entsprechende Effekte zeigen sich auf der Abbildung 2.2 für den USD OIS-Swap gegenüber dem BBA 3m-USD-LIBOR.

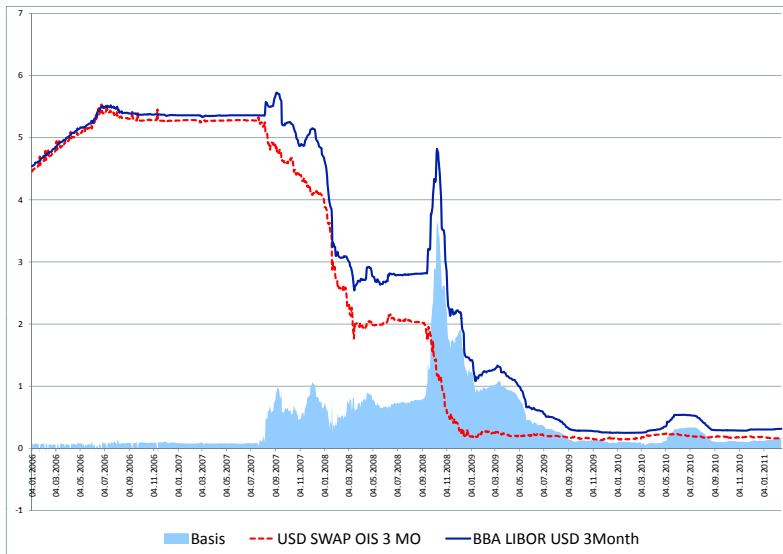


Abbildung 2.2 Vergleich von BBA 3m-USD-LIBOR und USD OIS 3m.

Da ein Swap als ein Portfolio von FRAs aufgefasst werden kann, ergaben sich auch bei der Bewertung von Plain-Vanilla-Swaps somit unmittelbare Konsequenzen, die sich in Form von Ausweitungen des Basis-Spreads zwischen Swaps einer festen Restlaufzeit (Maturity) aber unterschiedlicher Perioden der variablen Zinszahlungen manifestieren.

Die historische Entwicklung des Basis-Spreads zwischen Swaps mit jeweils n -jähriger Laufzeit und viertel- bzw. halbjährlicher variabler Ausgleichszahlung ist in Abbildung 2.3 dargestellt (für EUR-Zinsswaps mit verschiedenen Laufzeiten).

Auch hier ist deutlich das extreme Ansteigen der Basis in Niveau wie Volatilität seit der Finanzkrise zu beobachten, die eine klassische Bewertung von Swaps selber Restlaufzeit aber unterschiedlicher variabler Zinsperioden als nicht mehr marktkonform demaskiert.

2.1.3 Konsequenzen für die Bewertung von Finanzinstrumenten

Aus den oben genannten Gründen gehen die Finanzinstitute zum Teil auch wegen Anforderungen aus der Rechnungslegung (vgl. FASB (2013) [123]) dazu über, mit einer *separaten* Diskontierungs- und einer Bewertungszinskurve zu arbeiten. Dabei ist die Diskontierungszinskurve angemessen zu wählen, abhängig davon, welchen Hintergrund das jeweilige Geschäft hat (eigene Bonität und die des Kontrahenten, Marktliquidität, Liquiditätsgesichtspunkte).

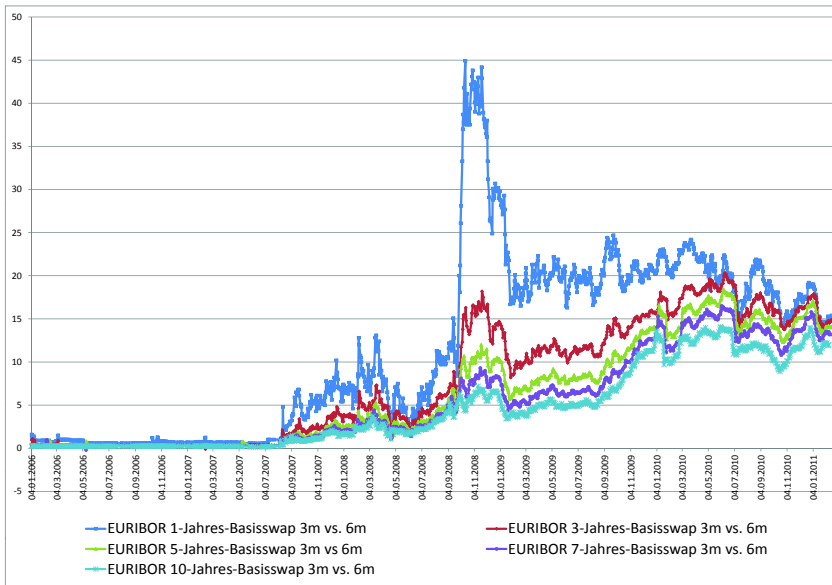


Abbildung 2.3 Vergleich von Swap-Raten bei Swaps mit unterschiedlichen variablen Zinszahlungen.

BEISPIEL 2.2 Berücksichtigen wir wie MORINI (2009) zu Erklärungszwecken vereinfacht zunächst nur das Kontrahentenrisiko als Ausgangspunkt für die beobachteten Diskrepanzen, so lässt sich mithilfe der nun als kreditrisikobehaftet anzusehenden Diskontfaktoren (vgl. BEISPIEL 1.1; defaultable zero bond)

$$P^{def}(t, T) = P(t, T) \cdot [R \cdot (1 - p_D) + p_D] = P(t, T) \cdot (R + (1 - p_D)(1 - R))$$

auch eine kreditrisikobehaftete FRA-Rate für die in BEISPIEL 2.1 beschriebene Situation zu

$$\begin{aligned} F^{def}(t, S, T) &= \frac{1}{T - S} \cdot \left(\frac{P^{def}(t, S)}{P^{def}(t, T)} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{T - S} \left(\frac{P(t, S)}{P(t, T)} \cdot \frac{1}{R + (1 - R) \cdot Q(t, T)} - 1 \right) \end{aligned}$$

ermitteln, wobei $Q(t, T) = 1 - p_D(t, T)$ die jeweilige Überlebenswahrscheinlichkeit für die Periode $[t; T]$ bezeichne. Offensichtlich enthält diese allgemeinere Formel in jedem der beiden Spezialfälle, dass also entweder der Kontrahent risikolos (also $Q(t, T) = 1$ gilt) oder das Geschäft vollbesichert ist (also $R = 100\%$ gilt), stets den risikoneutralen Spezialfall $F^d(t, S, T) = F(t, S, T)$. Ansonsten gilt $F^d(t, S, T) > F(t, S, T)$, d.h. die Bereitschaft zur Übernahme des Kreditrisikos wird wie zu erwarten durch eine höhere Rendite vergütet, genau wie im konkreten Fall des BEISPIEL 2.1 beschrieben.

Durch fortgeschrittenere Ansätze der Kreditrisikomodellierung, die wir mit diesem Kapitel beginnend entwickeln wollen, lassen sich auch Grundlagen für Bewertungsmethoden herleiten, die die Unsicherheit bzw. Stochastik der Basisrisiken angemessen abbilden können (vgl. z.B. FUJII et al. (2011) [137], MERCURIO (2009) [233] oder CRÉPEY, GRBAC & NGUYEN [98]). In [97] erklären CRÉPEY & DOUADY (2013) die Basis zwischen den LIBOR- und OIS-Zinssätzen ausgehend vom Skew der CDS Spreadkurve eines „repräsentativen“ LIBOR-Panel-Mitglieds und der Volatilität von dessen Funding Spread. Exemplarisch sei hier nur der Fall einer **Mehrkurvenbewertung** (sog. *(post crisis) multi curve pricing approach*) eines Plain-Vanilla-Swaps skizziert, wie sie als pragmatische Herangehensweise sich unmittelbar nach Beginn der Krise etabliert hat.

BEMERKUNG 2.1 (Mehrkurvenansatz für Zinsderivate) Nach AMETRANO & BIANCHETTI (2009) und BIANCHETTI (2012) kann ein Zinsderivat in einer fest gewählten Währung (sagen wir EUR oder USD) mit $m > 0$ zukünftigen Zahlungen π_j für $j \in \{1, \dots, m\}$ an den Zeitpunkten T_j wie folgt bewertet werden:

1. Im ersten Schritt werden zuerst die Diskontfaktorkurve C_d und damit weiter die periodenspezifischen Forwardkurven C_f jeweils homogen in der jeweiligen Periode $f \in \{1m, 3m, 6m, 9m, 12m\}$ mittels Bootstrapping ermittelt (was wir noch in BEMERKUNG 2.2 genauer ausführen werden).
2. Für jede Zahlung π_j zum Zeitpunkt T_j berechne man die relevante Forward-Rate zur zugehörigen Periode f mit der jeweiligen Kurve C_f analog zum klassischen Einkurvenansatz nach $F_f(t, T_{j-1}, T_j) := \frac{1}{\Delta_f} \left(\frac{P_f(t, T_{j-1})}{P_f(t, T_{j-1})} - 1 \right)$.
3. Der zur Zahlung π_j zugehörige Cashflow $c_j := c_f(t, T_j, \pi_j)$ an T_j ergibt sich bei einer variablen Zinszahlung aus der zuvor ermittelten periodenspezifischen Forward-Rate $F_f(t, T_{j-1}, T_j)$.
4. Anschließend sind die so ermittelten Zahlungsströme mit der CSA-/OIS-Diskontkurve abzuzinsen, wodurch sich als Barwert des Zinsderivates ergibt:

$$PV^\pi := \sum_{k=1}^m P_d(t, T_j) \cdot c_j = \sum_{k=1}^m P_d(t, T_j) \cdot c_f(t, T_j, \pi_j) . \quad (2.1)$$

5. Für einfache nichtlineare und somit volatilitätsabhängige Zinsderivate wie Caps/Floors oder Swaptions ist jeweils noch eine separierte Volatilitäts-oberfläche Σ_f für jede benötigte Zinsperiode (den **Tenor**) unter Berücksichtigung von Zinsderivaten auf Underlyings ausschließlich dieser Zinsperiode $f \in \{1m, 3m, 6m, 9m, 12m\}$ für die EURIBOR- bzw. Swap-Rate-Volatilitäten zu konstruieren und diese für die Bewertung der Cashflows zu verwenden.

Veranschaulichen wir den Mehrkurvenansatz anhand der Mehrkurvenbewertung eines einfachen Plain-Vanilla-Zinsswaps in einem kleinen Beispiel.

BEISPIEL 2.3 Wir betrachten einen (nicht direkt am Markt quotierten) über einen CSA besicherten Swap mit Laufzeit $T = 5,5$ Jahre, dessen variable Verzinsung sich nach dem 6m-EURIBOR richtet, der gegen die fixen Zinszahlungen halbjährlich getauscht wird. Aus sich auf die EONIA-Rate beziehenden Zinsinstrumenten wurde die (risikolose) Diskontkurve $[T \mapsto P(0,T) = P_d(0,T)]$ und aus liquiden Zinsinstrumenten mit variablen 6m-EURIBOR-Zinszahlungen die periodenspezifische Diskontkurve $[T \mapsto P_{6m}(0,T)]$ für die Periode $f = 6m$ gebootstrapped, wie der Tabelle in Abbildung 2.4 zu entnehmen ist.

	EONIA $P_d(0,T)$		6m-EURIBOR $P_f(0,T)$	
Laufzeit T	act/360 (bid)	$P(0,T)$	act/360 (bid)	$P^{6m}(0,T)$
o/n	0,504%	0,999986192	0,504%	0,999986192
1m	0,664%	0,999433172	0,871%	0,999260895
3m	0,764%	0,998162179	1,078%	0,997468776
6m	0,908%	0,995901483	1,348%	0,994118597
12m	1,100%	0,990453986	1,825%	0,985129292
2y	1,500%	0,961179484	2,027%	0,945985593
3y	1,900%	0,935596614	2,348%	0,918226750
4y	2,100%	0,910697506	2,607%	0,887704499
5y	2,400%	0,878226293	2,825%	0,855392889
6y	2,600%	0,846855736	3,007%	0,822307853
7y	2,800%	0,813044471	3,157%	0,789268526

Abbildung 2.4 EONIA- und 6m-EURIBOR-Diskontkurven zur Bewertung von Swaps nach der Finanzkrise

Nach klassischem Einkurvenansatz würde man nun aus den 6m-EURIBOR-Diskontfaktoren die Forward-Raten berechnen, mit denen der im Swap als variable Seite (sog. floating leg) enthaltene Floater bei Diskontierung mit diesen 6m-EURIBOR-Diskontfaktoren zu par notiert, und könnte anschließend damit die faire Swap-Rate zu $S = S^{\text{Pre-Crisis}} = 3,1918\%$ bestimmen. Hingegen wären die Forward-Raten im Mehrkurvenansatz zwar ebenfalls nach

$$F_f(t, T_{j-1}, T_j) := \frac{1}{\Delta_f} \left(\frac{P_f(t, T_{j-1})}{P_f(t, T_{j-1})} - 1 \right)$$

zu ermitteln, dann jedoch mit den OIS-Diskontfaktoren abzuzinsen. Infolgedessen würde sich als Barwert des (Payer-) Swaps

$$PV = \sum_{k=1}^{11} P_d \left(0, \frac{k}{2} \right) \cdot \left(S - F_f \left(0, \frac{k-1}{2}, \frac{k}{2} \right) \right)$$

ermitteln, wodurch die variable Seite des Swaps nicht mehr zu par (sondern der äquivalente Floater [mit Nominalrückzahlung zum Laufzeitende] zu 102,68) notiert, sondern sich die faire Post-Crisis-Swap-Rate zu $S = S^{\text{Post-Crisis}} = 3,1975\%$ ermittelt.

Die Durchführung der Bewertung im Mehrkurvenansatz bedarf also der Ermittlung verschiedener Kurven zum Diskontieren bzw. Erzeugen der Cashflows, die wir noch genauer beschreiben wollen.

BEMERKUNG 2.2 Die detailliertere Herangehensweise zum Bootstrapping der benötigten Diskont- bzw. Forwardkurven pro Tenor kann PALLAVICINI & TARENTHI (2010) entnommen werden und lässt sich grob wie folgt darstellen:

1. Das Bootstrapping der Diskontfaktorkurve $[T \mapsto P_d(0,T)]$ erfolgt nach der klassischen Vorgehensweise (wie im klassischen Einkurvenansatz) allein aus Overnight Indexed Swap-basierten Instrumenten.
2. Sobald die CSA-/OIS-Diskontkurve ermittelt wurde, können damit die 1d- bzw. OIS-Forward-Raten nach dem üblichen No-Arbitrage-Argument ermittelt werden: Ausgehend davon können nun die verschiedenen tenorspezifischen Forwardkurven aufgebaut werden.
3. Hierbei wird mit dem Bootstrapping der 6m-EURIBOR-Kurve begonnen, da diese die liquideste im EUR-Markt ist. (Entsprechend würde man mit dem Bootstrapping der 3m-USD-LIBOR-Forwards beginnen, wenn wir im USD-Markt die Kurven konstruieren wollten). Das Bootstrapping der tenorspezifischen 6m-Forwardkurve verläuft dabei wie folgt:
 - (a) Betrachtet wird der Spread zwischen den 6m-Forward- und der OIS-Forward-Rate: Diese Differenz wird (unter Verwendung entsprechender Interpolationsmethoden) so ermittelt,
 - (b) dass die am Markt quotierten liquider Instrumente mit sechsmonatigen variablen Referenzzins (unter Verwendung der CSA-/OIS-Diskontierung) repliziert werden.
4. Sobald die 6m-Forwardkurve auf diese Weise gebootstrapped wurde, können wir die 3m-Forwardkurve ausgehend von dieser und den am Markt quotierten 3m-vs-6m-Basiswaps (unter Verwendung der OIS Diskontkurve) bootstrappen.
5. Mit der 3m-Forwardkurve wird anschließend die 1m-Forwardkurve mithilfe OIS Diskontkurve aus den Marktquotierungen der 1m-vs-3m-Basiswaps gebootstrapped.

6. Schließlich wird die 12m-Forwardkurve ausgehend von der 6m-Forwardkurve mittels OIS Diskontierung aus den 6m-vs-12m-Basiswaps gebootstrapped.

Abschließend ist jedoch noch ein deutlicher **Warnhinweis** angebracht, da diese Vorgehensweise eher einem natürlichen Pragmatismus als tatsächlich als das Ergebnis einer konsistenten Bewertungstheorie geschuldet ist (wie einst die Vernachlässigung der Basisrisiken auch).

BEMERKUNG 2.3 *Es ist zu beachten, dass*

- (1) *wir mit diesem Zugang den Zinsmarkt, in jeder Währung für sich genommen, in weitere Subsegmente (Teilmärkte) je nach Zahlungsperiode aufgeteilt und dabei die **sehr starke Annahme** getroffen haben, dass sich jeder dieser Teilmärkte für sich genommen genauso wie der klassische Einkurvenmarkt vor der Krise verhält (und die Forward-Raten sich so wie einst auch schon in jedem Teilmarkt separat ermitteln lassen): Diese extrem starke Annahme kann in fortgeschritteneren Ansätzen entsprechend abgeschwächt werden.*
- (2) *diese Mehrkurvenbewertung zunächst ein rein statischer Bewertungsansatz ist, der sich nur durch Vorgabe der Dynamiken für die Evolution der einzelnen Teilsegmente (je nach Tenor der variablen Zinskurven) für sich sowie deren Kovarianzen erweitern lässt. – Dabei wären entsprechend Varianz-Kovarianz-Matrizen aus den volatilitäts- und korrelationssensitiven Plain Vanilla Zinsderivaten zu bootstrappen.*

BIANCHETTI & CARLICCHI (2011) [28] führen einen direkten empirischen Vergleich der Pre- und Post-Crisis-Bewertung von (Forward Starting) Swaps, aber auch Caps/Floors, durch. Ihre empirische Studie offenbart eine extrem schlechte Performance des klassischen Einkurven- im Vergleich zum moderneren Mehrkurvenansatz.

Da der Fokus dieses Werkes auf dem Thema Kreditderivate und Kreditrisikomodelle liegt, verweisen wir zur weiteren Vertiefung der hier nur angedeuteten Sachverhalte auf die oben aufgeführten Arbeiten.

2.2 Black-Scholes-Modell

Das BLACK-SCHOLES-Modell verwendet die Annahme der Arbitragefreiheit des Marktes, d.h. die nicht vorhandene Möglichkeit, am Markt Gewinne zu erzielen, ohne dabei auch Verlustrisiken in Kauf zu nehmen, um Bewertungsformeln für

Optionen herzuleiten. Wir stellen dieses Modell hier aus zweierlei Gründen dar: Erstens erleichtert es das Verständnis des im folgenden Abschnitt behandelten allgemeineren Modellierungsrahmens und zweitens stellt es ein wesentliches Element des MERTON-Modells zur Bewertung von Kreditrisiken dar, auf das wir im dritten Abschnitt eingehen werden.

2.2.1 Grundlegende Annahmen und die Dynamik des Underlyings

Die BLACK-SCHOLES-Bewertungsformeln stellen den Marktstandard zur Bewertung einfacher Optionen dar. In der Praxis werden sie zur Bewertung von Aktien- und Devisenoptionen, sowie – in leicht abgewandelter Form – auch zur Bewertung von Anleihe- und Zinsoptionen bzw. Kreditderivaten verwendet.

In der sog. **Black-Scholes-Welt** geht man zunächst von der Grundannahme aus, dass sich die Preise aller am Markt gehandelten Instrumente mittels einer geometrischen BROWN'schen Bewegung modellieren lassen. Der Begriff der BROWN'schen Bewegung wird – ebenso wie die übrigen im Folgenden auftretenden technischen Begriffe – im Anhang erläutert. Wir betrachten hier exemplarisch den Aktienmarkt und verwenden die Zufallsvariable S_t zur Beschreibung des Kurses einer Aktie an einem Zeitpunkt t , der im Zeitintervall $[0; T]$ liege.

Zur Modellierung von S_t benötigen wir einen vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Filtration $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in [0; T]}$ und einen an \mathcal{F} adaptierten stochastischen Prozess $(S_t)_{t \in [0; T]}$ (vgl. hierzu auch Anhang A). Dieser Prozess wird im BLACK-SCHOLES-Modell durch die *stochastische Differenzialgleichung*

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

bzw.

$$dS_t = \mu \cdot S_t dt + \sigma \cdot S_t dW_t \quad (2.2)$$

mit einem WIENER Prozess $(W_t)_{t \in [0; T]}$ und positiven Konstanten μ und σ beschrieben. Es handelt sich hierbei um die geometrische BROWN'sche Bewegung.

Die anschauliche Motivation dieses Ansatzes ist dadurch gegeben, dass die relative Änderung $\Delta S_t / S_t$ der Preise in kurzen Zeitintervallen $\Delta t > 0$ empirisch häufig approximiert werden können durch die Summe aus einer normalverteilten Zufallsvariable mit Verteilung $\mathcal{N}(0, \sigma^2 \cdot \Delta t)$ und einer Driftkomponente $\mu \cdot \Delta t$. Durch Betrachtung eines „infinitesimalen“ Zeitintervalles der „Länge“ dt gelangt man dann zum Modellansatz (2.2). Dabei ist σ der entscheidende Parameter, denn er misst die am Markt beobachtete **Volatilität** der relativen Änderungen der Preise. Statistisch gesehen ist dies nichts anderes als die Standardabweichung der Zufallsvariablen $\frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \cdot \Delta S_t / S_t$, also ein Maß für die Schwankungsintensität der Preise.

Wie sieht nun die Lösung der stochastischen Differenzialgleichung (2.2) bei gegebener Anfangsbedingung $S_0 =: s_0 \in (0; \infty)$ aus? Gemäß SATZ B.2, dessen Voraussetzungen hier erfüllt sind, ist die Lösung eindeutig bestimmt. Es genügt also, analog der Vorgehensweise bei der Lösung gewöhnlicher Differenzialgleichungen eine Lösung zu „raten“ und zu verifizieren, dass diese (2.2) erfüllt: Der durch

$$S_t := s_0 \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2\right) \cdot t + \sigma W_t\right) > 0 \quad (2.3)$$

gegebene Prozess erfüllt (2.2), denn es gilt mit

$$Y_t := \left(\mu - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2\right) \cdot t + \sigma W_t, \quad Y_0 := 0,$$

und $S_t = s_0 \cdot \exp(Y_t)$ nach der ITÔ-Formel (B.5):

$$\begin{aligned} dS_t &= \left[s_0 \cdot \exp(Y_t) \cdot \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot s_0 \cdot \exp(Y_t) \cdot \sigma^2 \right] dt + \\ &\quad + s_0 \cdot \exp(Y_t) \cdot \sigma dW_t = \\ &= \mu \cdot S_t dt + \sigma \cdot S_t dW_t. \end{aligned}$$

Somit ist der in (2.3) angegebene Prozess tatsächlich die Lösung von (2.2), und es folgt aus (2.3), dass die Zufallsvariable S_t für alle $t \in (0; T]$ lognormalverteilt mit Varianz $e^{2 \cdot \log s_0 + 2 \cdot \mu \cdot t} \cdot (e^{\sigma^2 \cdot t} - 1)$ ist.

Als grundlegend für die Bewertung von Finanzinstrumenten (insbesondere Derivaten) in der BLACK-SCHOLES-Welt erweist sich die Tatsache, dass wir die stochastische Differenzialgleichung (2.2) durch Einführung eines neuen Wahrscheinlichkeitsmaßes in geeigneter Weise transformieren können: Dazu ziehen wir den wichtigen Satz von GIRSANOV (SATZ B.7) heran, und zwar in der Weise, dass wir die Driftkomponente μ in (2.2) durch Übergang zu einem neuen Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{\mathbb{P}}$ transformieren in eine neue Driftkomponente, die gleich dem Zinssatz r für **risikolose Geldanlagen** ist. Unter einer risikolosen Geldanlage verstehen wir hier die Anlage eines gewissen Geldbetrages zum Zeitpunkt 0, der im Zeitablauf völlig unabhängig von jeglichen stochastischen Einflüssen mit dem Zinssatz r stetig verzinst wird und dessen Rückzahlung sicher, d.h. risikolos ist. Der Wert dieser Geldanlage ist (bei einem Anfangsbetrag von $B_0 := 1$) zu einem späteren Zeitpunkt $t \in [0; T]$ gegeben durch

$$B_t := \exp(r \cdot t).$$

Man nennt eine solche Geldanlage auch **Bankkonto**. Doch nun zurück zur beabsichtigten Maßtransformation: Wir setzen (mit den Bezeichnungen von SATZ B.7) $g := \frac{r - \mu}{\sigma}$, und erhalten ein Maß $\tilde{\mathbb{P}}$, unter dem

$$dS_t = r \cdot S_t dt + \sigma \cdot S_t d\widetilde{W}_t \quad (2.4)$$

mit dem WIENER-Prozess $(\widetilde{W}_t)_{t \in [0;T]}$ unter $\widetilde{\mathbb{P}}$ gilt. Im nächsten Schritt führen wir den **diskontierten Prozess**

$$Z_t = B_t^{-1} \cdot S_t = \exp(-r \cdot t) \cdot S_t$$

ein. Eine Anwendung der ITÔ-Formel (B.5) ergibt unmittelbar

$$dZ_t = \sigma \cdot Z_t d\widetilde{W}_t. \quad (2.5)$$

Dies impliziert, dass der Prozess $(Z_t)_{t \in [0;T]}$ eine geometrische BROWN'sche Bewegung mit Drift 0 ist, weshalb es sich um ein **Martingal** handelt (vgl. diesbezüglich Anhang A.5).

Wie wir gleich sehen werden, kann aus der Martingaleigenschaft zweier stochastischer Prozesse bzgl. eines Wahrscheinlichkeitsmaßes geschlossen werden, dass die beiden Prozesse in einfacher Weise ineinander transformiert werden können. Dies ist die Aussage des fundamentalen **Martingal Darstellungssatzes**:

SATZ 2.1 (Martingal Darstellungssatz) *Es sei Z_t das in (2.5) betrachtete Martingal auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$. Des Weiteren sei $(M_t, \mathcal{F}_t)_{t \in [0;T]}$ ein beliebiges stetiges, quadrat-integrierbares Martingal auf $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$ mit $M_0 = 0$. Dann existiert eine Erweiterung $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{F}^*, \widetilde{\mathbb{P}})$ von $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$ und auf dieser Erweiterung ein adaptierter Prozess $(\delta_t, \mathcal{F}_t^*)_{t \in [0;T]}$ mit der Eigenschaft $\int_0^T \delta_t^2 dt < \infty$, so dass die folgende Darstellung von (M_t) gilt:*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \delta_s dZ_s \iff dM_t = \delta_t dZ_t.$$

Anschaulich gesprochen unterscheiden sich die „zeitlichen Änderungen“ dM_t und dZ_t nur durch den „Skalierungsfaktor“ δ_t . Eine ausführliche Darstellung (auch wesentlich allgemeinerer Versionen) dieses Satzes findet sich in [189].

2.2.2 Dynamik eines Derivats und die Black-Scholes-PDE

Im Folgenden verwenden wir die bisher gewonnenen Erkenntnisse, um Informationen über die Dynamik und damit den Wert eines (nahezu) beliebigen Derivates, dessen Underlying der Dynamik (2.2) folgt, zu gewinnen. Das Derivat habe zum Zeitpunkt T eine vom Underlying (stückweise) stetig abhängige Auszahlungsfunktion ϕ , weitere Auszahlungszeitpunkte gebe es nicht. Wir bezeichnen den Marktwert des Derivates zum Zeitpunkt $t \in [0; T]$ durch die Funktion

$$h : [0; T] \times [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, s) \mapsto h(t, s),$$

wobei s für einen Wert des Underlyings steht. Diese Funktion sei auf dem Streifen $[0; T] \times [0; \infty)$ bzgl. der Variablen t einmal stetig differenzierbar und bzgl. der Variablen s zweimal stetig differenzierbar. Es gilt $h(T, \cdot) = \phi(\cdot)$.

Unser Ziel besteht darin, die Funktion h als Lösung einer partiellen Differenzialgleichung darzustellen. Um dies zu erreichen, verwenden wir das zur Dynamik (2.4) gehörende Maß $\tilde{\mathbb{P}}$ und betrachten zunächst den durch $E_t := \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}(B_T^{-1} \cdot \phi | \mathcal{F}_t)$ gegebenen Prozess $(E_t)_{t \in [0; T]}$. Dieser Prozess ist ein stetiges quadrat-integrierbares $\tilde{\mathbb{P}}$ -Martingal, was sich unmittelbar aus den in Anhang A zusammengestellten Eigenschaften bedingter Erwartungswerte ergibt. Da aber gemäß (2.5) auch $(Z_t)_{t \in [0; T]}$ ein $\tilde{\mathbb{P}}$ -Martingal ist, können wir nach SATZ 2.1 auf die Existenz eines Prozesses $(\delta_t)_{t \in [0; T]}$ schließen mit

$$dE_t = \delta_t dZ_t. \quad (2.6)$$

Wir stellen uns vor, zum Zeitpunkt t werde ein Portfolio gebildet, das eine Position der Größe δ_t im Underlying umfasse, und eine Position der Größe $\psi_t := E_t - \delta_t \cdot Z_t$ in dem durch B_t beschriebenen Instrument (Bankkonto). Dabei setzen wir stillschweigend voraus, dass die erwähnten Instrumente in beliebigen Größenordnungen zu den aktuellen Marktpreisen (ohne zusätzliche Gebühren) handelbar sind. Der Wert des erwähnten Portfolios beträgt zur Zeit t gerade

$$\delta_t \cdot S_t + \psi_t \cdot B_t = B_t \cdot E_t. \quad (2.7)$$

Man kann nun zeigen:

LEMMA 2.1 *Es gilt für $V_t := \delta_t \cdot S_t + \psi_t \cdot B_t$:*

$$dV_t = \delta_t dS_t + \psi_t dB_t. \quad (2.8)$$

BEWEIS: Wegen $V_t = B_t \cdot E_t$ und der Tatsache, dass $(B_t)_{t \in [0; T]}$ deterministisch ist, folgt aus BEMERKUNG B.3

$$dV_t = B_t dE_t + E_t dB_t.$$

Aus (2.6) und $E_t = \delta_t \cdot Z_t + \psi_t$ ergibt sich somit

$$dV_t = \delta_t \cdot B_t dZ_t + (\delta_t \cdot Z_t + \psi_t) dB_t = \delta_t \cdot (B_t dZ_t + Z_t dB_t) + \psi_t dB_t.$$

Eine erneute Anwendung von BEMERKUNG B.3 zeigt $B_t dZ_t + Z_t dB_t = d(B_t \cdot Z_t)$ und wegen $S_t = B_t \cdot Z_t$ finden wir schließlich

$$dV_t = \delta_t dS_t + \psi_t dB_t.$$

□

Nachdem die Dynamik von $(V_t)_{t \in [0;T]}$ im voranstehenden Lemma auf die Dynamik des Underlyings und des Bankkonto-Prozesses zurückgeführt wurde, setzen wir die uns bereits bekannte Dynamik (2.4) und die offensichtliche Beziehung $dB_t = r \cdot B_t dt$ in (2.8) ein, und erhalten

$$d(B_t \cdot E_t) = dV_t = (\delta_t \cdot r \cdot S_t + \psi_t \cdot r \cdot B_t) dt + \delta_t \cdot \sigma \cdot S_t d\widetilde{W}_t. \quad (2.9)$$

Die nächste Überlegung besteht darin, zu zeigen, dass V_t gerade dem Marktwert unseres Derivates zum Zeitpunkt t entspricht, dass also gilt

$$V_t = h(t, S_t), \quad t \in [0; T].$$

Um dies einzusehen, benötigen wir den folgenden wichtigen Sachverhalt:

BEMERKUNG 2.4 (Law of one Price) *In einem arbitragefreien Markt haben zwei Portfolios P_1 und P_2 , welche zu einem künftigen Zeitpunkt T ein identisches Auszahlungsprofil besitzen (und zu keinem anderen Zeitpunkt Auszahlungen leisten), zu jedem Zeitpunkt $t \in [0; T]$ immer den selben Wert. Denn wäre eines der Portfolios, etwa P_1 , weniger wert als das andere, so ergäbe sich folgende Arbitragemöglichkeit: Kaufe P_1 zum Geldbetrag G_1 , verkaufe P_2 zum Gelbbetrag G_2 , lege den Betrag $G_2 - G_1 > 0$ beiseite, warte bis zum Zeitpunkt T und führe dann die sich aus den Auszahlungsprofilen ergebenden Transaktionen durch. Damit ist eine Arbitragemöglichkeit gegeben, denn zum Zeitpunkt des Kaufes von P_1 bzw. Verkaufes von P_2 wird ein Betrag 0 im Markt investiert (es wird lediglich der aus dem Verkauf von P_2 erzielte Erlös in P_1 angelegt und zu einem Teil beiseite gelegt), und zum Zeitpunkt T liegt folgende Situation vor: Die Auszahlungsprofile der beiden Positionen heben sich gerade auf (aufgrund der entgegengesetzten Positionierung), so dass aus der gesamten Transaktion der beiseite gelegte Betrag $G_2 - G_1$ übrig bleibt, ohne dass ein Verlustrisiko eingegangen wurde.*

Wenden wir diese Bemerkung auf V_t an, so sehen wir wegen

$$V_T = B_T \cdot E_T = B_T \cdot B_T^{-1} \mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}(\phi | \mathcal{F}_T) = \phi(S_T) = h(T, S_T),$$

dass notwendigerweise $V_t = h(t, S_t)$ für alle $t \in [0; T]$ gelten muss, und damit V_t tatsächlich gleich dem Wert des Derivates in t ist. Diesen Sachverhalt, auf den wir in Abschnitt 2.2 noch einmal in allgemeinerem Rahmen zurückkommen, notieren wir in einem Satz:

SATZ 2.2 *Im BLACK-SCHOLES-Modell folgt der Marktwert eines Derivates mit Auszahlungsprofil ϕ und Auszahlungszeitpunkt T , dessen Underlying ein am Markt gehandeltes, durch (2.2) beschriebenes Instrument ist, dem durch*

$$V_t = B_t \cdot \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}(B_T^{-1} \cdot \phi | \mathcal{F}_t).$$

gegebenen Prozess $(V_t)_{t \in [0;T]}$.

Um zur gewünschten partiellen Differenzialgleichung für h zu gelangen, wenden wir die ITÔ-Formel (B.5) an, und erhalten daraus die Erkenntnis, dass $(h(t, S_t))_{t \in [0;T]}$ ein ITÔ Prozess ist, dessen Dynamik für $t \in (0; T)$ durch

$$dh(t, S_t) = \left[r \cdot S_t \cdot \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S_t^2 \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} \right] dt + \frac{\partial h}{\partial s} \cdot \sigma \cdot S_t d\tilde{W}_t \quad (2.10)$$

gegeben ist. Die partiellen Ableitungen sind jeweils an der Stelle (t, S_t) auszuwerten.

Wir befinden uns jetzt in der Situation, dass wir für den ITÔ Prozess $(V_t)_{t \in [0;T]} = (h(t, S_t))_{t \in [0;T]}$ zwei Darstellungen, nämlich (2.9) und (2.10) hergeleitet haben. Damit können wir BEMERKUNG B.2 des Anhangs bemühen, um einzusehen, dass einerseits

$$\frac{\partial h}{\partial s}(t, S_t) \cdot \sigma \cdot S_t = \delta_t \cdot \sigma \cdot S_t \iff \frac{\partial h}{\partial s}(t, S_t) = \delta_t$$

gelten muss und andererseits

$$r \cdot S_t \cdot \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S_t^2 \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} = \delta_t \cdot r \cdot S_t + \psi_t \cdot r \cdot B_t.$$

Die letztgenannte Beziehung liefert nach Einsetzen von $\frac{\partial h}{\partial s}(t, S_t) = \delta_t$ und von $B_t \cdot \psi_t = h(t, S_t) - \frac{\partial h}{\partial s}(t, S_t) \cdot S_t$ (vgl. (2.7)) schließlich

$$-r \cdot h(t, S_t) + r \cdot S_t \cdot \frac{\partial h}{\partial s}(t, S_t) + \frac{\partial h}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S_t^2 \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial s^2}(t, S_t) = 0.$$

Diese Gleichung ist sicher dann erfüllt, wenn die Funktion h die partielle Differenzialgleichung

$$\frac{\partial h}{\partial t} + r \cdot s \cdot \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot s^2 \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} - r \cdot h = 0, \quad (2.11)$$

für $(t, s) \in (0; T) \times (0; \infty)$ erfüllt. Man nennt diese Gleichung **Black-Scholes-Differenzialgleichung** oder kürzer **Black-Scholes-PDE**. Ihre Lösung mit vorgegebener *Randbedingung* $h(T, s) = \phi(s)$ und unter der *Verträglichkeitsbedingung* für $s = 0$, nach der $\frac{\partial h}{\partial t}(t, 0) - r \cdot h(t, 0) = 0$ und $h(T, 0) = \phi(0)$, also $h(t, 0) = \phi(0) \cdot e^{-r(T-t)}$ für $t \in [0; T]$ gelten muss, ist der Marktwert des Derivates zur Zeit t .

Als erste Anwendung fragen wir uns nach dem Preis eines Terminkaufes einer Aktie, welche ein unbedingtes Termingeschäft ist:

BEISPIEL 2.4 Zum Zeitpunkt t wird der Kauf einer Aktie (modelliert durch S_t) zu einem späteren Zeitpunkt $T > t$ vereinbart, wobei der in T zu zahlende Kaufpreis K schon in t festgelegt wird. Um den Marktwert dieses Geschäfts zur Zeit t zu berechnen, verwenden wir für die Dynamik von S_t , wie eingangs erwähnt, die Gleichung (2.2). Der Terminkauf ist ein Derivat mit Auszahlungsprofil $\phi(S_T) = S_T - K$, und seine Wertentwicklung werde durch den Prozess $(h(t, S_t))_{t \in [0; T]}$ beschrieben. Wir erhalten den Marktwert für einen gegebenen Aktienkurs $S_t = s$ damit als eindeutige Lösung der BLACK-SCHOLES-PDE (2.11) mit Randbedingung $h(T, s) = s - K$. Man rechnet sofort nach, dass sich die Lösung und damit der gesuchte Marktwert zu

$$h(t, s) = s - K \cdot \exp(-r \cdot (T - t))$$

ergibt. Nun ist der **Forward-Preis** $Fwd(t, T)$ der Aktie durch denjenigen Wert K gegeben, für den $h(t, S_t) = 0$ gilt, also folgt

$$Fwd(t, T) = \exp(r \cdot (T - t)) \cdot S_t.$$

2.2.3 Die Black-Scholes-Formel und die Griechen

Wir betrachten nun eine Option auf eine Aktie mit Kurs S_t , und zwar eine Europäische Call- oder Put-Option mit Laufzeit T . Unser Ziel ist es, den Wert dieser Option für jeden Zeitpunkt $t \in [0; T]$ zu berechnen.

Das Auszahlungsprofil der Aktienoption ist nun definiert durch

$$\phi(S_T) = [\omega \cdot (S_T - K)]^+ = \max\{\omega \cdot (S_T - K), 0\}, \quad (2.12)$$

wobei $\omega = 1$ den Fall einer Call-Option und $\omega = -1$ den Fall einer Put-Option beschreibt.

Der Marktwert der Option zum Zeitpunkt $t \in [0; T]$ sei durch die Funktion

$$h : [0; T] \times [0; \infty) \ni (t, s) \mapsto h(t, s) \in \mathbb{R},$$

gegeben. Diese Funktion sei wie bisher auf $[0; T] \times [0; \infty)$ bzgl. der Variablen t einmal stetig differenzierbar und bzgl. der Variablen s zweimal stetig differenzierbar. Es gilt $h(T, \cdot) = \phi(\cdot)$.

Als Resultat der Betrachtungen des vorigen Abschnitts ergibt sich nun die BLACK-SCHOLES-Formel für Europäische Call- bzw. Put-Optionen:

SATZ 2.3 Gegeben sei eine Europäische Aktienoption mit Endfälligkeit $T > 0$ auf eine Aktie mit Kurs S_t . Das Auszahlungsprofil sei definiert durch (2.12). Dann gilt für den Preis PV_t^{BS} der Option

$$PV_t^{BS} = s \cdot \omega \cdot \Phi(\omega \cdot d_1^{BS}) - K \cdot e^{-r \cdot (T-t)} \cdot \omega \cdot \Phi(\omega \cdot d_2^{BS}) \quad (2.13)$$

mit

$$d_l^{BS} := d_l^{BS}(s, K, \sigma) = \frac{\log\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r + \frac{(-1)^{l+1}}{2} \cdot \hat{\sigma}^2\right) \cdot (T-t)}{\hat{\sigma} \cdot \sqrt{T-t}} \quad (2.14)$$

für $l \in \{1, 2\}$. Dabei ist s der zum Zeitpunkt t beobachtete Aktienkurs S_t und $\hat{\sigma}$ der zur Zeit t gültige Wert für σ . Die Formel (2.13) wird oft auch kurz als **Black-Scholes-Formel** bezeichnet.

BEWEIS: Die Lösung der Differenzialgleichung (2.11) mit der Randbedingung (2.12) ist für $s = S_t$ gegeben durch

$$\begin{aligned} h(t, s) = & s \cdot \omega \cdot \Phi\left(\omega \cdot \frac{\log\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right) \cdot (T-t)}{\hat{\sigma} \cdot \sqrt{T-t}}\right) + \\ & + (-K) \cdot e^{-r \cdot (T-t)} \cdot \omega \cdot \Phi\left(\omega \cdot \frac{\log\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right) \cdot (T-t)}{\hat{\sigma} \cdot \sqrt{T-t}}\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung. □

Wir betrachten das Resultat von SATZ 2.3 nun im Lichte des Satzes von FEYNMAN und KAC (SATZ B.6). Der Satz besagt, dass auf unserem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{\mathbb{P}}$ existiert, unter dem die Lösung der partiellen Differenzialgleichung (2.11) mit Endwertbedingung (2.12) dargestellt werden kann in der Form

$$h(t, s) = e^{-r \cdot (T-t)} \cdot \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}[\phi(S_T) | S_t = s],$$

wobei wir hier die Situation $r = r(s, X_s)$ haben, mit $r(s, X_s)$ aus SATZ B.6. Ferner gilt unter dem Maß $\tilde{\mathbb{P}}$ die stochastische Dynamik

$$dS_t = S_t \cdot r dt + S_t \cdot \sigma dW_t. \quad (2.15)$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Gleichung (2.4), die wir mit der Maßtransformation unter Verwendung des Satzes von GIRSANOV gewonnen hatten.

Aus der Herleitung der BLACK-SCHOLES-Formel ergibt sich nun der Zusammenhang

$$\begin{aligned} PV^{BS} &= e^{-r \cdot (T-t)} \cdot (s \cdot e^{r \cdot (T-t)} \cdot \omega \cdot \Phi(\omega \cdot d_1^{BS}) - K \cdot \omega \cdot \Phi(\omega \cdot d_2^{BS})) \\ &= e^{-r \cdot (T-t)} \cdot \tilde{\mathbb{P}}[\phi(S_T) | S_t = s], \end{aligned} \quad (2.16)$$

d.h. der Optionspreis lässt sich als risikolos abgezinster bedingter Erwartungswert des Auszahlungsprofils unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{\mathbb{P}}$ darstellen. Dies entspricht dem Resultat von SATZ 2.2, wenn man dort $B_t = e^{r \cdot t}$ einsetzt.

Neben der Bewertung von Optionen lassen sich mit der BLACK-SCHOLES-Formel aber auch bestehende Optionspositionen risikomäßig absichern, und zwar in folgendem Sinn: Da der Wert einer Option von den in die BLACK-SCHOLES-Formel einfließenden Marktparametern abhängt (S_t bzw. $X_t, \hat{\sigma}, r$) und da diese Parameter sich im Laufe des Marktgeschehens natürlich permanent ändern, wird folglich auch der Wert der Option einer ständigen Änderung unterworfen sein. Nun ist es für einen Händler in einer Bank von allergrößter Wichtigkeit, diese Wertschwankungen innerhalb seines Optionsportfolios zu beobachten und bei Bedarf einzuschreiten. Letzteres bedeutet, dass er ggf. eine Optionsposition gegenüber Fluktuationen der Marktparameter risikomäßig absichert. Man nennt diesen Vorgang auch **Hedgen**. Wie geht dies vor sich?

Zunächst einmal muss der Einfluss von Marktdatenänderungen auf die Änderungen des Optionspreises quantifiziert werden. Mathematisch ausgedrückt bedeutet dies, dass man die Ableitungen der BLACK-SCHOLES-Formel nach den Preis bestimmenden Variablen bildet:

- Das **Delta** der Option, $\delta := \frac{\partial PV^{BS}}{\partial s}$,
- das **Gamma** der Option, $\Gamma := \frac{\partial^2 PV^{BS}}{\partial s^2}$,
- das **Vega** der Option, $\mathcal{V} := \frac{\partial PV^{BS}}{\partial \sigma}$,
- das **Rho** der Option, $\varrho := \frac{\partial PV^{BS}}{\partial r}$.

Diese Ableitungen, sowie ergänzend dazu das **Theta** der Option,

$$\theta := \frac{\partial PV^{BS}}{\partial t}$$

nennt man üblicherweise **Sensitivitäten** und interpretiert sie als Risikomaße. Sie werden gemeinhin auch als **Griechen** bezeichnet (obwohl das Vega \mathcal{V} ein arabischer Buchstabe ist). Man kann explizite Formeln dafür angeben, beispielsweise gilt für eine Europäische Call-Option $\delta = \Phi(d_1^{BS})$ und für eine Europäische Put-Option $\delta = \Phi(d_1^{BS}) - 1$.

Stellen wir uns nun vor, im Portfolio einer Bank befindet sich eine Optionsposition, welche aus einem Geschäft mit einem Kunden resultiert. Der Wert dieser Position verändert sich laufend, und die Bank möchte sich gegen derartige Wertänderungen absichern. Sie könnte ein exakt gegenläufiges Optionsgeschäft abschließen, was jedoch häufig nicht möglich ist, da sich kein Kontrahent dafür findet bzw. auch an der Börse keine passende Option gehandelt wird.

Aus den erwähnten Gründen wird die Bank versuchen, einen sog. **dynamischen Hedge** aufzubauen, d.h. sie wird die Wertänderung der Option durch den Aufbau und das kontinuierliche Umschichten der Position im Underlying in einem gewissen Sinne „auszugleichen“ versuchen.

An dieser Stelle kommt nun die Delta-Sensitivität ins Spiel: Hat die Bank etwa eine Position der Größe 1 in einer Option, so berechnet sie, bei fixiertem Zeitpunkt t und zu diesem Zeitpunkt gegebenem Aktienkurs s , zunächst die Größe

$$\delta_t(t,s) = \frac{\partial h}{\partial s}(t,s) = \delta.$$

Im nächsten Schritt wird (zu jedem Zeitpunkt t) das folgende Portfolio gebildet:

- Eine Long Position in der Option mit Wert $h(t,s)$.
- Eine Short Position der Größe $\delta_t(t,s)$ im Underlying mit Wert $-\delta_t(t,s) \cdot s$.
- Eine (aus den beiden erstgenannten Positionen resultierende) Geldaufnahme/-anlage (Bankkonto) der Größe $-h(t,s) + \delta_t(t,s) \cdot s$.

Betrachten wir die zeitliche Entwicklung des Wertes dieses Portfolios als stochastischen Prozess $(\Pi_t)_{t \in [0;T]}$, so erhalten wir mit den in Abschnitt 2.1.1 eingeführten Bezeichnungen δ_t und ψ_t für die Wertänderung $d\Pi_t$ die Beziehung

$$d\Pi_t = dh(t, S_t) - d(\delta_t \cdot S_t + \psi_t \cdot B_t) = dh(t, S_t) - dV_t = 0.$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage $\Pi_T - \Pi_0 = \int_0^T d\Pi_t = 0$ fast sicher, und wegen $\Pi_0 = 0$ folgt $\Pi_T = 0$. Die Wertänderung ist also null - in diesem Sinne ist die gelegentlich verwendete Sprechweise eines **risikolosen Portfolios** zu verstehen. Man nennt das soeben gebildete Portfolio auch ein sog. **deltaneutrales Portfolio** und spricht in diesem Zusammenhang von einem **Delta-Hedge**.

Die permanente Anpassung des Delta-Hedges zu jeder Zeit t ist selbstverständlich nur eine idealisierte Annahme, die sich so nicht in die Praxis umsetzen lässt, zumal *in realo* einer Umsetzung derselben auch die Transaktionskosten entgegenstünden, die wir in unserem vereinfachten Rahmen ja zunächst außer Acht lassen.

BEISPIEL 2.5 *Gehen wir von den in BEISPIEL 2.4 eingeführten Rahmendaten aus, so lässt sich eine Option zum Strike K gemäß BLACK-SCHOLES-Formel (2.16) bewerten. Zwischen den Call- und den Put-Optionen besteht die sog. Put-Call-Parität, wonach*

$$PV^{BS,Call}(t,T,K,S_0) - PV^{BS,Put}(t,T,K,S_0) = h^{Fwd}(t,T,K,S_0)$$

gelten muss, wie man entweder mithilfe der BLACK-SCHOLES-Formeln rechnerisch oder mithilfe des Law of One Price direkt aus der Arbitragefreiheit des Marktes herleitet. Betrachten wir zur Veranschaulichung also ein Portfolio bestehend aus einer Long-Position in einem Europäischen Call und einer zugehörigen Short-Position in einem Europäischen Put mit jeweils $T = 2$ Jahren Laufzeit auf dieselbe Bank-Aktie, die heute $S_0 = 48,77$ EUR wert sei und keine Dividenden zahle. Unterstellen wir ein Zinsniveau von $r = 2,5\%$ und eine Volatilität von $\sigma = 30\%$ zu einem Strike $K = 45$ EUR, so erhalten wir die Marktwerte nach der Black-Scholes-Formel zu $PV^{BS,Call} = 11,03$ EUR und $PV^{BS,Put} = 5,06$ EUR, sodass das Gesamtportfolio denselben Wert wie der Forward $PV^{Fwd} = 5,96$ EUR besitzt. Während jedoch das Portfolio bestehend aus einer Long Call- und einem Short Put-Position ökonomisch mit dem einer Forward-Position identisch ist, erhalten wir nach der Marktwertmethode (CEM) aus Unterabschnitt 1.5.3 für $n = 1$ Stück der jeweiligen Geschäfte einerseits für das Forward-Geschäft allein (mit $v(\text{Akte},2) = 8\%$) das Exposure

$$\begin{aligned} EaD^{CEM,Fwd} &= \max \left\{ 0, n \cdot PV^{Fwd} \right\} + n \cdot S_0 \cdot v(a,T) = \\ &= 5,96468 + 3,90160 = 9,86628, \end{aligned}$$

während sich für das Portfolio Π bestehend aus den beiden Optionen selbst bei Vorliegen einer aufsichtlich anerkannten Aufrechnungsvereinbarung mit

$$N = \max \left\{ PV^{BS,Call} - PV^{BS,Put}, 0 \right\} = n \cdot \max \{ 11,03 - 5,06; 0 \} = 1 \cdot 5,96$$

und

$$B = \max \{ PV^{BS,Call}, 0 \} + \max \{ -PV^{BS,Put}, 0 \} = n \cdot PV^{BS,Call} = 1 \cdot 11,02$$

sich schließlich $V := \frac{N}{B} = \frac{5,96}{11,02}$ und damit

$$\begin{aligned} EaD^{CEM,\Pi} &= \max \{ 0, PV^\Pi \} + (0,4 + 0,6 \cdot V) \cdot AddOn(P) = \\ &= 11,61796 \end{aligned}$$

ergibt: Dieses einfache Beispiel zeigt somit bereits, dass durch die Marktwertungsmethode das Exposure nicht ökonomisch korrekt abgebildet und die vorgegebene Verrechnungsvorschrift (1.7) konservativ gewählt ist.

Würde man hingegen die zukünftige Entwicklung der Bank-Aktie ausgehend von der BLACK-SCHOLES-PDE (2.2) bzw. entsprechend zu (2.3) sukzessive (beginnend bei $t = 0$) gemäß

$$S_{t+\Delta t} = S_t \cdot \exp \left(r \cdot \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \xi_t \right)$$

mit einer pro Zeitschritt $\Delta t > 0$ zufällig generierten standardnormalverteilten Zufallszahl $\xi_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ simulieren, so könnte man (unter der stark vereinfachten Annahme einer über die Laufzeit von $T = 2$ Jahren konstanten Volatilität σ) zu jedem Zeitpunkt der gewählten Diskretisierung das gesamte Portfolio mithilfe der BLACK-SCHOLES-Formeln unter Berücksichtigung der Aufrechnungsvereinbarung bewerten: Zu jedem Stützzeitpunkt der Zukunft erzeugen wir zuerst also eine Verteilung potenzieller Marktwerte durch Diskretisierung der BLACK-SCHOLES-PDE (2.2). Die ersten fünf zufällig erzeugten Kursentwicklungen einer entsprechenden Simulation (zu den gegebenen Parametern für r und σ sowie $\Delta t := \frac{1}{4}$) können der Abbildung 2.7 entnommen werden.

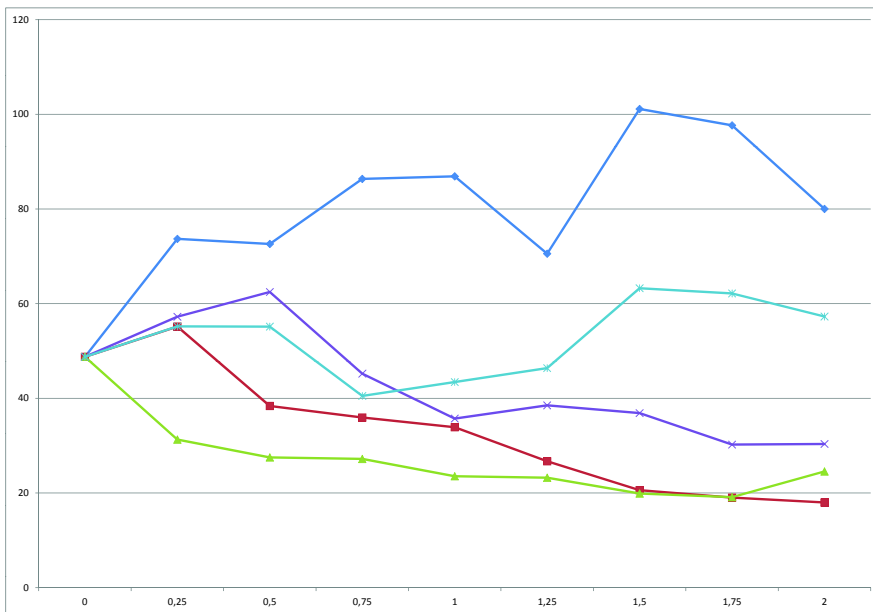


Abbildung 2.5 5 Pfade der Simulation zukünftiger Aktienkurse über $T = 2$ Jahre mit äquidistanten Zeitschritten der Länge $\Delta t = \frac{1}{4}$ gemäß BLACK-SCHOLES-Dynamik.

Nun kann zu jedem Stützzeitpunkt $\ell \cdot \Delta t$, $\ell \in \{0, \dots, 8\}$, das Portfolio mithilfe der BLACK-SCHOLES-Formeln bewertet werden, die wir (2.13) entnehmen:

Bei jeweils beispielsweise $M := 5000$ Pfade (bzw. 5000 Zufallszahlen pro Zeitschritt) ergibt sich so eine Verteilung der Marktwerte aus

$$PV_{\ell, \Delta t}^{\Pi}(\omega) \quad \text{für } \omega \in \{\omega_1, \dots, \omega_{5000}\}$$

bzw. des Exposures in jedem Zeitstützpunkt zu

$$E_{\ell, \Delta t}^{\Pi}(\omega) := \max \{PV_{\ell, \Delta t}^{\Pi}(\omega), 0\} \quad \text{für } \omega \in \{\omega_1, \dots, \omega_{5000}\}$$

ergibt, aus der beispielsweise jeweils das **erwartete Exposure (Expected Exposure)** $EE_{\ell, \Delta t}^{\Pi} := \mathbb{E}(E_{\ell, \Delta t}^{\Pi})$ als Erwartungswert der Verteilung der positiven zukünftigen Marktwerte oder das sog. **potenzielle zukünftige Exposure (Potential Future Exposure)** als das α -Quantil der Marktwertverteilung als Exposure-Maße definiert werden können. Für alle simulierten 5000 Pfade ergeben sich so exemplarisch die folgenden **Exposure-Zeitprofile** des Portfolios Π :

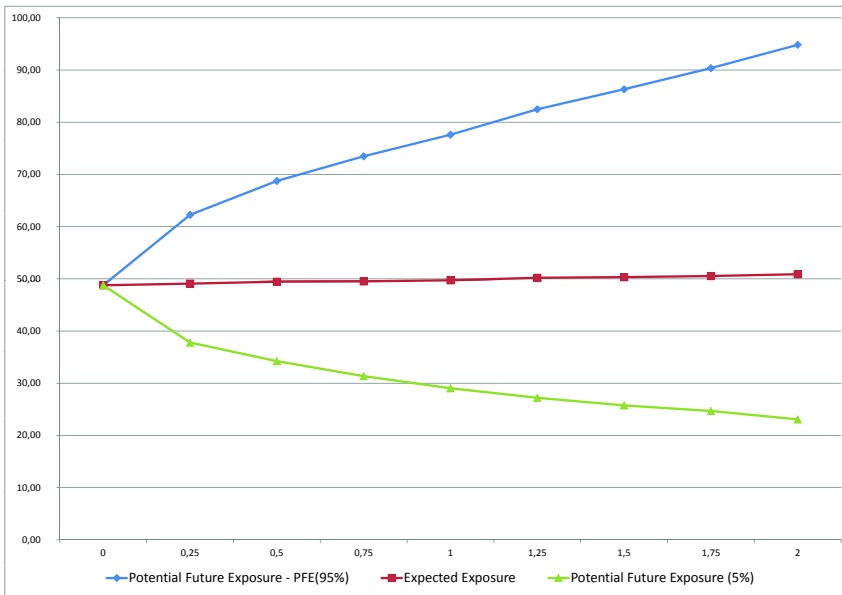


Abbildung 2.6 Exposure-Zeitprofile, d.h. zeitliche Entwicklung des 95%-Quantils (Potential Future Exposure, $PFE(95\%)$) und des Erwartungswertes des Exposures für 5000 simulierte Pfade

Da hierbei in jedem Zeitschritt die Put-Call-Parität angewendet werden kann, ist im Falle einer solchen Herangehensweise sichergestellt, dass (über die gesamte Laufzeit) das Exposure aus einem Forward-Geschäft und das aus einem den Forward replizierenden Optionsportfolio identisch sein müssen.

BEMERKUNG 2.5 Im vorangehenden einfachen Beispiel haben wir skizziert, wie die Verteilung zukünftiger Marktwerte einer Aufrechnungspositionen als Folge von Änderungen von Marktpreisen geschätzt werden kann, was übrigens auch regulatorischen Anforderungen (siehe bspw. § 223 Abs. 3 Satz 2 SolvV) exakt entspricht, auf welcher die **Internen Modelle Methoden (IMM)** basieren. Dieser Ansatz lässt sich analog auf alle anderen Assetklassen wie Wechselkurse, Credit Spreads, Zinsstrukturkurven, Rohwaren- und Energiepreise oder gar Sterblichkeitsraten erweitern, wodurch ein sog. **ökonomischer Szenariogenerator** (Economic Scenario Generator, **ESG**) entwickelt wird, der Grundlage für die Ermittlung des regulatorischen Kapitals für das Kontrahentenrisiko aber auch sog. Market Consistent Embedded Value-Ansätze nach Solvency II bei Versicherungen ist. Hierbei ist eine gemeinsame Simulation aller wertbestimmenden Risikofaktoren notwendig, welche durch eine korrelierte Simulation der treibenden stochastischen Dynamiken der Risikofaktoren erfolgt. Das Grundprinzip lässt sich schematisch wie folgt veranschaulichen:

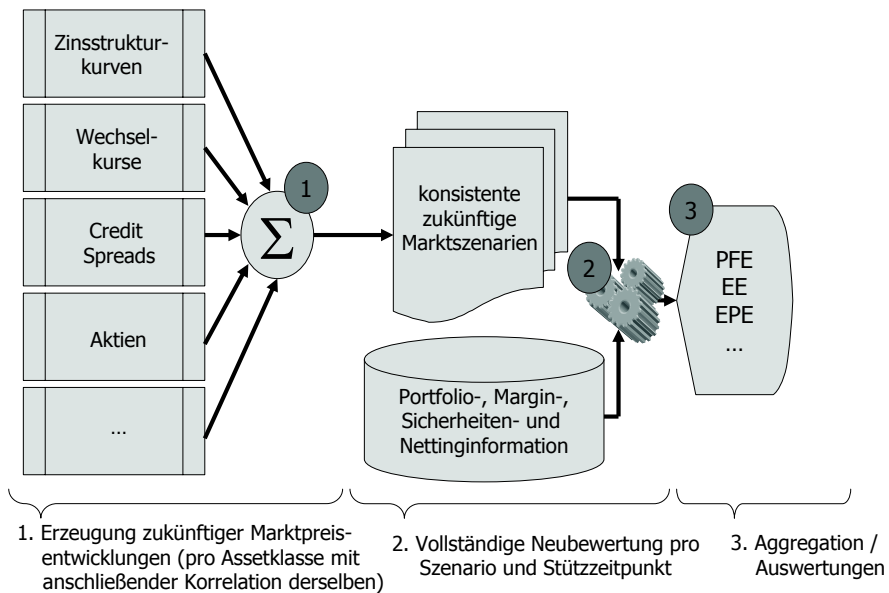


Abbildung 2.7 Prozessualer Ablauf der Erzeugung von Exposure-Zeitprofilen

Nach Erzeugung der zukünftigen Marktszenarien ist dabei eine Überprüfung der erzeugten Szenarien auf Konsistenz durchzuführen. Beispielsweise wird hier-

bei überprüft, ob die Zinsstrukturkurvenszenarien arbitragefrei sind bzw. sich aus diesen keine negativen Forward-Kurven ergeben oder ob die Aktienkurs- und Credit Spread-Szenarien konsistent sind (da ein historisch hoher Aktienkurs ökonomisch nicht unbedingt mit einer extremen Ausweitung des Credit Spreads desselben Unternehmens in Einklang zu bringen ist).

Für weitere Details zur Erzeugung von Exposure-Zeitprofilen sei auf GREGORY (2012) und vor allem auch auf CESARI et al. (2011) verwiesen, welche einen globaleren Modellzugang wählen, wodurch auch komplexere Produkte mithilfe der sog. *American Monte Carlo*-Methode unmittelbar berücksichtigt werden können.

2.2.4 Bewertungstheorie nach der Finanzkrise

In Unterabschnitt 2.1.2 hatten wir bereits die Zunahme der Basisrisiken zwischen verschiedenen Zinssätzen diskutiert: Es kam zu einer erheblichen Zunahme der Basis zwischen verschiedenen Laufzeitbändern derselben Zinskurve, zwischen den LIBOR- bzw. EURIBOR-basierten Deposit-Zinssätzen und den Overnight Indexed Swap Rates (OIS-Rates) (wie aus Abbildung 2.2 bekannt) bzw. European Overnight Indexed Average Swap Rates (EONIA-Rates) sowie zwischen den Forward Rate Agreements (FRA) und den entsprechenden Forward-Rates (vgl. hierzu die Arbeiten [233] von MERCURIO (2009) sowie [238] von MORINI (2009)).

Diese werden durch unterschiedliche Liquiditäts- und Kreditrisikoprämien hervorgerufen, welche die jeweiligen Produkte bzw. auch einfach nur Laufzeiten desselben Produktes voneinander unterscheiden (vgl. hierzu auch [97]): Das ist natürlich keine neue Erkenntnis aus die Finanzkrise, sondern war auch schon lang zuvor wohlbekannt und verstanden (vgl. z.B. die Veröffentlichung [305] von LEHMAN BROTHERS (!) aus dem Jahre 2003). Der einzige Grund für den Glauben, dass eine *einzig*e Zinskurve zur Bewertung aller Zinsprodukte ausreichen würde, lag in der geringen Marginalität der Basisspreads zwischen oben genannten Produkten begründet, die sich erst mit der Finanzkrise signifikant und in der Bewertung wirklich spürbar ausweiteten. Inzwischen ist zwar wieder eine gewisse Normalisierung eingetreten, indem die Spreads wieder enger wurden, allerdings blieb die Basis immer noch auf einem signifikant höheren Niveau als Anfang 2007.

Insbesondere ist in unserem allgemeinen Setup die Grundannahme, dass die Zinsen für Geldaufnahme unter allen Randbedingungen gleich sind, nicht nur zu hinterfragen, sondern explizit in die Bewertung einzubeziehen. Eine besicherte Geldaufnahme, wie sie durch ein Repo-Geschäft bzw. durch die Stellung und

den Nachschuss von Sicherheiten in einem sog. Credit Support Annex (CSA) zu einem ISDA-Rahmenvertrag zwischen Kontrahenten vereinbart werden kann, erfolgt dabei stets zu einem besseren Zinssatz als eine unbesicherte Geldaufnahme, was in der Bewertung zu berücksichtigen ist.

A. Black-Scholes-Optionsbewertung mit Sicherheiten

Exemplarisch wollen wir dem – von PALLAVIVINI, PERINI & BRIGO (2012) als *homogenen Ansatz für das Treasury* bezeichneten – Modellansatz von PITERBARG (2010) folgen und die BLACK-SCHOLES-Optionsbewertung um die Berücksichtigung von Sicherheiten im Kontrakt, die durch einen CSA geregelt sind, erweitern.

Bezeichnen wir mit r_C die Short Rate für eine risikolose besicherte Geldaufnahme Overnight (risk free *collateralized* overnight lending rate), so können wir die Dynamik der zugehörigen Zerokuponkurve $P_C(t, T)$ durch

$$\frac{dP_C(t, T)}{P_C(t, T)} = r_C(t)dt + \sigma_C(t, T)^T dW_t^C$$

beschreiben, worin W_t^C eine d -dimensionale BROWN'sche Bewegung und σ_C den vektorwertigen stochastischen instantanen Volatilitätsprozess beschreibt.

Das Asset, welches Gegenstand der Optionsbewertung werden soll, werde durch

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_S dt + \sigma_S(t) dW_t$$

beschrieben, sodass S den Wert dieses Assets mit historischer Drift μ_S und historischer Volatilität σ_S bezeichnet.

Besichern wir nun eine Geldaufnahme mit genau diesem Asset S , so wollen wir die zugehörige Short Rate für eine solche Geldaufnahme in Anlehnung an ein Repo-Geschäft nun die **Repo-Rate** r_R nennen. Bezeichnet die **Funding-Rate** r_F die entsprechende Short Rate für eine unbesicherte Geldaufnahme (*unsecured Funding*), so erwarten wir den Zusammenhang

$$r_C(t) \leq r_R(t) \leq r_F(t) ,$$

da eine risikolose besicherte Overnight-Aufnahme ein geringeres Ausfall- und Liquiditätsrisiko als eine via Repo besicherte Geldaufnahme bzw. eine unbesicherte Geldaufnahme darstellt.

Erinnern wir uns nun daran, dass der Barwert $V(t, S)$ eines Derivates auf unser Asset S zum Zeitpunkt t nach der ITÔ-Formel (B.5)

$$dV(t, S_t) = \mathcal{L}V(t, S_t)dt + \Delta(t)dS_t$$

mit dem Standardbewertungsoperator

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma_S^2}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2}$$

und dem Optionsdelta

$$\Delta(t) = \frac{\partial}{\partial S} V(t, S_t)$$

beschrieben wird. Der Barwert der Option bzw. äquivalent dazu der Wert des Replikationsportfolios $\Pi = V$ ergibt sich wie im klassischen BLACK-SCHOLES-Modell aus einer Investition im Asset und der zum statischen Hedging benötigten Cashposition gemäß

$$V(t, S_t) = \Delta(t)S_t + \gamma(t) , \quad (2.17)$$

wobei $\gamma(t)$ das auf dem Bankkonto befindliche Cash beschreibt, welches sich aus verschiedenen Cash Accounts zusammensetzt für

- den Wert $C(t)$ der Sicherheit in Cash nach CSA,
- den Betrag $V(t, S_t) - C(t)$, der unbesichert aufgenommen werden muss,
- den Betrag $\Delta(t)S_t$, der zum Kauf von $\Delta(t)$ Assets benötigt wird und mit diesen besichert wird, sowie
- den Dividendenbetrag, den das Asset zur Short Rate r_D zahlt.

Das Gesamtwachstum der Cashposition aller dieser vier Cash Accounts ergibt sich somit zu

$$d\gamma(t) = [r_C(t)C(t) + r_F(t)(V(t, S_t) - C(t)) - r_R(t)\Delta(t)S_t + r_D(t)\Delta(t)S_t] dt , \quad (2.18)$$

sodass aus der Selbstfinanzierungsbedingung (2.17) der ITÔ-Formel (B.5)

$$d\gamma(t) = dV(t, S_t) - \Delta(t)S_t = \mathcal{L}V(t, S_t)dt = \frac{\partial}{\partial t} V(t, S_t) + \frac{\sigma_S^2(t)}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} V(t, S_t)$$

ergibt. Mit (2.18) folgt mit $\Delta(t) = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t)$ daraus nach kurzer Umordnung die PDE

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r_R(t) - r_D(t)) \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma_S^2(t) S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = r_F(t)V(t, S_t) - (r_F(t) - r_C(t))C(t) ,$$

woraus sich nach (leicht erweiterter) FEYNMAN-KAC-Formel (vgl. SATZ B.6)

$$V(t, S) = \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}} \left(e^{-\int_t^T r_F(u) du} V(T, S_T) + \int_t^T e^{-\int_t^u r_F(v) dv} (r_F(u) - r_C(u)) C(u) du \middle| \mathcal{F}_t \right) \quad (2.19)$$

der gesuchte Barwert bei gegebenem Auszahlungsprofil $\phi(S_T) = V(T, S_T)$ bestimmen lässt. Darin ist $\tilde{\mathbb{P}}$ das in Unterabschnitt 2.2.1 eingeführte Wahrscheinlichkeitsmaß, unter dem die Logreturns des Assets mit der Rate $r_R - r_D$ wachsen:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r_R(t) - r_D(t))dt + \sigma_S(t)d\tilde{W}_t. \quad (2.20)$$

BEISPIEL 2.6 Als elementares Beispiel sei ein **Zero Strike Call** betrachtet, also die Verpflichtung, zu einem zukünftigen Zeitpunkt $T > 0$ ein bestimmtes (dividendenloses) Asset S zu liefern:

- (1) Es handelt sich also um eine Call-Option mit Strike $K = 0$, sodass sich als Auszahlung

$$\phi(S_T) = S_T^+ = S_T \geq 0$$

ergibt. Nach der klassischen Bewertungstheorie (entsprechend der Herleitung von Satz 2.2) ist damit der Wert $V(t, S_t)$ dieser Option zum Zeitpunkt t immer identisch mit dem Wert des Assets S_t .

- (2) Für eine nicht-besicherte Zero Strike Call-Option erhalten wir

$$V_z(t) = \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}} \left(e^{-\int_t^T r_F(u) du} S_T \middle| \mathcal{F}_t \right),$$

d.h. der Barwert dieses Derivates ist der mit der Funding-Rate (für die unbesicherte Geldaufnahme) diskontierte Barwert des Assetwertes zum Auszahlungszeitpunkt.

- (3) Für eine besicherte Zero Strike Call-Option erhalten wir

$$S_t = \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}} \left(e^{-\int_t^T r_R(u) du} S_T \middle| \mathcal{F}_t \right),$$

wie aus (2.20) für $r_D = 0$ folgt.

Offensichtlich ist in diesem einfachsten Derivat bereits

$$V_z(t) \neq S_t ,$$

was sich ökonomisch daraus ableitet, dass die nicht besicherte Zero Strike Call-Option das Kreditrisiko des Instituts trägt, welches diese geschrieben hat. Anders – in der Sprache des Funding – ausgedrückt bedeutet dies:

- *während das Asset S selbst zur besicherten Geldaufnahme (also zum Funding) verwendet werden kann, wie sich in der verwendeten Diskontrate auch widerspiegelt,*
- *kann die Zero Strike Call-Option V_z nicht dafür herangezogen werden.*

In analoger Form können Bewertungsformeln auch für Forwards und Europäische Optionen unter Berücksichtigung der besicherten oder unbesicherten Geldaufnahme hergeleitet und der Einfluss der verschiedenen Short Rates auf die Bewertungsergebnisse untersucht werden (siehe PITERBARG (2010), [262]).

B. Unterscheidung zwischen Funding- und Diskontierungskurve

Diese Herleitung belegt, dass für eine Bewertung von Derivaten auf ein Asset S die Repo-Rate für dieses als risikoneutrale Rate zu wählen ist, während die Diskontierung zur jeweiligen Funding Rate r_F zu erfolgen hat.

Den bedingten Erwartungswert (2.19) kann man alternativ auch zerlegen gemäß

$$\begin{aligned} V(t, S) = & \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}} \left(e^{-\int_t^T r_C(u) du} V(T, S_T) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ & - \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}} \left(\int_t^T e^{-\int_t^u r_C(v) dv} (r_F(u) - r_C(u)) (V(u) - C(u)) du \middle| \mathcal{F}_t \right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

sodass ausgehend vom risikofreien Marktwert für die einzelnen Produkte sog. *CSA Convexity Adjustments* oder *Basis Adjustments* abgeleitet werden können (vgl. [262] und [27]), die die Anpassungen des Marktwertes für besicherte Derivate beschreiben.

Entsprechende Anpassungen sind insbesondere für die Bewertung von Zins- und Kreditderivaten nötig, welche im einfachsten Falle durch Verwendung unterschiedlicher Kurven zur Diskontierung und zur mit dem Asset besicherten Geldaufnahme oder -anlage in den Investmentbanken umgesetzt wurden. MERCURIO ([233]) erweitert aus diesem Grunde das LIBOR Market Model (LMM) explizit um eine entsprechende stochastische Modellkomponente für die Diskontkurve, welche jedoch noch in gewisser Weise exogen zum klassischen Modellrahmen hinzugenommen wird.

Trotz dieser pragmatischen Lösungsansätze der Praxis ist ein allgemein anerkannter vereinheitlichter Modellrahmen noch nicht gefunden. Erfolgversprechende Ansätze hierfür, die die skizzierten Vorgehensweise von PITERBARG (2010) deutlich (weg von einem homogenen Funding Spread zu geschäftsspezifischen Refinanzierungsbetrachtungen hin) erweitern, liefern die Arbeiten [72, 73, 74] von BURGARD & KJAER (2010,2011,2013), [94, 95, 96] von CRÉPEY (2011, 2012) und [259, 260] von PALLAVICINI et al. (2011, 2012): Insbesondere in letztgenannten wird ausführlich auch auf das Zusammenspiel der Refinanzierungs- und Kontrahentenrisiken eingegangen, die im Allgemeinen keine „einfache“ Anpassung im Sinne eines additiven **Funding Valuation Adjustment (FVA)** sondern nur dessen Berücksichtigung über einen speziellen rekursiven Zusammenhang her erlauben.

BEMERKUNG 2.6 Ähnlich zur Vorgehensweise von PITERBARG (2010) leiten BURGARD & KJAER (2011,2012) in [72, 73] die folgenden PDE für die Bewertung eines Derivates der Laufzeit T auf ein als (zunächst) selbst ausfallrisikolos angesehenes Basisgut (Aktivum) S mit Auszahlungsprofil ϕ und damit verbundener Endbedingung $\hat{V}(T,S) = \phi(S)$ sowie den notwendigen Verträglichkeitsbedingungen (für $S = 0$) und den Randbedingungen

$$\begin{cases} \hat{V}(t,S,1,0) &= M^+(t,S) + R_B M^-(t,S) \quad , \quad \text{für } t = \tau_B < \tau_C \\ \hat{V}(t,S,0,1) &= R_C M^+(t,S) + M^-(t,S) \quad , \quad \text{für } t = \tau_C < \tau_B \end{cases}$$

für den Marktwert $M(t,S)$ zum Zeitpunkt t eines Close Out nach Ausfall einer der Parteien her:

- (1) Unter der Annahme, dass der bei Ausfall eines der beiden Kontrahenten zum Close Out zugrunde gelegte Marktwert M dem risikobehafteten Barwert \hat{V} des Geschäfts (also unter Berücksichtigung der Auf- bzw. Abschläge für das bilaterale Kontrahenten- und das Refinanzierungsrisiko) entspricht, muss \hat{V} der PDE

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{V} + \mathcal{L}_t \hat{V} - r \hat{V} = (1 - R_B) \lambda_B \hat{V}^- + (1 - R_C) \lambda_C \hat{V}^+ + s_F \hat{V}^+$$

genügen, worin (wie im Folgenden)

$$\mathcal{L}_t \hat{V} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial S^2} + (q_S - \gamma_S) S \frac{\partial \hat{V}}{\partial S}$$

den parabolischen Bewertungsoperator (der BLACK-SCHOLES-PDE) für das Underlying vom Preis S und r den risikolosen Zins, r_B die Rendite eines Zerobonds von B mit Recovery Rate 0, r_C die entsprechende Rendite eines Zerobonds von C , $\lambda_B := r_B - r$ bzw. $\lambda_C := r_C - r$ die Credit Spreads von B bzw. C , $s_F = r_F - r$ den Funding Spread, q_S die Nettofinanzierungskosten pro Underlying, γ_S das Dividendeneinkommen und R_X , $X \in \{B, C\}$, die Recovery Rates auf den Marktwert $M(t, S)$ des Geschäfts im Falle des Ausfalles von $X \in \{B, C\}$ bezeichnen. Darin wird schließlich noch unter r_F die Refinanzierungsrate von B verstanden, für welche $r_F = r$ angenommen werden kann, sofern das Derivat als Sicherheit verwendet werden kann, bzw. $r_F = r + (1 - R_B)\lambda_B$ anzusetzen ist, falls das Derivat sich nicht als Sicherheit eignet.

- (2) Ist der Marktwert M des Derivates bei Ausfall jedoch – wie durch die Marktusancen bzw. den ISDA Rahmenvertrag von 2002 nahegelegt – durch den risikolosen Barwert V des Geschäfts gegeben, also $M = V$, so muss der risikobehaftete Marktwert \hat{V} der PDE

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{V} + \mathcal{L}_t \hat{V} - (r + \lambda_B + \lambda_C) \hat{V} = -(R_B \lambda_B + \lambda_C) \hat{V}^- - (\lambda_B + R_C \lambda_C) \hat{V}^+ + s_F \hat{V}^+$$

genügen.

- (3) Für den Fall $M = V$ und $r_F = r + s_F$, also den Fall des Close Outs zum risikolosen Barwert, wobei das Derivat nicht als Sicherheit angedient werden kann, ist $\hat{V} = V + U$ mit einem Risikoaufschlag U , der sich gemäß

$$\begin{aligned} U = & -(1 - R_B) \int_t^T \lambda_B D_{r+\lambda_B+\lambda_C} \mathbb{E}_t (V^-(u, S(u))) du + \\ & + (-(1 - R_C)) \int_t^T \lambda_C D_{r+\lambda_B+\lambda_C} \mathbb{E}_t (V^+(u, S(u))) du + \\ & + \left(- \int_t^T s_F(u) D_{r+\lambda_B+\lambda_C} \mathbb{E}_t (V^+(u, S(u))) du \right) \end{aligned}$$

ermittelt, worin $D_y(t, u) = \exp\left(\int_t^u y(v) dv\right)$ den auf dem Zins y basierenden Diskontfaktor für den Zeitraum von t bis u bezeichnet. Im Falle $s_F = 0$ fällt dieser Aufschlag mit den später noch hergeleiteten bilateralen Anpassungsab- bzw. zuschlägen zusammen, d.h. in diesem Falle erhält man $U = CV A_T$ (siehe Kapitel 4).

In ihrer Nachfolgearbeit [74] untersuchen BURGARD & KJAER (2013) den Einfluss verschiedener Refinanzierungsstrategien auf die Bewertung von Derivaten, wodurch sie die hier skizzierten Ansätze noch weiter erweitern und verallgemeinern konnten.

2.3 Arbitragefreies Marktmodell für das Kreditrisiko

In diesem Abschnitt geben wir eine kurze Einführung in die umfassende mathematische Theorie zur Beschreibung von Finanzmärkten, wobei wir vor allem die Modellierung von kreditrisikobehafteten Produkten im Auge haben.

Dies erfordert eine genauere Betrachtung der zu Grunde liegenden stochastischen Prozesse und eine Präzisierung der Begriffe Handelsstrategie und Arbitragestrategie. Eine vollständige Darstellung dieser Sachverhalte würde den Rahmen unserer Einführung sprengen; wir verweisen diesbezüglich auf die bereits erwähnte Originalliteratur [155, 156, 157] von HARRISON et al. (1979/1981/1983) bzw. auf die Monographien [29, 36, 243] von BIELECKI & RUTKOWSKI (2002), BINGHAM & KIESEL (2004) sowie MUSIELA & RUTKOWSKI (1998). Die Grundlagen der hier benötigten Begriffe aus der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Stochastischen Analysis sind im Anhang zusammengestellt.

2.3.1 Theoretische Grundlagen der Modellierung

Am Beginn der Modellierung eines Finanzmarktes stehen üblicherweise eine Reihe von vereinfachenden Annahmen, die bei der zunehmenden Verfeinerung der Theorie schrittweise beseitigt werden. In unserer einführenden Darstellung hier gehen wir von den „üblichen“ Annahmen aus: Der Markt besteht aus endlich vielen handelbaren Instrumenten (z.B. Aktien, Anleihen), die jederzeit in beliebiger Größenordnung ge- oder verkauft werden können, ohne Beschränkungen für Leerverkäufe. Es gibt keine Steuern, Geld- / Briefspannen oder Transaktionsgebühren, die Zinsen für Geldaufnahmen und Geldanlagen sind gleich und jeder Marktteilnehmer strebt den größtmöglichen Gewinn an. Die Endfälligkeit aller Transaktionen und die gesamte Handelsaktivität liegen innerhalb eines vorgegebenen Intervalls $I := [0; T^*]$ mit $T^* \in (0; \infty)$.

Die aus heutiger Sicht ($t = 0$) nicht vorhersehbare künftige Entwicklung des Marktgeschehens wird durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ modelliert, der neben der σ -Algebra \mathcal{A} mit einer Filtration $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ ausgestattet ist, welche die im Zeitablauf zunehmende Informationsmenge über den Markt reflektiert. Als technische Voraussetzung für die im Folgenden einzuführenden Begrifflichkeiten benötigen wir noch die Bedingungen, dass der Wahrscheinlichkeitsraum **vollständig** ist (also \mathcal{F}_0 alle Nullmengen enthält), dass \mathcal{F}_0 bzgl. \mathbb{P} trivial ist (also $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \mathcal{F}_0$), und damit $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X)$ für integrierbares X und alle zu \mathbb{P} äquivalenten Maße \mathbb{Q}) und dass \mathcal{F} **rechtstetig** ist, d.h. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \sigma\left(\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s\right)$ für alle $t \in I$.

Es gebe $\kappa + 1$ Finanzinstrumente (**Basisinstrumente**), deren Preise am Markt zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ bekannt sind, und mit Hilfe derer ein Modell für die Bewertung neu einzuführender Finanzinstrumente konstruiert wird. Die Preise der Basisinstrumente sind zufallsgetriebene Prozesse, die in unserem Modell mittels adaptierter stochastischer Prozesse

$$(S_t^k(\cdot))_{t \in I}, \quad k \in \{0, \dots, \kappa\},$$

abgebildet werden. Jeder dieser Prozesse sei ein nichtnegatives *Semimartingal* im Sinne von DEFINITION A.12. Insbesondere sind diese Prozesse also rechtsseitig stetig. Die Klasse der Semimartingale wird standardmäßig zur Modellierung von Finanzinstrumenten herangezogen, da sie die für praktische Bewertungsprobleme relevanten Prozesse (geometrische BROWN'sche Bewegung, Sprungprozesse) umfasst und die „allgemeinste“ Klasse von Prozessen ist, bzgl. der **stochastische Integrale** definiert werden können.

Da das Kreditrisiko eines Unternehmens im Zentrum unseres Interesses steht, müssen wir noch spezifizieren, auf welche Weise die hierfür unmittelbar zu berücksichtigenden Kenngrößen (wie z.B. die in Kapitel 1 eingeführten verschiedenen Methoden der Recovery-Zahlung, Informationen über die Bonität eines Unternehmens oder auch nur die stochastische Ausfallzeit) modelliert werden sollen.

NOTATION 2.1 Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ setzen wir die Existenz folgender Objekte voraus, auf die wir in der weiteren Darstellung zurückgreifen werden:

- (1) Einen adaptierten Prozess $FV = (FV_t)_{t \in I}$, der den jeweils aktuellen Wert einer Firma (den sog. **Firm Value**) beschreibt und damit als Indikator für die Bonität des Unternehmens interpretiert werden kann.
- (2) Eine Zufallsvariable X , welche den zu einem vorgegebenen Zeitpunkt $T \in (0; T^*]$ fälligen Rückzahlungsbetrag aus einer Forderung gegenüber der Firma modelliert.

- (3) *Einen zufälligen Zeitpunkt $\tau \in (0; \infty)$, an dem das Ausfallereignis der Firma stattfindet. Falls $\tau > T$, so wird die Forderung vollständig zurückgezahlt.*
- (4) *Eine Zufallsvariable R^* , die den hier als zufällig angenommenen Recovery Betrag beschreibt, welcher zum Zeitpunkt T erzielt wird, falls ein Ausfallereignis zum Zeitpunkt $\tau \in (0; T]$ stattgefunden hat.*
- (5) *Einen Prozess $R^{**} = (R_t^{**})_{t \in I}$, mit $R_0^{**} := 0$, welcher denjenigen zufälligen Recovery Betrag beschreibt, der zum Zeitpunkt τ (also bei Ausfall) erzielt wird, falls ein Ausfallereignis zum Zeitpunkt $\tau \in (0; T]$ stattgefunden hat.*

*Als zusätzliche technische Voraussetzung unterstellen wir dabei, dass FV und R^{**} progressiv messbar sind bzgl. \mathcal{F} und dass X sowie R^* messbar bzgl. \mathcal{F}_T sind.*

Eine Recovery Zahlung kann beispielsweise zum Zeitpunkt des Ausfalls oder aber bei Endfälligkeit der Forderung erfolgen. Durch die Einführung von R^* und R^{**} haben wir beide Fälle abgedeckt – je nach Bedarf wird man eines der beiden Objekte dann auf 0 setzen, genauso wie wir in Kapitel 1 bereits verfahren sind.

2.3.2 Grundannahmen für die Modellierung endfälliger, kreditrisikobehafteter Produkte

Der Einfachheit halber beginnen wir mit der Modellierung endfälliger, kreditrisikobehafteter Produkte. Es handelt sich also um Produkte, bei denen nur bei Endfälligkeit T eine einzige Zahlung vereinbart ist, wie es beispielsweise beim kreditrisikobehafteten Zerobond der Fall ist (vgl. BEISPIEL 1.1). Dazu setzen wir

DEFINITION 2.1 *Die Zufallsvariable*

$$X^d(T) := X \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + R^* \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}}.$$

beschreibt den in T fälligen Rückzahlungsbetrag in Abhängigkeit von einem eventuell eingetretenen Ausfallereignis. Ferner bezeichne $D_t = \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq t\}}$ wie schon in Kapitel 1 den Ausfallindikator.

Damit wäre im Falle, dass die Zahlung der Recovery zur Fälligkeit vereinbart wurde, bereits die Auszahlung eines endfälligen, kreditrisikobehafteten Produktes umfassend beschrieben. Ist jedoch $R^* = 0$ und soll die Ausfallzahlung zum Zeitpunkt τ des Ausfalls erfolgen, müssten wir noch den Prozess R^{**} berücksichtigen. Beide Fälle werden durch den sog. Dividenprozess erfasst, den wir nun einführen wollen.

DEFINITION 2.2 *Durch*

$$\widetilde{D}_t := X^d(T) \cdot \mathbb{1}_{\{t \geq T\}} + \int_{(0;t]} R_u^{**} dD_u, \quad t \in I,$$

wird der **Dividendenprozess** $\widetilde{D} := (\widetilde{D}_t)_{t \in I}$ definiert, der zur oben genannten Forderung gehört.

Der Wert \widetilde{D}_t des Dividendenprozesses in $t \leq T$ ist derjenige kumulierte Betrag, der dem Investor bis zum Zeitpunkt t zusteht: Bei einem Ausfallereignis zur Zeit $\tau < T$ ist das der Betrag R_τ^{**} , und zum Zeitpunkt T ist dies der Betrag X (kein Ausfall) bzw. R^* (Ausfall hat stattgefunden). Gemäß Konstruktion ist \widetilde{D} ein Prozess von endlicher Variation in $[0; T]$, und es gilt die Beziehung

$$\int_{(0;t]} R_u^{**} dD_u = R_\tau^{**} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}.$$

Wir modellieren nun mit dem Prozess

$$X^d := (X^d(t, T))_{t \in I}$$

den Marktwert der kreditrisikobehafteten Forderung für $t \in I$. Darunter verstehen wir den zur Zeit t gültigen Barwert aller künftig (also **nach** t) noch ausstehenden Zahlungsströme (einschließlich eventueller Recovery Zahlungen) aus der Forderung; insbesondere gilt $X^d(T, T) = 0$.

Unser **Ziel** besteht darin, für $X^d(t, T)$ eine Bewertungsformel zu finden. Hierzu bedarf es zunächst einiger theoretischer Vorarbeiten, die in zwei Schritten durchgeführt werden:

Wir wollen im **ersten Schritt** in den folgenden beiden Unterabschnitten die Modellierung eines kreditrisikolosen Marktes beschreiben: Dazu gehen wir i.F. davon aus, dass die oben eingeführten Semimartingale $(S_t^k(\cdot))_{t \in I}$ die Preise von solchen Finanzinstrumenten beschreiben, welche kein Kreditrisiko haben, und welche auch keine Zahlungen vor Endfälligkeit leisten.

Danach werden wir im **zweiten Schritt** in Unterabschnitt 2.3.5 ein zusätzliches Semimartingal $(S_t^{\kappa+1})_{t \in I}$ hinzufügen, welches den Marktwert $S_t^{\kappa+1} = X^d(t, T)$ der kreditrisikobehafteten Forderung zum Zeitpunkt $t \in I$ darstellt.

2.3.3 Allgemeine Arbitragetheorie

Zunächst führen wir das Konzept der *Handelsstrategie* ein. Eine Handelsstrategie ist anschaulich gesprochen eine Vorschrift, die besagt, eine gewisse Anzahl (positiv oder negativ [bei Leerverkäufen]) der $\kappa + 1$ oben erwähnten kreditrisikolosen Finanzinstrumente zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \in I$ im Bestand zu haben.

Wir geben im Folgenden eine formale Definition. Zu den dazu benötigten Begriffen bzgl. stochastischer Prozesse verweisen wir den Leser auf die Darstellung in Anhang A.

DEFINITION 2.3 *Es sei $\varphi := (\varphi_t)_{t \in I} := (\varphi_t^0, \dots, \varphi_t^\kappa)_{t \in I}$ ein $(\kappa + 1)$ -dimensionaler, vorhersehbarer Prozess, dessen Komponenten lokal beschränkte Prozesse seien mit $\int_0^T \mathbb{E}(\varphi_t^0) dt < \infty$, $\sum_{k=0}^\kappa \int_0^T \mathbb{E}((\varphi_t^k)^2) dt < \infty$. Weiter sei $(S_t)_{t \in I} := (S_t^0, \dots, S_t^\kappa)_{t \in I}$ ein aus den oben betrachteten Semimartingalen gebildeter Prozess. Dann heißt φ eine **Handelsstrategie** und $(V_t(\varphi))_{t \in I}$ mit*

$$V_t(\varphi) := \varphi_t \cdot S_t := \sum_{k=0}^\kappa \varphi_t^k \cdot S_t^k, \quad t \in I,$$

der zu φ gehörende **Wertprozess**. Weiter heißt $(G_t(\varphi))_{t \in I}$ mit

$$G_t(\varphi) := \sum_{k=0}^\kappa \int_{(0;t]} \varphi_u^k dS_u^k, \quad t \in I, \quad G_0 := 0,$$

der zu φ gehörende **Gewinnprozess**.

Die Definition des Wertprozesses ist selbsterklärend. Zum Verständnis des Gewinnprozesses stelle man sich die dort auftretenden Integrale jeweils als RIEMANN-Summe vor, und mache sich klar, dass es sich dabei um eine Summe aus den jeweiligen Positionen in den einzelnen Instrumenten, multipliziert mit deren Wertveränderungen handelt. Der Gewinnprozess beschreibt also die bis zu einem Zeitpunkt $t \in I$ kumulierten Gewinne (oder im ungünstigen Fall Verluste) bei Anwendung der Handelsstrategie φ . Zu beachten ist, dass die Prozesse $(S_t^k)_{t \in I}$ als rechtsseitig stetig vorausgesetzt sind.

DEFINITION 2.4 *Eine Handelsstrategie φ heißt **selbstfinanzierend**, falls gilt*

$$V_t(\varphi) = V_0(\varphi) + G_t(\varphi) \iff dV_t(\varphi) = \sum_{k=0}^\kappa \varphi_t^k dS_t^k \quad (t \in I).$$

Anschaulich bedeutet diese Definition, dass bei selbstfinanzierenden Strategien Wertänderungen des Portfolios ausschließlich aufgrund von Wertänderungen der Finanzinstrumente vorkommen und nicht durch Zu- oder Abflüsse von Geld.

Wir werden später sehen, dass es sinnvoll ist, die Preise von Finanzinstrumenten in unserem Markt relativ zu (verschiedenen) anderen Instrumenten zu betrachten. Ein Instrument, bzgl. dessen Wert die Preise der anderen Instrumente relativ gemessen werden, heißt **Numéraire**. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass stets S^0 den Wertverlauf eines Numéraires beschreibt. Um das Standard-Beispiel eines Numéraires einführen zu können, geben wir zunächst folgende Definition.

DEFINITION 2.5 (Forward-Rate) Der zum Zeitpunkt t am Markt beobachtete Zinssatz für eine kreditrisikolose Geldanlage im zukünftigen Zeitraum $[S; T]$ nennt man die **Forward-Rate** $F(t; S, T)$. Man kann zeigen (vgl. [268]), dass folgender Zusammenhang besteht:

$$F(t; S, T) = \frac{1}{T - S} \cdot \frac{P(t, S) - P(t, T)}{P(t, T)} = \frac{1}{T - S} \cdot \left(\frac{P(t, S)}{P(t, T)} - 1 \right), \quad (2.22)$$

worin $P(t, U)$ der zum Zeitpunkt t gültige Preis eines Zerobonds mit Endfälligkeit U ist.

DEFINITION 2.6 (kurzfristige Forward-Rate, Short-Rate)

Für $T \in (0; T^*]$ sei $F : [0; T] \times [0; T] \rightarrow [0; \infty)$ eine stetige Funktion, so dass für alle $t \in [0; T]$ gilt:

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T F(t, s) ds}. \quad (2.23)$$

Man nennt die Funktion F die **kurzfristige Forward-Rate**. Die **Short-Rate** ist definiert durch

$$r(t) := \lim_{T \rightarrow t} F(t, T).$$

Sie stellt den zur Zeit t am Markt gültigen kreditrisikolosen Zinssatz für eine Kapitalanlage von *infinitesimaler* Dauer dar.

Ein häufig verwendeter Numéraire ist nun gegeben durch

$$S_t^0 = B_t := \exp \left(\int_0^t r(u) du \right) \quad t \in I.$$

Wir verwenden hierfür wieder die Bezeichnung **Bankkonto**, da dieser Numéraire eine Geldanlage bei risikoloser stetiger Verzinsung beschreibt. Modelliert man die Short-Rate nicht wie oben als deterministische Funktion sondern allgemeiner als stochastischen Prozess, so gehen wir stets davon aus, dass $(B_t)_{t \in I}$ ein stetiger Prozess von endlicher Variation ist. Dies wird in LEMMA 2.3 eine Rolle spielen. Für einen beliebigen Numéraire $S^0 > 0$ setzen wir

$$\tilde{S}_t^k := \frac{S_t^k}{S_t^0}, \quad t \in I,$$

und sprechen in diesem Zusammenhang vom *diskontierten* Wert \tilde{S}_t^k .

Entsprechend ist

$$\tilde{V}_t(\varphi) := \sum_{k=0}^{\kappa} \varphi_t^k \cdot \tilde{S}_t^k \quad (t \in I)$$

der diskontierte Wertprozess.

Man zeigt nun (vgl. BINGHAM & KIESEL (2004) [36]):

LEMMA 2.2 *Eine Handelsstrategie φ ist selbstfinanzierend genau dann, wenn*

$$\tilde{V}_t(\varphi) = \tilde{V}_0(\varphi) + \tilde{G}_t(\varphi), \quad t \in I,$$

mit

$$\tilde{G}_t(\varphi) := \sum_{k=0}^{\kappa} \int_{(0;t]} \varphi_u^k d\tilde{S}_u^k, \quad t \in I, \quad \tilde{G}_0(\varphi) := 0.$$

Ferner gilt $V_t(\varphi) \geq 0$ genau dann, wenn $\tilde{V}_t(\varphi) \geq 0$.

Eines der zentralen Resultate in den Arbeiten [155], [156] und [157] ist die Erkenntnis, dass das ökonomische Konzept der sog. **Arbitragefreiheit** äquivalent ist zur mathematischen Eigenschaft der Existenz eines gewissen Wahrscheinlichkeitsmaßes, des sog. **äquivalenten Martingalmaßes** oder auch **risikoneutralen Maßes**. Wir erläutern diese Begriffe nun näher.

2.3.4 Äquivalente Martingalmaße

Der Begriff der Arbitragefreiheit bedeutet, dass in einem funktionierenden Markt keine risikolosen Gewinne erzielt werden können, d.h. es gibt keine Arbitragestrategien im folgenden Sinn:

DEFINITION 2.7 *Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie φ heißt **Arbitragestrategie**, falls der Wertprozess $V_t(\varphi)$ die Bedingungen*

$$V_0(\varphi) = 0, \quad \mathbb{P}(V_T(\varphi) \geq 0) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(V_T(\varphi) > 0) > 0$$

für ein $T \in (0; T^]$ erfüllt. Ein **arbitragefreier Markt** liegt vor, wenn keine Arbitragestrategie existiert.*

Zur Motivation der weiteren Vorgehensweise betrachten wir ein (sehr einfaches) Beispiel.

BEISPIEL 2.7 Es sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, und es gebe nur die zwei möglichen Handelszeitpunkte 0 und $T > 0$. Wir setzen $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, ferner sei \mathcal{F}_T die Potenzmenge von Ω . Das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} wird später gewählt. Auf $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in \{0, T\}}, \mathbb{P})$ betrachten wir eine Aktie mit Preisprozess $(S_t^1)_{t \in \{0, T\}}$ und einen Numéraire, der durch $S_t^0 = \exp(r \cdot t)$, $r > 0$, (risikoloser Zins) gegeben ist. Es gelte $S_0^1 > 0$ und

$$S_T^1(\omega) = \begin{cases} S^u > 0 & , \quad \omega = \omega_1 \\ S^d > 0 & , \quad \omega = \omega_2 \end{cases}$$

mit $S^u > S^d$. Es sei $(PV_t)_{t \in \{0, T\}}$ der Preis eines beliebigen Derivates, dessen Underlying die Aktie sei, wobei $PV_0 \in \mathbb{R}$. Da Ω nur zwei Elemente enthält, können wir schreiben

$$PV_T(\omega) = \begin{cases} PV^u \in \mathbb{R} & , \quad \omega = \omega_1 \\ PV^d \in \mathbb{R} & , \quad \omega = \omega_2 \end{cases}$$

Wir bestimmen nun φ^0 und φ^1 derart, dass gilt

$$\varphi^0 \cdot S_T^0 + \varphi^1 \cdot S_T^1(\omega) = PV_T(\omega) \quad (2.24)$$

für alle $\omega \in \Omega$. Die Zufallsvariable PV_T soll also als Linearkombination von S_T^0 und S_T^1 dargestellt werden, oder, wie man auch sagt, das Derivat wird durch die Aktie und den Numéraire repliziert. Das entstehende Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung

$$\varphi^0 = \frac{PV^u \cdot (S_0^1 - S^d) + PV^d \cdot (S^u - S_0^1)}{\exp(r \cdot T) \cdot (S^u - S^d)}, \quad \varphi^1 = \frac{PV^u - PV^d}{S^u - S^d}.$$

Damit liegt folgende Situation vor: Die beiden durch PV_T und $\varphi^0 \cdot S_T^0 + \varphi^1 \cdot S_T^1$ gegebenen Instrumente haben zum Zeitpunkt T für jede Realisation $\omega \in \Omega$ einen identischen Wert. Wenn wir nun unterstellen, unser Markt sei arbitragefrei, so folgt aus dem Law of one Price (BEMERKUNG 2.4) die Gleichheit

$$PV_0 = \varphi^0 \cdot S_0^0 + \varphi^1 \cdot S_0^1 = \varphi^0 + \varphi^1 \cdot S_0^1. \quad (2.25)$$

Wir wählen jetzt das Maß \mathbb{Q} derart, dass $(\tilde{S}_t^1)_{t \in \{0, T\}}$ ein Martingal ist, dass also gilt $\tilde{S}_0^1 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_T^1)$ oder gleichbedeutend

$$\tilde{S}_0^1 = S_0^1 = \mathbb{Q}(\omega_1) \cdot \exp(-r \cdot T) \cdot S^u + (1 - \mathbb{Q}(\omega_1)) \cdot \exp(-r \cdot T) \cdot S^d.$$

Dies impliziert $\mathbb{Q}(\omega_1) = \frac{\exp(r \cdot T) \cdot S_0^1 - S^d}{S^u - S^d}$ und $\mathbb{Q}(\omega_2) = \frac{S^u - \exp(r \cdot T) \cdot S_0^1}{S^u - S^d}$.

Es ergibt sich mit dem so gewählten Maß wegen (2.24) die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(PV_T/S_T^0) &= \varphi^0 + \varphi^1 \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_T^1) \\ &= \varphi^0 + \varphi^1 \cdot \tilde{S}_0^1 = \varphi_0 + \varphi^1 \cdot S_0^1 \\ &\stackrel{(2.25)}{=} PV_0. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt somit, dass unter der Voraussetzung der Arbitragefreiheit der Preis PV_0 nichts anderes ist, als der mit dem Numéraire diskontierte Erwartungswert von PV_T unter dem speziell gewählten **Martingalmaß** \mathbb{Q} . Wegen $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(S_T^1) = S_0^1 \cdot S_T^0 = S_0^1 \cdot \exp(r \cdot T)$ liegt unter \mathbb{Q} eine erwartete Verzinsung der Aktie mit dem risikolosen Zinssatz r vor (unabhängig von der tatsächlichen Kursentwicklung), weshalb man auch vom **risikoneutralen Maß** spricht.

Im Folgenden verallgemeinern wir die im letzten Beispiel betrachteten Zusammenhänge.

DEFINITION 2.8 Ein **äquivalentes Martingalmaß** oder auch **risikoneutrales Maß** \mathbb{Q} ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, für das gilt:

- (1) Die Maße \mathbb{P} und \mathbb{Q} sind äquivalent, d.h. es gilt $\mathbb{P}(A) = 0$ genau dann, wenn $\mathbb{Q}(A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{F}$.
- (2) Der Prozess $(\tilde{S}_t^k)_{t \in I}$ ist für alle $k \in \{0, \dots, \kappa\}$ ein \mathbb{Q} -Martingal.

Wir verwenden nun das Konzept der Arbitragefreiheit in der folgenden Weise: In einem gegebenen Markt, auf dem bereits eine Menge von Basisinstrumenten gehandelt werden, wird ein neues Derivat eingeführt, das durch seine Auszahlungen in der Zukunft beschrieben ist. Falls es möglich ist, die Zahlungen aus dem Derivat zu *replizieren*, d.h. ein (selbstfinanzierendes) Portfolio aus den bereits vorhandenen Instrumenten zu bilden, welches genau dasselbe Auszahlungsprofil hat wie das Derivat, so muss das Derivat denselben Wert haben wie das Portfolio. Dies ist eine einfache Folgerung aus dem *Law of One Price* (vgl. BEMERKUNG 2.4). Da aber der Wert des replizierenden Portfolios bekannt ist, gelangen wir auf diese Weise zu einem Marktwert für das Derivat!

Die Replizierbarkeit mittels handelbarer Basisinstrumente ist eine der grundlegenden Voraussetzungen für die theoretische Bewertung von Derivaten. Wir geben zunächst die formale Definition und betrachten sodann ein Beispiel. Im Rahmen der Definition nehmen wir die Existenz eines Martingalmaßes \mathbb{Q} als gegeben an und bezeichnen eine Handelsstrategie φ als **zulässig** bzgl. \mathbb{Q} , wenn der zugehörige Gewinnprozess $(\tilde{G}_t(\varphi))_{t \in I}$ ein Martingal ist, was bei entsprechenden Integrierbarkeitsvoraussetzungen an φ und geeigneter Wahl von φ_t^0 stets erreichbar ist. Doch nun zur Definition:

DEFINITION 2.9 Gegeben sei ein Derivat mit Auszahlungszeitpunkt $T \in (0; T^*]$, dessen Auszahlungsprofil durch eine quadrat-integrierbare und positive Zufallsvariable ϕ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ beschrieben werde. Man nennt ϕ ein **contingent claim**. Ein contingent claim ϕ (bzw. das zugehörige Derivat) heißt **replizierbar**, wenn eine zulässige, selbstfinanzierende Handelssstrategie φ existiert, so dass gilt

$$V_T(\varphi) = \phi.$$

Eine solche Strategie **erzeugt** ϕ , und wir setzten

$$PV_t := V_t(\varphi), \quad t \in I,$$

der sich aus der Strategie φ ergebende, zu ϕ gehörende Preis.

Für ein gegebenes contingent claim ϕ muss der in DEFINITION 2.9 festgelegte Preis nicht notwendigerweise eindeutig bestimmt sein, denn es könnte ja mehrere Strategien φ geben, die ϕ erzeugen. Wir werden im nächsten Satz allerdings sehen, dass unter der Voraussetzung der Existenz eines äquivalentes Martingalmaß der soeben definierte Preis die einzig mögliche Wahl ist - ansonsten gäbe es Arbitragemöglichkeiten am Markt.

BEMERKUNG 2.7 Beschreibt S_t eine Marktvariable, so kann ϕ von der Form $\phi = \phi(S_T)$ sein, oder allgemeiner auch von der Form $\phi = \phi((S_u)_{u \leq T})$. Wichtig ist, dass die Auszahlung des Derivates nur am Zeitpunkt T stattfinden kann; im Falle von Optionen bedeutet dies eine Beschränkung auf Europäische Optionen.

BEISPIEL 2.8 Wir konstruieren eine selbstfinanzierende Strategie handelbarer Instrumente φ , die den Wert einer Call-Option auf eine Aktie im Rahmen der BLACK-SCHOLES-Welt repliziert. Die Aktienoption habe die Laufzeit $T > 0$ und den Strike K , der aktuelle Zeitpunkt sei $t_0 := 0$. Die Größen s , r , σ und $d_{1,2}^{BS}$ seien wie in Unterabschnitt 2.2.3 definiert. Es bezeichne $h(t, s)$ den Wert der Call-Option zur Zeit $t \in [0; T]$ bei gegebenem Aktienkurs $s = S_t$. Des Weiteren seien B_t , δ_t und ψ_t wie in Unterabschnitt 2.1.1 bzw. 2.1.2 definiert, also gilt $\delta_t = \frac{\partial h}{\partial s}(t, S_t)$ sowie $\psi_t = B_t^{-1} \cdot (h(t, S_t) - \delta_t \cdot S_t)$.
Durch

$$\varphi := (\varphi_t^0, \varphi_t^1) := (\psi_t, \delta_t),$$

und

$$S_t^0 := B_t = e^{r \cdot t}, \quad S_t^1 := S_t$$

wird ein Portfolio aus den handelbaren Instrumenten gebildet (Bankkonto bzw. Aktienposition).

Der Wert dieses Portfolios zur Zeit $t \in [0; T]$ beträgt

$$\begin{aligned} V_t(\varphi) &= \varphi_t^0 \cdot S_t^0 + \varphi_t^1 \cdot S_t^1 \\ &= \psi_t \cdot B_t + \delta_t \cdot S_t. \\ &= h(t, S_t). \end{aligned}$$

Ist diese Strategie selbstfinanzierend? Dazu ist gemäß DEFINITION 2.4 zu zeigen, dass gilt

$$dV_t(\varphi) = \varphi_t^0 \cdot dS_t^0 + \varphi_t^1 \cdot dS_t^1. \quad (2.26)$$

Das ist aber gerade die Aussage (2.8)! Im Nachhinein betrachtet, haben wir also wegen der Gültigkeit von Gleichung (2.8) in Unterabschnitt 2.1.1 zur Herleitung der BLACK-SCHOLES-PDE nichts anderes getan, als eine selbstfinanzierende, replizierende Strategie zu konstruieren.

Der folgende Satz aus HARRISON & PLISKA (1981) [156] zeigt nun, dass die Existenz eines Martingalmaßes die Existenz eines eindeutigen Preises für ein replizierbares contingent claim nach sich zieht. Das Resultat stellt eine Verallgemeinerung von SATZ 2.2 dar.

SATZ 2.4 Falls auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein äquivalentes Martingalmaß \mathbb{Q} existiert und ϕ ein replizierbares contingent claim mit Fälligkeit in $T \in (0; T^*]$ ist, so ist der Preis PV_t von ϕ für alle $t \in [0; T]$ durch

$$PV_t := S_t^0 \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{\phi}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(S_t^0 \cdot \frac{\phi}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right) \quad (2.27)$$

eindeutig festgelegt.

BEMERKUNG 2.8

- (1) Die im Satz angegebene Gleichheit der beiden Erwartungswerte ergibt sich aus der Tatsache, dass $(S_t^0)_{t \in [0; T]}$ ein adaptierter Prozess ist.
- (2) Der durch $(PV_t)_{t \in I}$ gegebene Prozess erfüllt gemäß Satz die Bedingung

$$\frac{PV_t}{S_t^0} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{PV_T}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right),$$

weshalb der relative Preisprozess $(PV_t/S_t^0)_{t \in I}$ ein \mathbb{Q} -Martingal ist.

- (3) Es sei $S_t, t \in [0; T]$, der Preis eines handelbaren Finanzinstruments. Ferner sei ein Derivat mit Auszahlungsfunktion $\phi(S_T)$ gegeben. Wir wählen als Numéraire speziell $S_t^0 := B_t$. Dann gilt unter den Voraussetzungen des obigen Satzes

$$\begin{aligned} PV_t &= e^{\int_0^t r(s)ds} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_0^T r(s)ds} \cdot \phi(S_T) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T r(s)ds} \cdot \phi(S_T) \middle| \mathcal{F}_t \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

- (4) Jedes am Markt gehandelte Basisinstrument erfüllt die Voraussetzungen des Satzes, so dass Formel (2.28) also auch für die Bewertung von Anleihen und Zerobonds gilt! Für einem Zerobond mit Laufzeit $T \in (0; T^*]$ und Nominal N ist das Auszahlungsprofil gegeben durch $\phi := N$, und damit erhalten wir den Preis $PV_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T r(s)ds} \cdot N \middle| \mathcal{F}_t \right)$. Insbesondere gilt

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T r(s)ds} \middle| \mathcal{F}_t \right) = B_t \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(B_T^{-1} \middle| \mathcal{F}_t \right). \quad (2.29)$$

GRUNDANNAHME 2.1 Wir unterstellen im Folgenden stets die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes. Ferner nehmen wir an, dass unendlich viele Zerobonds als jederzeit handelbare Basisinstrumente zur Verfügung stehen, und dass für jedes zu bewertende Derivat eine selbstfinanzierende Replikationsstrategie vorliegt, d.h. das Auszahlungsprofil kann zu jedem Zeitpunkt durch endlich viele Basisinstrumente nachgebildet werden. Es gilt dann die Bewertungsformel (2.28).

Die Frage nach der Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes wird durch das sog. **Fundamental Theorem of Asset Pricing** beantwortet. Es garantiert (für eine gewisse Klasse zulässiger Handelsstrategien) die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes genau dann, wenn eine gewisse ökonomische Bedingung erfüllt ist, die ähnlich der Forderung nach Arbitragefreiheit ist. Diese Bedingung ist jedoch stärker als die Eigenschaft der Arbitragefreiheit. Wir verweisen diesbezüglich auf die Literatur DELBAEN & SCHACHERMAYER (1994) [104]. Die Bedeutung dieses Resultats besteht darin, dass es eine Verbindung herstellt zwischen einer ökonomischen Bedingung (Arbitragefreiheit) und einer mathematischen Eigenschaft (Existenz eines Martingalmaßes).

DEFINITION 2.10 Ein Markt heißt **vollständig**, wenn jedes Derivat replizierbar ist.

HARRISON und PLISKA bewiesen 1983 in [157] das folgende fundamentale Ergebnis:

SATZ 2.5 Ein Markt (mit gegebenem Numéraire) ist arbitragefrei und vollständig genau dann, wenn ein eindeutig bestimmtes äquivalentes Martingalmaß existiert.

2.3.5 Bewertung endfälliger, kreditrisikobehafteter Forderungen

An dieser Stelle kehren wir zurück zu der anfangs betrachteten kreditrisikobehafteten Forderung und ergänzen unseren Markt in einem zweiten Schritt, wie oben bereits ausgeführt, durch ein Semimartingal $(S_t^{\kappa+1})_{t \in I}$ mit $S_t^{\kappa+1} = X^d(t, T)$, $t \in I$.

Die ursprüngliche Handelsstrategie φ wird nun erweitert zur Strategie $\varphi := (\varphi_t)_{t \in I} := (\varphi_t^0, \dots, \varphi_t^{\kappa+1})_{t \in I}$, sie umfasst also das neu eingeführte Finanzinstrument.

GRUNDANNAHME 2.2 *Wir unterstellen auch im erweiterten Modell, dass Arbitragefreiheit vorliegt und dass für jedes zu bewertende Finanzinstrument eine selbstfinanzierende Replikationsstrategie existiert.*

Mit der Annahme der Arbitragefreiheit folgt die Existenz eines risikoneutralen Maßes \mathbb{Q} , unter dem alle diskontierten Prozesse $(\tilde{S}_t^k)_{t \in I}$, $k \in \{0, \dots, \kappa+1\}$, Martingale sind. Wir nehmen zusätzlich an, dass die betrachteten Handelsstrategien φ zulässig sind, so dass also der in Analogie zu DEFINITION 2.3 definierte Gewinnprozess

$$(\tilde{G}_t(\varphi))_{t \in I}$$

ein Martingal bzgl. \mathbb{Q} ist. Man kann zeigen, dass dann die folgende Aussage gilt (vgl. Lemma 2.1.1 in BIELECKI & RUTKOWSKI (2002) [29]):

LEMMA 2.3 *Wir betrachten die folgende Handelsstrategie $\psi := (\psi_t)_{t \in I}$: Zum Zeitpunkt 0 wird das kreditrisikobehaftete Instrument $\kappa+1$ zum Preis $S_0^{\kappa+1}$ gekauft und bis T gehalten. Ferner befindet sich zur Zeit $t \in I$ eine Position der Größe ψ_t^0 bzgl. des Bankkontos im Bestand, weitere Positionen gibt es nicht. Dann gilt*

$$\tilde{G}_T(\psi) = \tilde{G}_t(\psi) + \tilde{S}_T^{\kappa+1} - \tilde{S}_t^{\kappa+1} + \int_{(t;T]} B_u^{-1} d\tilde{D}_u.$$

Mit der Konvention $S_t^{\kappa+1} = X^d(t, T)$, $t \in I$, also $S_T^{\kappa+1} = X^d(T, T) = 0$ und damit auch $\tilde{S}_T^{\kappa+1} = 0$, folgt nun

SATZ 2.6 *Für alle $t \in I$ gilt*

$$X^d(t, T) = B_t \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\int_{(t;T]} B_u^{-1} d\tilde{D}_u \middle| \mathcal{F}_t \right), \quad (2.30)$$

BEWEIS: Wir betrachten die Handelsstrategie aus dem vorhergehenden Lemma. Da $(\tilde{G}_t(\psi))_{t \in I}$ ein Martingal ist, haben wir

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\tilde{G}_T(\psi) - \tilde{G}_t(\psi) \middle| \mathcal{F}_t \right) = 0.$$

Mit LEMMA 2.3 ergibt sich daraus

$$\tilde{S}_t^{\kappa+1} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\tilde{S}_T^{\kappa+1} + \int_{(t;T]} B_u^{-1} d\tilde{D}_u \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

Multipliziert man dies mit B_t und beachtet $\tilde{S}_T^{\kappa+1} = 0$, so folgt die Behauptung. \square

Als erste Anwendung dieses Satzes leiten wir eine allgemeine Bewertungsformel für einen kreditrisikobehafteten Zerobond her, bei dem eine Recovery Zahlung ggf. nur zum Zeitpunkt T der Endfälligkeit erfolgt (vgl. hierzu auch die Ausführungen in Abschnitt 1.3).

BEISPIEL 2.9 (Zerobond mit Kreditrisiko)

Für einen kreditrisikobehafteten Zerobond mit Recovery Zahlung bei Fälligkeit, der zur Zeit t noch nicht ausgefallen ist, gilt $R^{**} = 0$ und damit nach DEFINITION 2.2

$$\tilde{D}_t = (X \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + R^* \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}}) \cdot \mathbb{1}_{\{t \geq T\}}.$$

Aus der Beziehung

$$\begin{aligned} \int_{(t;T]} B_u^{-1} d\tilde{D}_u &= (X \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + R^* \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}}) \cdot \int_{(t;T]} B_u^{-1} d\mathbb{1}_{\{u \geq T\}} = \\ &= (X \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + R^* \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}}) \cdot B_T^{-1} \end{aligned}$$

folgt mit (2.30) daher für den Barwert

$$P^d(t, T) := B_t \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left((X \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + R^* \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}}) \cdot B_T^{-1} \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

Für $t = 0$ ergibt sich im Falle von im Zeitablauf unveränderlichen Zinsen ($B_t = \exp(r_0(t) \cdot t)$):

$$\begin{aligned} P^d(0, T) &= \exp(-r_0(T) \cdot T) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(X \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + R^* \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}} \middle| \mathcal{F}_0 \right) = \\ &= \exp(-r_0(T) \cdot T) \cdot (X \cdot (1 - p_{D_T}) + R^* \cdot p_{D_T}) \end{aligned}$$

wobei p_{D_T} die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls in $(0; T]$ bezeichne. Dies entspricht den intuitiven Überlegungen aus BEISPIEL 1.1. Ist $R^* = 0$, so folgt weiter

$$P^d(0, T) = \exp(-r_0(T) \cdot T) \cdot X \cdot (1 - p_{D_T}),$$

so dass der Zerobondpreis also gleich dem diskontierten Rückzahlungsbetrag multipliziert mit der Überlebenswahrscheinlichkeit ist - wie nicht anders zu erwarten.

2.3.6 Berücksichtigung kreditrisikobehafteter Kuponzahlungen

Wir verallgemeinern nun die DEFINITION 2.2 in der Weise, dass der Dividendenprozess auch regelmäßige Zahlungen (etwa Kupons bei einer Anleihe oder Prämienzahlungen eines CDS) beinhaltet:

DEFINITION 2.11 Es sei $A = (A_t)_{t \in I}$ ein progressiv messbarer Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, der die kontinuierlichen oder diskreten Zahlungen aus einer Forderung beschreibt. Dann wird durch

$$\widetilde{D}_t := X^d(T) \cdot \mathbb{1}_{\{t \geq T\}} + \int_{(0; t]} (1 - D_u) dA_u + \int_{(0; t]} R_u^{**} dD_u, \quad t \in I,$$

der Dividendenprozess $\widetilde{D} := (\widetilde{D}_t)_{t \in I}$ definiert.

BEMERKUNG 2.9 Anschaulich besagt der neu hinzu gekommene mittlere Summand in dieser Definition, dass die regelmäßigen Zahlungen aus der Forderung nur solange erfolgen, wie kein Ausfallereignis stattgefunden hat. Es gilt

$$\int_{(0; t]} (1 - D_u) dA_u = \int_{(0; t]} \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} dA_u = A_{\tau-} \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}} + A_t \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}.$$

Hierbei ist $A_{\tau-}$ als der linksseitige Grenzwert von A_τ zu verstehen. Der Prozess $(A_t)_{t \in I}$ wird daher auch als **Prämienprozess** bezeichnet.

In Analogie zu SATZ 2.6 kann man zeigen, dass auch für Forderungen mit dem so definierten allgemeineren Dividendenprozess die Bewertungsformel (2.30) ihre Gültigkeit behält. Wir werden sie demgemäß auch in der allgemeineren Situation anwenden.

BEISPIEL 2.10 (kreditrisikobehaftete Anleihe)

Wir betrachten etwa eine kreditrisikobehaftete Anleihe mit den in Unterabschnitt 1.5.2 genannten Zahlungsströmen und gegebener fixer Recovery Rate R . Es gilt in diesem Fall $R^* = 0$, $R_t^{**} = R \cdot N \cdot \mathbb{1}_{\{\tau = t\}}$, $X^d(T) = N \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}}$, $D_t = \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq t\}}$ und

$$A_t = \sum_{i=1}^n C(t_i) \cdot \mathbb{1}_{\{t = t_i\}}.$$

Der Dividendenprozess ist daher gegeben durch

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_t &= N \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} \cdot \mathbb{1}_{\{t \geq T\}} + \int_{(0;t]} \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} dA_u + R \cdot N \cdot \int_{(0;t]} \mathbb{1}_{\{\tau = u\}} dD_u = \\ &= N \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} \cdot \mathbb{1}_{\{t \geq T\}} + \sum_{i=1}^n C(t_i) \cdot \mathbb{1}_{\{t = t_i\}} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} + \\ &\quad + R \cdot N \cdot \mathbb{1}_{\{\tau = t\}} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}},\end{aligned}$$

so dass wir für $t \leq t_1$ gemäß (2.30) für den Barwert PV_t der Anleihe erhalten

$$\begin{aligned}PV_t &= B_t \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\int_{(t;T]} B_u^{-1} d\widetilde{D}_u \middle| \mathcal{F}_t \right) = \\ &= B_t \cdot N \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} \cdot B_T^{-1} \middle| \mathcal{F}_t \right) + B_t \cdot \sum_{i=1}^n C(t_i) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{\tau > t_i\}} \cdot B_{t_i}^{-1} \middle| \mathcal{F}_t \right) + \\ &\quad + B_t \cdot N \cdot R \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} \cdot B_T^{-1} \middle| \mathcal{F}_t \right).\end{aligned}\tag{2.31}$$

Bei im Zeitablauf unveränderlichen Zinsen ($B_t = \exp(r_0(t) \cdot t)$) ergibt sich für $t = 0$:

$$\begin{aligned}PV_0 &= \exp(-r_0(T) \cdot T) \cdot N \cdot (1 - p_{D_T}) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n C(t_i) \cdot \exp(-r_0(T) \cdot t_i) \cdot (1 - p_{D_{t_i}}) + \\ &\quad + B_t \cdot N \cdot R \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} \cdot B_T^{-1} \right),\end{aligned}\tag{2.32}$$

wobei p_{D_t} wieder die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls in $(0; t]$ bezeichne.

2.3.7 Anwendung von Numéraire-Techniken

Bei der Ermittlung des Preises eines Finanzinstruments mittels Formel (2.30) zeigt sich in der Praxis häufig, dass eine explizite Berechnung des Erwartungswertes unter dem Martingalmaß sehr schwierig ist, was unter anderem an dem im Erwartungswert auftretenden Numéraire liegt. Aus diesem Grund ist es wünschenswert, den Erwartungswert ggf. unter Verwendung eines anderen, dem jeweiligen Derivat angepassten Numéraires zu berechnen. Ein solcher **Numérairewechsel** ist eine fundamentale Technik bei der Bewertung von Derivaten.

Besonders nützlich für die Anwendungen ist die Verwendung eines (kreditrisikolosen) Zerobonds, dessen Fälligkeit mit der des zu bewertenden Instruments übereinstimmt. Das zugehörige Martingalmaß wird mit \mathbb{Q}^T bezeichnet und heißt **T -Forward-Maß**.

Es gilt die Beziehung

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{P(t,T)}{B_t \cdot P(0,T)} \quad \mathbb{Q}\text{-fast sicher} \quad (2.33)$$

(vgl. MUSIELA & RUTKOWSKI (1998) [243]), wobei auf der linken Seite der Gleichung die RADON-NIKODYM-Ableitung gemäß SATZ A.1 steht und $P(t,T)$ der Barwert des kreditrisikolosen Zerobonds ist.

BEMERKUNG 2.10 Die Bezeichnung „ T -Forward-Maß“ wird durch die Tatsache gerechtfertigt, dass der Prozess $(F(t; S, T))_{t \in [0; S]}$ der Forward-Raten unter diesem Maß ein Martingal ist (vgl. REITZ, MARTIN & SCHWARZ (2004) [268]).

Der folgende Satz zeigt, wie die Bewertung unter dem Forward-Maß erfolgt.

SATZ 2.7 Es sei $X^d(t, T)$ der Barwert einer kreditrisikobehafteten Forderung mit $R^{**} = 0$ und $A = 0$. Dann gilt für alle $t \in I$

$$PV_t = P(t, T) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left(X \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + R^* \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}} \Big| \mathcal{F}_t \right). \quad (2.34)$$

BEWEIS: Aus SATZ 2.6 folgt zunächst wie in BEISPIEL 2.9

$$PV_t = B_t \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left((X \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + R^* \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}}) \cdot B_T^{-1} \Big| \mathcal{F}_t \right),$$

und bei Anwendung von (2.33) mit $t = T$ ergibt sich daraus (wegen $\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \frac{1}{B_T \cdot P(0, T)}$):

$$PV_t = B_t \cdot P(0, T) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left((X \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + R^* \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}}) \cdot \frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_T} \Big| \mathcal{F}_t \right).$$

Gemäß den Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte können wir weiter schreiben

$$\begin{aligned} PV_t &= B_t \cdot P(0, T) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left(X \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + R^* \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}} \Big| \mathcal{F}_t \right) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_T} \Big| \mathcal{F}_t \right) = \\ &= B_t \cdot P(0, T) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left(X \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + R^* \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}} \Big| \mathcal{F}_t \right) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{1}{B_T \cdot P(0, T)} \Big| \mathcal{F}_t \right) = \\ &= P(t, T) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left(X \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + R^* \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}} \Big| \mathcal{F}_t \right), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt (2.29) verwendet haben. □

BEMERKUNG 2.11 Der wesentliche Punkt im letzten Satz besteht darin, dass durch Verwendung des Forward-Maßes der Term $P(t, T)$ „automatisch“ vor den Erwartungswert gezogen wird. Dies ermöglicht die Berechnung der auftretenden Ausdrücke, falls $P(t, T)$ nicht deterministisch, sondern eine Zufallsvariable ist.

Im Folgenden verwenden wir das Forward-Maß, um eine allgemeine Bewertungsformel für kreditrisikobehaftete Zerobonds bei stochastischen Zinsen anzugeben und weiter zur formalen Betrachtung von *Credit Spreads*. Wir geben jedoch zunächst eine Definition und führen dann BEISPIEL 2.9 fort, bevor wir zu stochastischen Zinsen übergehen.

DEFINITION 2.12 Für einen zum Zeitpunkt 0 noch nicht ausgefallenen kreditrisikobehafteten Zerobond mit Nominalbetrag X sei $LGD^* := 1 - R^*/X$ der zufällige Loss Given Default. Die Größe

$$LGD^{\mathbb{Q}}(t, T) := \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(LGD^* \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}} | \mathcal{F}_t)}{\mathbb{Q}(0 < \tau \leq T | \mathcal{F}_t)}$$

wird **bedingter erwarteter risikoneutraler Loss Given Default** genannt, und

$$p_D^{\mathbb{Q}}(t, T) := \mathbb{Q}(0 < \tau \leq T | \mathcal{F}_t)$$

ist die **bedingte risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeit**. Bei Verwendung des Forward-Maßes anstelle des Maßes \mathbb{Q} ersetzt man die Bezeichnung „risikoneutral“ jeweils durch „forward risikoadjustiert“.

BEISPIEL 2.11 Für den Zerobond aus BEISPIEL 2.9 findet man bei der Annahme deterministischer Zinsen nach kurzer Rechnung

$$P^d(t, T) = P(t, T) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(X - X \cdot LGD^* \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}} \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

Verwendet man die in obiger Definition eingeführten Größen, so gilt weiter

$$P^d(t, T) = P(t, T) \cdot X \cdot (1 - p_D^{\mathbb{Q}}(t, T) \cdot LGD^{\mathbb{Q}}(t, T)),$$

sodass der Barwert also gleich dem diskontierten Nominal, multipliziert mit der Größe „1 – wahrscheinlichkeitsgewichtete Verlustquote“, ist. Bei konstanter Recovery Rate, also $R^* = R \cdot X$, folgt $LGD^{\mathbb{Q}}(t, T) = 1 - R$ und daher

$$P^d(t, T) = P(t, T) \cdot X \cdot (1 - p_D^{\mathbb{Q}}(t, T) \cdot (1 - R)).$$

In die Bewertung kreditrisikobehafteter Finanzinstrumente fließt, wie aus Gleichung (2.30) hervorgeht, die künftige Entwicklung der (kreditrisikolosen) Zinsen ein, und zwar über die Ausdrücke B_t bzw. B_u . Nun ist es bei der Bewertung zinsabhängiger Instrumente üblich, eine stochastische Modellierung der Zinsen vorzunehmen, im Rahmen der sog. **Zinsstrukturmodelle** (vgl. REITZ, MARTIN & SCHWARZ (2004) [268]). Auch bei der Bewertung von kreditrisikobehafteten Instrumenten kann man analog mit stochastischen Zinsen arbeiten, wobei der Fall deterministischer Zinsen hier mit eingeschlossen ist. Die in die Bewertungsformeln (2.28) und (2.29) einfließenden Terme, bei denen die Short-Rate auftritt, sind dann im Allgemeinen zufällige Größen. Wir werden in Unterabschnitt 2.4.1 darauf zurückkommen und betrachten hier zunächst folgendes Beispiel:

BEISPIEL 2.12 (Zerobond mit Kreditrisiko bei stochastischen Zinsen)

Wir wenden Gleichung (2.34) auf den Zerobond aus BEISPIEL 2.9 an und finden

$$P^d(t, T) = P(t, T) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left(X \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + R^* \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}} \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

Dabei ist zu beachten, dass die Herleitung dieser Gleichung nicht auf der Annahme deterministischer Zinsen erfolgte. Analog zu BEISPIEL 2.11 formen wir dies um zu

$$P^d(t, T) = P(t, T) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left(X - X \cdot LGD^* \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}} \middle| \mathcal{F}_t \right),$$

und können dann schreiben

$$P^d(t, T) = P(t, T) \cdot X \cdot (1 - p_D^{\mathbb{Q}^T}(t, T) \cdot LGD^{\mathbb{Q}^T}(t, T)).$$

Im Falle einer konstanten Recovery Rate, also $R^* = R \cdot X$, folgt wieder $LGD^{\mathbb{Q}^T}(t, T) = 1 - R$ und somit

$$P^d(t, T) = P(t, T) \cdot X \cdot (1 - p_D^{\mathbb{Q}^T}(t, T) \cdot (1 - R)). \quad (2.35)$$

Wenn τ eine Stoppzeit bzgl. \mathcal{F} ist (wie etwa bei den Unternehmenswertmodellen), so erhalten wir schließlich die Darstellung

$$P^d(t, T) = \begin{cases} P(t, T) \cdot R \cdot X & , \quad \text{auf } \{\tau \leq t\}, \\ P(t, T) \cdot (1 - p_D^{\mathbb{Q}^T}(t, T) \cdot (1 - R)) \cdot X & , \quad \text{auf } \{\tau > t\}. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Bewertungsformel (2.35) definieren wir den **Credit Spread eines Zerobonds** und zwar bei einem Nominalbetrag von $X = 1$, was sich leicht verallgemeinern lässt, und bei einer konstanten Recovery Rate R , auszahlbar zur Zeit T . Dazu führen wir zunächst die **kreditrisikolose Rendite**

$$y_t(T) := -\frac{\log P(t,T)}{T-t}$$

ein, und dann die **kreditrisikobehaftete Rendite** $y_t^d(T)$, die nur im Fall $\tau > t$, also vor Ausfall, eingeführt wird:

$$y_t^d(T) := -\frac{\log P^d(t,T)}{T-t}.$$

DEFINITION 2.13 Der **Credit Spread** eines Zerobonds mit Nominalbetrag 1 und fixer Recovery Rate R , zahlbar an T , ist vor einem Ausfallereignis, also für $\tau > t$, definiert durch

$$s_t^y(T) := y_t^d(T) - y_t(T) = -\frac{\log(1 - p_D^{\mathbb{Q}^T}(t,T) \cdot (1 - R))}{T-t},$$

wobei die letzte Gleichung wegen (2.35) gilt und damit der Fall stochastischer Zinsen mit eingeschlossen ist (vgl. auch Abschnitt 1.4).

2.4 Modellklassen für das Ausfallereignis

Im letzten Abschnitt haben wir in SATZ 2.6 eine sehr allgemeine Bewertungsformel für kreditrisikobehaftete Instrumente hergeleitet, basierend auf der Annahme der Arbitragefreiheit des Marktes. Unser weiteres Ziel besteht nun darin, diese Formel „mit Leben zu füllen“, und zwar dergestalt, dass wir für die Beschreibung des Ausfallzeitpunktes τ konkrete stochastische Modelle einführen.

Ein Blick in die Standardwerke zum Thema Kreditrisiko (z.B. BIELECKI & RUTKOWSKI (2002) [29]) zeigt, dass zwei große Modellklassen zu unterscheiden sind: Zum einen die sog. **Unternehmenswertmodelle**, bei denen der Firmenwert im Vergleich zur Höhe der Schulden eines Unternehmens analysiert wird und zu einer *endogenen* Bestimmung von τ führt (d.h. der Ausfallzeitpunkt hängt von der Kapitalstruktur des Unternehmens ab und ist insofern vorhersehbar), und zum anderen die **Hazardraten- und Intensitätsmodelle**, bei denen ein Ausfallereignis *exogen* modelliert wird, typischerweise mit einem *Sprungprozess*, und insofern „überraschend“ stattfindet.

2.4.1 Unternehmenswertmodelle

Das prominenteste Beispiel eines Unternehmenswertmodells ist dasjenige in [234] von MERTON aus dem Jahre 1974. Bei dieser Modellklasse ergibt sich der

mögliche Ausfallzeitpunkt τ eines Unternehmens aus dem Verhalten des Unternehmenswertes FV_t , dem sog. Firm Value. Der Unternehmenswert ist in diesem Zusammenhang gleich dem Marktwert aller Aktiva des Unternehmens, und beide Werte sind gleich der Summe der Marktwerte von Eigen- und Fremdkapital. Im Zentrum der Betrachtung steht die Kapitalstruktur des Unternehmens, d.h. die anteilige Finanzierung von FV_t durch Eigen- bzw. Fremdkapital - daher spricht man auch von **strukturellen Modellen**. Ein Ausfall findet statt, wenn der Firmenwert unter die Grenze des Fremdkapitals absinkt und damit das Eigenkapital negativ wird. Die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls ist um so kleiner, je höher der Wert von FV_t im Vergleich zum Fremdkapital ist, da sich das Unternehmen im Krisenfall durch den Verkauf von Aktiva oder durch eine Kapitalerhöhung entschulden kann.

Das MERTON-Modell erlaubt eine einfache Bewertung von Kreditrisiken mit den Hilfsmitteln der Optionspreistheorie. Zu seinen weiteren Stärken zählen die unmittelbare Definition des Ausfallereignisses anhand ökonomischer Kriterien, die Verwendung von (im Prinzip) bekannten Marktparametern zur Kalibrierung und die Tatsache, dass es eine relativ einfache Berechnung von Korrelationen im Rahmen der Kreditportfoliomodellierung erlaubt.

Im klassischen MERTON-Modell werden einige signifikante Vereinfachungsannahmen gemacht, die eine vollständige Modellierung aller Arten von Verbindlichkeiten eines realen Unternehmens nicht zulassen: Die Verbindlichkeiten bestehen aus einem einzelnen Zerobond, das Ausfallereignis kann nur zur Endfälligkeit desselben eintreten, es entstehen keine Abwicklungskosten, und die Zinsen sind konstant. Ferner ist das MERTON-Modell nicht dazu geeignet, die in der Realität beobachteten Credit Spreads vollständig abzubilden. Zahlreiche Weiterentwicklungen versuchen die Schwächen des ursprünglichen Ansatzes zu beheben: BLACK & COX (1976) [40] führen u.a. eine realitätsnähere Verbindlichkeitenstruktur ein, GESKE (1977) [139] betrachtet Kuponanleihen statt Zerobonds mittels sog. **Compound Options** (Optionen auf Optionen) und LELAND (1994) [203] bezieht Abwicklungskosten bzw. steuerliche Aspekte in die Betrachtung mit ein. Einen neuen Weg geht ZHOU (2001) [326], der das Ausfallereignis dadurch definiert, dass der Firmenwert eine vordefinierte Konstante K unterschreitet (die nicht notwendigerweise gleich dem Fremdkapital des Unternehmens ist). Ein Ausfall kann damit vor Endfälligkeit der Schulden stattfinden; er betrifft dann alle ausstehenden Forderungen und zieht eine Restrukturierung nach sich. Verallgemeinerungen dieses sog. **First-Passage-Time-Models** in Form einer stochastischen Variablen anstelle von K sind in BIELECKI & RUTKOWSKI (2002) [29] dargestellt. Eine ausführliche Diskussion dieser Modelle findet man in BRIGO, MORINI & PALLAVICINI (2013) [57], worin auch aktuelle Fallbeispiele (wie LEHMAN BROTHERS) mithilfe von durch geschlossene analytische Formeln gegebenen First-Passage-Time-Models behandelt werden.

A. Das Merton-Modell

Im MERTON-Modell wird ein Unternehmen betrachtet, dessen Fremdkapital aus einem Zerobond mit Nominalbetrag N und Laufzeit T besteht. Der Firmenwert FV_t , also die Summe aus Eigen- und Fremdkapital, folgt unter dem Martingalmaß \mathbb{Q} einer geometrischen BROWN'schen Bewegung

$$dFV_t = (r - \kappa) \cdot FV_t dt + \sigma \cdot FV_t dW_t. \quad (2.36)$$

Dabei ist r die kreditrisikolose Short-Rate, κ die Dividendenrate (welche negativ sein kann im Falle von Einzahlungen) und σ die Volatilität des Firmenwerts. Zum Zeitpunkt T sind folgende Situationen möglich:

$$\widetilde{D}_T = \begin{cases} N & , \quad \text{falls } FV_T \geq N, \\ FV_T & , \quad \text{falls } FV_T < N. \end{cases} \quad (2.37)$$

Falls also der Firmenwert in T kleiner ist als die Schulden, so tritt das Ausfallereignis ein, und die Anteilseigner übergeben den Kreditgebern das Unternehmen (daher $\widetilde{D}_T = FV_T$). Im anderen Fall werden die Schulden zurückgezahlt. Mit den Bezeichnungen des letzten Abschnitts gilt hier

$$X = N, \quad A = 0, \quad R^* = FV_T, \quad R^{**} = 0, \quad \tau = T \cdot \mathbb{1}_{\{FV_T < N\}} + \infty \cdot \mathbb{1}_{\{FV_T \geq N\}}.$$

Bezeichnet man mit S_t den Marktwert des Eigenkapitals zur Zeit t , so gilt

$$S_T = \max\{FV_T - N, 0\}.$$

Daher kann S_T als der Wert einer Call-Option auf den Firmenwert interpretiert werden - dies ist die Kernidee des MERTON-Modells. Unter der GRUNDANNAHME 2.2 kann man analog zu SATZ 2.3 zeigen, dass gilt

$$S_t = FV_t \cdot \Phi(d_1(t, T)) - N \cdot e^{-r \cdot (T-t)} \cdot \Phi(d_2(t, T))$$

mit

$$d_l(t, T) := \frac{\log\left(\frac{FV_t}{N}\right) + \left(r - \kappa + \frac{(-1)^{l+1}}{2} \cdot \sigma^2\right) \cdot (T - t)}{\sigma \cdot \sqrt{T - t}}$$

für $l \in \{1, 2\}$.

Zur Berechnung von $P^d(t, T)$ beachten wir zunächst die Beziehung

$$P^d(T, T) = N - \max\{N - FV_T, 0\}, \quad (2.38)$$

welche sofort aus (2.37) folgt. Nun gilt

SATZ 2.8 (MERTON) Für $t \in [0; T]$ gilt

$$P^d(t, T) = FV_t \cdot e^{-\kappa(T-t)} \cdot \Phi(-d_1(t, T)) + N \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \Phi(d_2(t, T)). \quad (2.39)$$

BEWEIS: Nach (2.38) ist $P^d(t, T)$ bei Fälligkeit die Differenz aus einem Zerobond mit Nominalbetrag N und einer Put-Option auf den Firmenwert mit Strike N . Gemäß (2.4) ist $P^d(t, T)$ zur Zeit $t \leq T$ damit gleich der Differenz der Barwerte dieser Instrumente, d.h. (mit der Abkürzung $d_i := d_i(t, T)$):

$$\begin{aligned} P^d(t, T) &= N \cdot e^{-r(T-t)} - \left(N \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \Phi(-d_2) - FV_t \cdot e^{-\kappa(T-t)} \cdot \Phi(-d_1) \right) = \\ &= FV_t \cdot e^{-\kappa(T-t)} \cdot \Phi(-d_1) + N \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \Phi(d_2). \end{aligned}$$

□

Um das MERTON-Modell für $t = 0$ anwenden zu können, ist zu beachten, dass der Firmenwert FV_0 und dessen Volatilität σ nicht unmittelbar am Markt bekannt sind. Dem wird wie folgt begegnet (wir nehmen $\kappa = 0$ an): Beachtet man den sich aus den Überlegungen in Unterabschnitt 2.2.1 ergebenden Zusammenhang $d(e^{-rt} S_t) = \Phi(d_1(t, T)) d(e^{-rt} FV_t)$ (Anwendung von (2.6)), so kann man zunächst folgern

$$\sigma_S \cdot S_t = \Phi(d_1(t, T)) \cdot \sigma \cdot FV_t,$$

wobei σ_S die Aktienkursvolatilität ist. Aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} S_0 &= FV_0 \cdot \Phi(d_1(0, T)) - N \cdot e^{-rT} \cdot \Phi(d_2(0, T)), \\ \sigma_S &= \frac{\Phi(d_1(0, T)) \cdot FV_0 \cdot \sigma}{S_0} \end{aligned}$$

extrahiert man schließlich die gesuchten Größen, da S_0 und σ_S am Markt gegeben sind.

Für die Größe $p_D^{\mathbb{Q}}(0, T)$ (vgl. DEFINITION 2.12) gilt im MERTON-Modell bei einem zur Zeit 0 noch nicht ausgefallenen Unternehmen:

$$\begin{aligned} p_D^{\mathbb{Q}}(0, T) &= \mathbb{Q}(0 < \tau \leq T) = \mathbb{Q}(0 < T \cdot \mathbb{1}_{\{FV_T < N\}} \leq T) = \\ &= \mathbb{Q}(\mathbb{1}_{\{FV_T < N\}} = 1) = \mathbb{Q}(FV_T < N) = \Phi(-d_2(0, T)), \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Beziehung (2.3) eingeflossen ist, wenn man dort S_t durch FV_t und μ durch $r - \kappa$ ersetzt.

Der Credit Spread ist im MERTON-Modell

$$\begin{aligned} s_t^y(T) &= -\log(P^d(t, T)/N)/(T - t) + \log(P(t, T))/(T - t) = \\ &= -\frac{\log(FV_t/N \cdot e^{-\kappa(T-t)} \cdot \Phi(-d_1) + e^{-r(T-t)} \cdot \Phi(d_2))}{T - t} - r = \\ &= -\frac{\log(1/l_t \cdot e^{-\kappa(T-t)} \cdot \Phi(-d_1) + \Phi(d_2))}{T - t} \end{aligned}$$

mit dem sog. **Leverage Verhältnis** $l_t := N \cdot e^{-r(T-t)} / FV_t$. Wie bereits erwähnt, sind am Markt mitunter höhere Credit Spreads zu beobachten als die im MERTON-Modell errechneten Werte (vgl. hierzu die Literaturangaben in BINGHAM & KIESEL (2004) [36]).

BEISPIEL 2.13 *Ein börsennotiertes Unternehmen habe den Aktienkurs $S_0 = 100$, und das Fremdkapital bestehe aus einem einjährigen Zerobond mit Nominalbetrag $N = 200$. Es gelte $\sigma_S = 40\%$, $r = 3\%$ und $\kappa = 0$. Wir haben*

$$\begin{aligned} 100 &= FV_0 \cdot \Phi(d_1(0,1)) - 200 \cdot e^{-0.03} \cdot \Phi(d_2(0,1)), \\ 0.4 &= \frac{\Phi(d_1(0,1)) \cdot FV_0 \cdot \sigma}{S_0}, \end{aligned}$$

wobei

$$d_{1,2}(0,1) = \frac{\log(\frac{FV_0}{200}) + 0.03 \pm \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}.$$

Die numerische Lösung dieses Gleichungssystems ergibt $FV_0 = 294.08$ und $\sigma = 13.6\%$. Der kreditrisikobehaftete Preis des Zerobonds ist gegeben durch

$$P^d(0,1) = 294.08 \cdot \Phi(-d_1(0,1)) + 200 \cdot e^{-0.03} \cdot \Phi(d_2(0,1)) = 194.08$$

und die risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeit ist

$$p_D^{\mathbb{Q}}(0,1) = \Phi(d_2(0,1)) = 0.14\%.$$

BEMERKUNG 2.12 *Da der Preis eines kreditrisikobehafteten Zerobonds im MERTON-Modell über die BLACK-SCHOLES-Formel ermittelt wird, kann eine selbstfinanzierende Replikationsstrategie, bestehend aus einem Bankkonto und einem Investment in Aktien, in Analogie zu BEISPIEL 2.8 hergeleitet werden. Für das Replikationsportfolio erhält man*

$$\varphi_t^0 = e^{-\kappa(T-t)} \cdot \Phi(-d_1), \quad \varphi_t^1 = N \cdot \Phi(d_2).$$

B. Der Ansatz von Zhou

Während im MERTON-Modell der Unternehmenswert einem stetigen Prozess folgt, geht der **Ansatz von Zhou** [326] davon aus, dass plötzliche Sprünge im Unternehmenswert möglich sind. Auf diese Weise wird versucht, u.a. dem Phänomen der zu geringen Credit Spreads des MERTON-Modells im kurzfristigen Bereich zu begegnen.

Unter dem Maß \mathbb{Q} sei $(W_t)_{t \in [0;T]}$ ein WIENER-Prozess, $(N_t)_{t \in [0;T]}$ ein POISSON-Prozess mit Intensität λ und $(U_i)_{i \geq 1}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Werten in $(-1; \infty)$ und endlichem Erwartungswert $\nu = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(U_i)$ (die U_i werden später die relativen Änderungen des Firmenwertes im Zeitablauf beschreiben). Die σ -Algebren der beiden Prozesse und der Folge seien unabhängig. Für die Dynamik des Unternehmenswerts unter \mathbb{Q} gelte

$$dFV_t = FV_{t-} ((r - \lambda\nu)dt + \sigma dW_t + d\pi_t). \quad (2.40)$$

Hierbei ist $\pi = (\pi_t)_{t \in [0;T]}$ ein Sprungprozess, dessen Sprungzeiten durch (N_t) und dessen Sprunghöhen durch die U_i festgelegt werden:

$$\pi_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i, \quad t \in [0; T].$$

Es sei \mathcal{F} die vom WIENER-Prozess und π erzeugte Filtration. Unter dieser Filtration ist der durch

$$\tilde{\pi}_t := \pi_t - \lambda\nu t, \quad t \in [0; T],$$

gegebene Prozess $\tilde{\pi}$ ein \mathbb{Q} -Martingal (vgl. die Herleitung von (A.11) im Anhang). Der Prozess $\widetilde{FV} := (\widetilde{FV}_t)_{t \in [0;T]}$ mit $\widetilde{FV}_t := e^{-rt} \cdot FV_t$ ist somit ein Martingal und folgt der Dynamik

$$d\widetilde{FV}_t = \widetilde{FV}_{t-} (\sigma dW_t + d\tilde{\pi}_t). \quad (2.41)$$

Die anschauliche Interpretation der bisherigen Modellierung ist folgende: Zu den zufälligen Zeitpunkten $\tau_i := \inf\{t : N_t = i\}$ tritt beim Prozess $\tilde{\pi}$ ein Sprung der Größe $\Delta\tilde{\pi}_t := \tilde{\pi}_t - \tilde{\pi}_{t-}$ auf, der wegen (2.41) wiederum zu einem Sprung von \widetilde{FV} und damit auch des Firmenwertprozesses führt. Zwischen zwei Sprungzeitpunkten folgt \widetilde{FV} einer geometrischen BROWN'schen Bewegung, und zum Zeitpunkt τ_i gilt wegen (2.41) $d\widetilde{FV}_{\tau_i} = \widetilde{FV}_{\tau_i-} \cdot U_i$.

Die explizite Lösung von (2.41) lautet

$$\widetilde{FV}_t = \widetilde{FV}_0 \cdot \exp(\tilde{\pi}_t + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t) \cdot \prod_{u \leq t} (1 + \Delta\tilde{\pi}_u) \cdot \exp(-\Delta\tilde{\pi}_u),$$

bzw. äquivalent dazu

$$FV_t = FV_0 \cdot \exp(\sigma W_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\nu)t) \cdot \prod_{i=1}^{N_t} (1 + U_i). \quad (2.42)$$

Wir treffen die Annahme, dass $U_i + 1$ lognormalverteilt ist, also genauer $\log(U_i + 1) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^*)$ gilt, sodass

$$\nu = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^{*2}\right) - 1.$$

Um nun den Preis $P^d(t, T)$ eines kreditrisikobehafteten Zerobonds zu bewerten, verwenden wir wiederum SATZ 2.6. Zunächst wird ein Hilfsresultat benötigt.

LEMMA 2.4 *Es gilt*

$$\mathbb{Q}(\tau = T | \mathcal{F}_t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda(T-t)} \cdot \frac{(\lambda(T-t))^i}{i!} \cdot \Phi(-d_{2,i}(t, T)), \quad t \in [0; T],$$

mit $d_{2,i}(t, T) = (\log(FV_t/N) + \mu_i(t))/\sigma_i(t)$, $\mu_i(t) := (r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\nu)t + i\mu$ und $\sigma_i(t) := \sigma^2 t + i(\sigma^*)^2$.

BEWEIS: Zunächst ist $\mathbb{Q}(\tau = T | \mathcal{F}_t) = \mathbb{Q}(FV_T < N | \mathcal{F}_t)$. Wegen (2.42) gilt, bedingt auf das Ereignis $N_T - N_t = i$,

$$FV_T = FV_t \cdot \exp\left(\sigma(W_T - W_t) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\nu\right)(T-t) + \sum_{j=0}^i \zeta_j\right)$$

mit unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen $\zeta_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^*)$, die auch unabhängig vom WIENER-Prozess sind. Wir haben also $FV_T = FV_t \cdot \exp(\zeta)$ mit einer von \mathcal{F}_t unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen ζ , für die gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\zeta) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\nu\right)t + i\mu, \quad \text{Var}^{\mathbb{Q}}(\zeta) = \sigma^2(T-t) + i(\sigma^*)^2.$$

Nun folgt mit $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(FV_T < N | \mathcal{F}_t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{Q}(FV_T < N | \mathcal{F}_t, N_T - N_t = i) \cdot \mathbb{Q}(N_T - N_t = i) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{Q}(FV_t \exp(\mu_i(t) + \sigma_i(t) \cdot \xi) < N) \cdot e^{-\lambda(T-t)} \cdot \frac{(\lambda(T-t))^i}{i!} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda(T-t)} \cdot \frac{(\lambda(T-t))^i}{i!} \cdot \Phi(-d_{2,i}(t, T)). \end{aligned}$$

□

Damit erhalten wir folgendes Resultat.

SATZ 2.9 *Im Ansatz von ZHOU gilt für $t \in [0; T]$:*

$$P^d(t, T) = N \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} g(t, T) \cdot \left(\frac{FV_t}{N} \cdot e^{\mu_i(T-t) + \sigma_i^2(T-t)/2} \cdot \Phi(-d_{1,i}(t, T)) + \Phi(d_{2,i}(t, T)) \right).$$

Dabei ist $g(t, T) := e^{-\lambda(T-t)} \cdot (\lambda(T-t))^i / i!$ und $d_{1,i}(t) := d_{2,i}(t) + \sigma_i(t)$.

BEWEIS: Aufgrund von $P^d(T, T) = N - N \cdot \mathbb{1}_{\{FV_T < N\}} + FV_T \cdot \mathbb{1}_{\{FV_T < N\}}$ und SATZ 2.6 können wir schreiben

$$\begin{aligned} P^d(t, T) &= e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(P^d(T, T) \mid \mathcal{F}_t) = \\ &= e^{-r(T-t)} \cdot N \cdot (1 - \mathbb{Q}(FV_T < N \mid \mathcal{F}_t)) + e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(FV_T \cdot \mathbb{1}_{\{FV_T < N\}} \mid \mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

Der in der mittleren Klammer stehende Ausdruck ist wegen LEMMA 2.4 gleich $\sum_{i=0}^{\infty} g(t, T) \cdot \Phi(d_{2,i}(t, T))$. Damit bleibt der zweite Summand zu berechnen. Analog zur Vorgehensweise im Lemma finden wir für diesen den Wert

$$e^{-r(T-t)} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} g(t, T) \cdot FV_t \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{\zeta} \cdot \mathbb{1}_{\{x e^{\zeta} < N\}}) \Big|_{x=FV_t},$$

wobei ζ die Variable aus dem Beweis von LEMMA 2.4 ist. Eine elementare Rechnung zeigt, dass für $\zeta \sim \mathcal{N}(\mu_{\zeta}, \sigma_{\zeta}^2)$ gilt $\mathbb{E}(e^{\zeta} \cdot \mathbb{1}_{\{e^{\zeta} < y\}}) = e^{\mu_{\zeta} + \sigma_{\zeta}^2/2} \cdot \Phi((\log y - \mu_{\zeta} - \sigma_{\zeta}^2)/\sigma_{\zeta})$. Setzt man dies ein, so folgt schließlich die behauptete Formel. \square

C. Ausblick

Wir geben einen Ausblick auf einige weitere Unternehmenswertmodelle, verweisen für die diesbezüglichen Einzelheiten aber auf die weiterführende Literatur (insbesondere BIELECKI & RUTKOWSKI (2002) [29] und BRIGO, MORINI & PALLAVICINI (2013) [57]).

C₁. Unterjähriger Ausfall – deterministische Ausfallbarrieren

Im Ansatz von **Ansatz von Black und Cox** [40] geht man wieder von der Modellierung (2.36) des Firmenwertes aus, wobei hier $\kappa \geq 0$ angenommen wird. Die in der Praxis üblichen Kreditvertragsklauseln (sog. **safety covenants**), welche den Kreditgebern in gewissen Fällen das Recht geben, ein Default-Ereignis zu erzwingen, falls der Kreditnehmer seinen vertraglichen Pflichten nicht nachkommt, werden (vereinfacht) wie folgt abgebildet: Sobald der Firmenwert eine deterministische, zeitabhängige Barriere

$$\bar{v}(t) := K \cdot e^{-\gamma(T-t)}, \quad t \in [0; T),$$

mit vorgegebenen Konstanten K und γ unterschreitet, tritt ein Ausfallereignis (also unterjährig bzw. vor dem Zeitpunkt T) ein. Andernfalls tritt der Ausfall zum Zeitpunkt T genau dann ein, wenn $FV_T < X := L$ mit einer Konstanten L . Ist

$$v_t := \begin{cases} \bar{v}(t) & , \quad \text{falls } t < T, \\ L & , \quad \text{falls } t = T, \end{cases}$$

so kann der Ausfallzeitpunkt τ in der Form

$$\tau := \inf\{t \in [0; T] : FV_t < v_t\}$$

definiert werden. Dabei gilt

$$\tau = \min\{\bar{\tau}, \hat{\tau}\}$$

mit $\bar{\tau} := \inf\{t \in [0; T] : FV_t < \bar{v}_t\}$ und $\hat{\tau} := T \mathbb{1}_{\{FV_T < L\}} + \infty \mathbb{1}_{\{FV_T > L\}}$. Es ist τ eine Stoppzeit bzgl. der unserer Modellierung zu Grunde liegenden Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$. Zur Beschreibung des Recovery Betrages wird hier unterstellt, dass dieser proportional zum Unternehmenswert ist, dass also gilt $R^* = \beta_1 FV_T$ und $R_t^{**} = \beta_2 FV_t$ mit Konstanten $\beta_1, \beta_2 \in [0; 1]$. Ferner wird angenommen, dass die Bedingung

$$K \cdot e^{-\gamma(T-t)} \leq L \cdot e^{-r(T-t)}, \quad t \in [0; T], \quad (2.43)$$

erfüllt ist, so dass der Auszahlungsbetrag an die Kreditgeber zum Ausfallzeitpunkt τ nie größer ist als der mit dem risikolosen Zinssatz r diskontierte Rückzahlungsbetrag L . Nach DEFINITION 2.2 gilt hier

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_t &= (L \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + \beta_1 FV_T \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}}) \cdot \mathbb{1}_{\{t \geq T\}} + \int_{(0; t]} \beta_2 FV_u d\mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq u\}} = \\ &= (L \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + \beta_1 FV_T \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}}) \cdot \mathbb{1}_{\{t \geq T\}} + \beta_2 FV_\tau \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq t\}}. \end{aligned}$$

Damit folgt aus SATZ 2.6 für einen kreditrisikobehafteten Zerobond auf der Menge $\{\tau > t\} = \{\bar{\tau} > t\}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} P^d(t, T) &= B_t \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\int_{(t; T]} B_u^{-1} d\widetilde{D}_u \middle| \mathcal{F}_t \right) = \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(L \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{1}_{\{\bar{\tau} \geq T, V_T \geq L\}} \middle| \mathcal{F}_t \right) + \quad (\text{kein Ausfall}) \\ &\quad + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\beta_1 \cdot FV_T \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \mathbb{1}_{\{\bar{\tau} \geq T, V_T < L\}} \middle| \mathcal{F}_t \right) \quad (\text{Ausfall in } T) \\ &\quad + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\beta_2 \cdot K \cdot e^{-\gamma(T-\bar{\tau})} \cdot e^{-r(\bar{\tau}-t)} \cdot \mathbb{1}_{\{t < \bar{\tau} < T\}} \middle| \mathcal{F}_t \right) \quad (\text{Ausfall in } t < \bar{\tau} < T). \end{aligned}$$

Zur Begründung des letzten Summanden beachten wir, dass auf der Menge $\{t < \bar{\tau} < T\}$ gilt $FV_{\bar{\tau}} = Ke^{-\gamma(T-\bar{\tau})}$. Die Auswertung dieser drei Integrale erfordert umfangreiche Berechnungen und die sich ergebenden Resultate sind außerordentlich komplex. Wir verzichten auf die Herleitung und verweisen auf die Darstellung in BIELECKI & RUTKOWSKI (2002) [29].

Interessanterweise haben BLACK und COX auch einen Weg skizziert, um unterschiedliche **Senioritäten** bei der Rangfolge der Bedienung von Ansprüchen zu modellieren. Unter der Annahme $\beta_1 = \beta_2 = 1$, d.h. es fallen keine Abwicklungskosten nach dem Ausfallereignis an, werden die Verbindlichkeiten des Unternehmens in eine nachrangige Junior Tranche und eine vorrangige Senior Tranche mit Fälligkeit T eingeteilt. Es gilt dann

$$L = L_j + L_s,$$

d.h. aus dem in T fälligen Rückzahlungsbetrag L werden zuerst die Ansprüche L_s der Senior Tranche und danach die Ansprüche L_j der Junior Tranche bedient. Ist $P^d(t, T; L, \bar{v})$ der Wert eines kreditrisikobehafteten Zerobonds mit Nominalbetrag L und Barriere \bar{v} , so gilt in $t < T$ für den Wert $P_s^d(t, T)$ der Senior Tranche

$$P_s^d(t, T) = P^d(t, T; L_s, \bar{v}).$$

Zum Ausfallzeitpunkt $\tau < T$ haben wir dann wegen der Bedingung (2.43)

$$P_s^d(\tau, T) = \min\{\bar{v}(\tau), L_s \cdot e^{-r(T-\tau)}\}.$$

Der Wert $P_j^d(t, T)$ der Junior Tranche ist zum Zeitpunkt $t < \tau$

$$P_j^d(t, T) = P^d(t, T) - P_s^d(t, T) = P^d(t, T; L, \bar{v}) - P^d(t, T; L_s, \bar{v}).$$

Zum Ausfallzeitpunkt $\tau < T$ ist dies gerade gleich

$$P_j^d(\tau, T) = \min\{\bar{v}(\tau) - L_s \cdot e^{-r(T-\tau)}, L_j \cdot e^{-r(T-\tau)}\}.$$

Mit $\bar{v} = K \cdot e^{-r(T-t)}$ folgt

$$P_j^d(t, T) = \begin{cases} L_j \cdot e^{-r(T-t)} & , \quad \text{falls } K = L, \\ P^d(t, T) - L_s \cdot e^{-r(T-t)} & , \quad \text{falls } L_s \leq K < L, \\ P^d(t, T) - P_s^d(t, T) & , \quad \text{falls } K < L_s. \end{cases}$$

Für einen direkten Vergleich des Modells von BLACK & COX (1976) mit dem klassischen Modell von MERTON sei auf BRIGO, MORINI & PALLAVICINI (2013) [57] verwiesen.

C₂. Berücksichtigung der Zinsstruktur

Bei den bisherigen Überlegungen sind wir stets davon ausgegangen, dass die Parameter r und κ in der Darstellung (2.36) konstante Größen sind. Im Zusammenhang mit der Modellierung von kreditrisikobehafteten Finanzinstrumenten ist es jedoch auch von Interesse, diese Parameter zeitabhängig und u.U. sogar stochastisch zu modellieren. Insbesondere bei der Bewertung von lang laufenden Derivaten macht es Sinn, eine **stochastische Modellierung der Zinsen** vorzunehmen - so wie es auch bei der Bewertung von nicht kreditrisikobehafteten Zinsderivaten üblich ist (vgl. etwa REITZ, MARTIN & SCHWARZ (2004) [268] oder REITZ (2010) [269]). Wir unterstellen jetzt eine Dynamik der Form

$$dFV_t = FV_t((r(t) - \kappa(t))dt + \sigma(t)dW_t)$$

mit einem **stochastischen Prozess** $(r(t))_{t \in I}$ und zeitabhängigen (deterministischen) Prozessen $(\kappa(t))_{t \in I}$ sowie $(\sigma(t))_{t \in I}$, welche jeweils geeignete Integrierbarkeitsvoraussetzungen erfüllen. Die Zinsentwicklung kann etwa im Rahmen eines sog. **Short-Rate-Modells** dargestellt werden: man geht davon aus, dass die Short-Rate $r(t)$ der allgemeinen Dynamik

$$dr(t) = a(t, r(t))dt + b(t, r(t))dW_t \quad (2.44)$$

folgt, und spezifiziert dann die Funktionen a und b in Abhängigkeit vom gewählten Modellansatz (bspw. durch $a(t, r) = a \cdot (\theta(t) - r)$ und $b(t, r) = \sigma$ für das Modell von HULL & WHITE (1990)) und den gegebenen Marktdaten.

Es zeigt sich, dass die Dynamik der kreditrisikolosen Zerobonds typischerweise von der Form

$$dP(t, T) = P(t, T) \cdot (r(t)dt + b(t, T)dW_t)$$

ist, mit einer deterministischen Funktion $b(t, T)$. Mittels des Satzes von GIRSA-NOV zeigt man, dass der **Forward-Firmenwert** $F_{FV}(t, T) := FV_t/P(t, T)$ unter dem zuvor bereits betrachteten T -Forwardmaß \mathbb{Q}^T die Dynamik

$$dF_{FV}(t, T) = F_{FV}(t, T)(-\kappa(t)dt + (\sigma(t) - b(t, T))dW_t^T)$$

besitzt, wobei $(W_t^T)_{t \in I}$ einen WIENER-Prozess unter \mathbb{Q}^T bezeichne. Mit der ITÔ-Formel (B.4) ergibt sich, dass der durch

$$F_{FV}^\kappa(t, T) := F_{FV}(t, T) \cdot e^{-\int_t^T \kappa(u)du}$$

gegebene stochastische Prozess der Dynamik

$$dF_{FV}^\kappa(t, T) = F_{FV}^\kappa(t, T)(\sigma(t) - b(t, T))dW_t^T$$

folgt.

Damit definiert man dann, analog zu den zuvor betrachteten Unternehmenswertmodellen, eine Ausfallzeit τ und anhand dieser können schließlich mit der Vorgehensweise aus BEISPIEL 2.12 Bewertungsformeln für kreditrisikobehaftete Zerobonds hergeleitet werden.

C₃. Stochastische Barrieren und deren Anwendungen

Eine wichtige Variante eines strukturellen Modelles ist das CREDITGRADES[®]-Modell, welches ursprünglich gemeinsam von CreditMetrics, J.P.Morgan, Goldman Sachs und Deutsche Bank entwickelt wurde. Es liefert einen direkten Link zum Aktienmarkt bzw. genauer zum Aktienoptionsmarkt, wobei der Firmenwertprozess einer reinen Diffusion folgt, welcher einen Ausfall generiert, sobald die Realisation die nun stochastische Ausfall-Barriere unterschreitet, die zur Sicherstellung angemessener Short-Term Credit Spreads eingeführt wurde.

Der wesentliche Vorteil des CREDITGRADES[®]-Ansatzes besteht in einer expliziten Verlinkung von Kredit- und Aktienrisiken, weshalb dieser Ansatz auch unter dem Schlagwort *equity-to-credit-link* (oder kurz „E2C-link“) in der Literatur bekannt ist. Dieser Zusammenhang zwischen den Kredit- und Aktienmärkten ist für Unternehmenswertmodelle leicht erkennbar, wie folgende Bemerkung verdeutlicht:

BEMERKUNG 2.13 *Bezeichnen wir mit S_t den Preis der Aktie eines Unternehmens zum Zeitpunkt t , so gilt ab dem Zeitpunkt $\tau \in (0; T]$ des Ausfalls*

$$S_t = 0 \quad \text{für } t \in [\tau; T],$$

falls wir annehmen, dass das Ausfallereignis durch Bankrott des Unternehmens eingetreten ist und kein ausgefallenes Unternehmen je wieder gesundet. Betrachten wir nun eine Put-Option auf diese Aktie zum Strike K : Die Auszahlung aus dieser Option am Laufzeitende bei zuvorigem Eintreten des Ausfallereignisses ist dann gerade K . Insofern kann die Put-Option in diesem Falle als ein Digital Default Swap interpretiert werden, bei dem die Zahlung der DDS Prämie unmittelbar bei Abschluss (sog. Upfront Payment) in Form der Optionsprämie und die potenziell mögliche Ausgleichszahlung am Laufzeitende in Höhe des Strikes der Option erfolgt. Dieses Kreditderivat wird daher auch als Default Put bezeichnet.

Wir kommen auf diese Idee bei der Diskussion der Bewertung von Kreditderivaten mithilfe von Firmenwertansätzen noch einmal kurz zurück. Aktuellere Erweiterungen des CREDITGRADES[®]-Modelles wurden von SEPP (2006) [291] beschrieben, worin stochastische Ausfallsschranken explizit untersucht werden, welche im Kontext von Firmenwertmodellen mit stochastischen Volatilitäten und Sprüngen angewendet werden.

Eine einfache Variante der stochastischen Barrieremodelle stellt das sog. *Scenario Volatility and Barrier Analytically Tractable 1st Passage model* von BRIGO und verschiedenen Mitarbeitern dar, die in einer Reihe von Artikeln seit 2004 dieses sowie dessen Weiterentwicklungen anhand interessanter Fallstudien (z.B. für Parmalat oder LEHMAN BROTHERS) untersuchten. Für einen ersten Überblick hierzu sei auf den Artikel [60] von BRIGO, MORINI & TARENGHI (2009) sowie die darin angegebenen Referenzen verwiesen.

Der erwähnte *E2C-link* kann in einfacher Form auch bei der Szenariogeneration für die Ermittlung von Kontrahentenrisiken berücksichtigt werden, wie wir noch kurz anmerken wollen.

C₄. Szenariogeneration mit und ohne Wrong Way Risks

Wir haben in Unterabschnitt 1.5.3 bereits bemerkt und ausführlicher in BEISPIEL 2.5 und der anschließenden BEMERKUNG 2.5 ausgeführt, dass das Kontrahentenrisiko aus den zukünftigen (positiven) Marktwerten bzw. Preisen eines OTC Derivats oder einer Wertpapierfinanzierungstransaktion (SFT) ermittelt wird. Da die zukünftigen Marktwerte jedoch von den potenziellen Marktszenarien abhängen, welche zu dem jeweiligen Zeitpunkt in der Zukunft die preisbestimmenden Bewertungs- bzw. Marktrisikofaktoren annehmen können, ist die Basis für jede fortgeschrittene Bewertung eine marktkonsistente und korrelierte Erzeugung solcher Szenarien.

BEISPIEL 2.14 (1) *Klassischerweise wurde die Szenarioerzeugung – wie in BEISPIEL 2.5 beschrieben – vollkommen unabhängig von der Simulation des Ausfalles des Kontrahenten durchgeführt. Der Ausfall des Kontrahenten hat jedoch gerade dann großen Einfluss auf das Exposure, wenn dieser sogar direkt den Wert des jeweiligen Geschäftes beeinflusst, also das Exposure des Geschäftes zumindest mit dem Ausfallzeitpunkt des Kontrahenten positiv korreliert ist. Dieser Fall eines spezifischen Wrong Way Risks lässt sich am einfachsten am Beispiel einer Put-Option veranschaulichen, die man vom Unternehmen oder Bank der der Option als Basisgut zugrunde liegenden Aktie erworben hat: In diesem Falle wäre nämlich der Optionswert für uns dann am größten, wenn der Ausfall des Unternehmens bzw. der Bank eingetreten wäre, da zu diesem Zeitpunkt nach dem Firmenwertmodell die Aktie den Wert null und damit die Put-Option den Wert ihres Strikes annehmen würde. Unglücklicherweise wäre aber gerade dann der Stillhalter nicht mehr in der Lage, das gewünschte Optionsrecht zu bedienen. Kurzum der Wert der Put-Option wäre dann am größten, wenn der Ausfall des Underlyings und damit der Optionsverkäufers eintreten würde. In der klassischen Simulation der Aktienkurse im ESG und anschließenden Bewertung zur Ermittlung der zukünftigen Exposures ist diese Situation jedoch an keiner Stelle reflektiert, was zu einer deutlichen Unterschätzung des Kontrahentenrisikos führt.*

- (2) *Um die Auswirkungen des Wrong Way Risks abzuschätzen, betrachten wir also in einer Fallstudie (aus [220] sowie [221]) einen Kontrahenten, der eine Put-Option zum Strike $K = 100$ auf sich selbst verkauft, wobei wir*

die Transaktion aus Sicht des Käufers veranschaulichen wollen: Geht man nun von einem Firmenwertmodell für den Kontrahenten aus, so kann der Firmenwert im einfachsten Falle nach MERTON (1973) gemäß (2.36) als geometrische BROWN'sche Bewegung mit risikoneutraler Drift beschrieben werden. Da das Eigenkapital der Firma als Call-Option auf den Firmenwert mit den Verbindlichkeiten als Ausübungspreis angesehen werden kann, ermöglicht dieser Ansatz eine simultane Modellierung des Ausfalls des Kontrahenten einerseits aber auch des Aktienkurses des Kontrahenten andererseits. Insofern kann eine Put-Option auf den Aktienkurs des Kontrahenten als eine Compound Option auf den Firmenwert des Kontrahenten interpretiert und anstelle einer direkten Simulation der zukünftigen Aktienkurse (wie sie den typischen Aktienkursgeneratoren weltweit zugrunde liegt) diese alternativ auch aus den simulierten Firmenwertrealisationen generiert werden. Nachstehende Abbildung stellt daher einerseits die klassisch (also ohne Berücksichtigung des möglichen Ausfalls des Kontrahenten) erzeugten Exposure-Zeitprofile (gestrichelte Graphen) und andererseits die über die Firmenwertmodellierung des Kontrahenten erzeugten Exposure-Zeitprofile (durchgezogene Graphen) jeweils derselben fünfjährigen Put-Option dar: Dazu gehen wir von der in BEISPIEL 2.13 beschriebenen Kalibrierung des Firmenwertmodells (zum Aktienkurs $S_0 = 100$, Aktienkursvolatilität $\sigma_S = 40\%$, Firmenwert $FV_0 = 294.08$, Firmenwertvolatilität $\sigma = 13.6\%$, risikoneutralem Zins $r = 3\%$ und Verbindlichkeiten $N = 200$) aus. Mit monatlichen Zeitschritten $\Delta t := \frac{1}{12}$ wählen wir äquidistante Stützzeitpunkte $t_k := k \cdot \Delta t$, $k \in \{0, \dots, 60\}$, an denen wir durch EULER-MARUYAMA-Diskretisierung

$$\Delta FV_{t_{k+1}}(\ell) = (r - \kappa) \cdot FV_{t_k}(\ell) \cdot \Delta t + \sigma \cdot FV_{t_k}(\ell) \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \xi_t(\ell)$$

von (2.36) zunächst jeweils $M = 5000$ Szenarien bzw. Pfade des Firmenwerts $FV_{t_k}(\ell)$, $\ell \in \{1, \dots, 5000\}$, erzeugen. Damit haben wir zugleich gemäß

$$S_{t_k}(\ell) = (FV_{t_k}(\ell) - N)^+$$

die Aktienkurse des Unternehmens simuliert und können mit diesen die betreffende Put-Option bewerten und deren Exposure ermitteln. Die Ergebnisse der Simulation stellen wir wieder mithilfe des 5%- und 95%-Quantils und des Erwartungswertes der Marktwertverteilung pro Stützzeitpunkt dar, wodurch wir Abbildung 2.8 erhalten:

Deutlich kann man erkennen, dass die Exposure-Zeitprofile bei Berücksichtigung des Wrong Way Risks erheblich höhere erwartete Exposures sowie zukünftige potenzielle Exposures (zum Konfidenzniveau von 95%) zur Folge haben, wie wir im vierten Kapitel noch genau quantifizieren wollen.

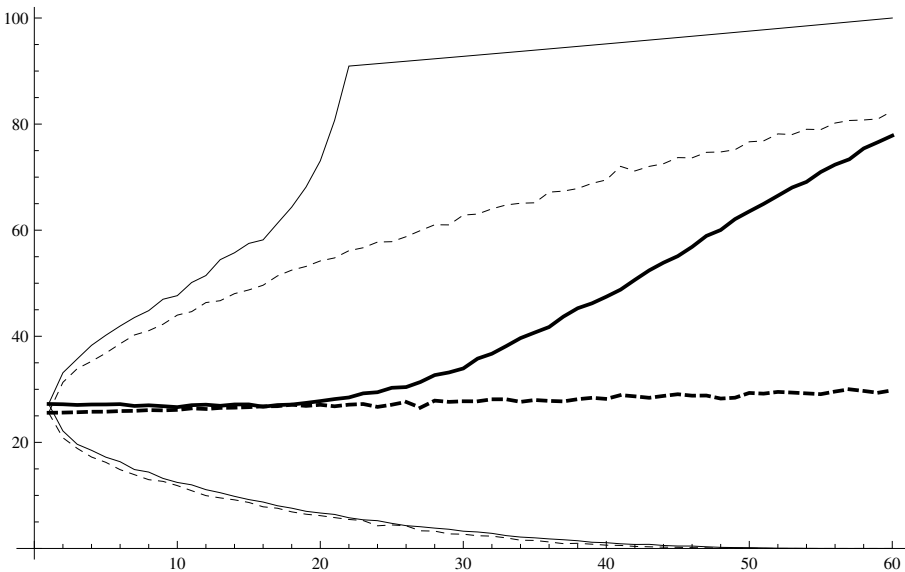


Abbildung 2.8 Generierung von Exposure-Zeitprofilen mit Ausfallrisiken (durchgezogener Graph) und ohne Ausfallrisiken (gestrichelter Graph) zur Veranschaulichung des Wrong Way Risks aus einer Put-Option.

Weitere Ausführungen zum Umgang mit spezifischen Wrong Way Risks sind wie üblich den beiden Standardreferenzen CESARI et al. (2011) [86] und GREGORY (2012) zu entnehmen. Für eine Berücksichtigung allgemeiner bzw. systematischer Wrong Way Risks in der Szenariogeneration sei auf den Artikel [266] von PYKTHIN & SOKOL (2013) verwiesen.

2.4.2 Hazardraten- und Intensitätsmodelle

Bei dieser Klasse von Modellen wird der Ausfallzeitpunkt mit Hilfe einer nichtnegativen Zufallsvariablen τ modelliert. Ein typisches Beispiel ist etwa die Verwendung einer *exponentialverteilten* Zufallsvariablen τ mit Intensitätsparameter λ , welche sich als Zeitpunkt des ersten Sprunges eines **POISSON-Prozesses** interpretieren lässt (vgl. hierzu auch die Ausführungen im Anhang). Der Ausfall des Unternehmens kommt also „zufällig und unerwartet“, hervorgerufen durch einen exogenen Zufallsprozess, im Unterschied zu den Unternehmenswertmodellen, wo τ über das Verhalten der Zufallsvariablen FV_t modelliert wird.

Wir beginnen mit dem allgemeinen Modellrahmen. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ der in Unterabschnitt 2.3.1 betrachtete Wahrscheinlichkeitsraum, wobei wir hier das

risikoneutrale Maß \mathbb{Q} wählen, und I das dort definierte Intervall. Die Ausfallzeit τ ist eine nichtnegative Zufallsvariable mit

$$\mathbb{Q}(\tau < \infty) = 1, \quad \mathbb{Q}(\tau = 0) = 0, \quad \mathbb{Q}(\tau > 0) > 0.$$

Zu τ gehört ein Sprungprozess, der sog. **Ausfallprozess**, $H = (H_t)_{t \in I}$ mit $H_t := \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$. Es sei $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_t)_{t \in I}$ die von H erzeugte Filtration, d.h.

$$\mathcal{H}_t = \sigma(H_u : u \leq t) = \sigma(\{\tau \leq u\} : u \leq t).$$

Während die Filtration \mathcal{H} die Information über den Ausfallzeitpunkt modelliert, möge \mathcal{F} die Informationen über den allgemeinen Markt (z.B. die risikolosen Zinsen) beschreiben. Beide Filtrationen ergeben zusammen die Filtration

$$\mathcal{G} := (\mathcal{G}_t)_{t \in I} \quad \text{mit} \quad \mathcal{G}_t := \sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{H}_t).$$

Es ist τ nicht notwendigerweise eine Stoppzeit bzgl. \mathcal{F} , wohl aber bzgl. \mathcal{G} .

BEISPIEL 2.15 Gegeben sei ein POISSON-Prozess mit deterministischer Intensität $\gamma(t)$. Der Ausfallzeitpunkt sei der Zeitpunkt des ersten Sprunges τ . Wir setzen

$$\Gamma(t) := \int_0^t \gamma(u) du$$

und berechnen die Überlebenswahrscheinlichkeit zu

$$\mathbb{Q}(\tau > t) = \exp \left(- \int_0^t \gamma(u) du \right).$$

Ist $\gamma := (\gamma(t))_{t \in I}$ ein positiver stetiger stochastischer Prozess mit integrierbaren Zufallsvariablen $\gamma(t)$, so definieren wir $\Gamma(t)$ wie oben und weiter $N_t^* := N_{\Gamma(t)}$, wobei $N := (N_s)_{s \geq 0}$ ein von γ unabhängiger POISSON-Prozess mit konstanter Intensität 1 sei. Es ist $N^* := (N_t^*)_{t \in I}$ ein sog. COX-Prozess. Der Ausfallzeitpunkt sei nun der Zeitpunkt τ des ersten Sprunges des Prozesses N^* . Die Überlebenswahrscheinlichkeit ist dann

$$\mathbb{Q}(\tau > t) = \mathbb{Q}(\Gamma(\tau) > \Gamma(t)) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\exp \left(- \int_0^t \gamma(u) du \right) \right).$$

Durch Differenziation nach t erhalten wir eine Dichtefunktion f für τ :

$$f(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\gamma(t) \cdot \exp \left(- \int_0^t \gamma(u) du \right) \right).$$

Wir bewerten unter den gegebenen Annahmen einen kreditrisikobehafteten Zerobond mit Recovery Zahlung $R^*(\tau)$ bei Fälligkeit und $R^{**} = 0$, der zur Zeit 0 noch nicht ausgefallen ist. Nach BEISPIEL 2.9 gilt für den Barwert

$$P^d(t, T) = B_t \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left((X \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + R^*(\tau) \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}}) \cdot B_T^{-1} \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

Für $B_t := \exp(\int_0^t r(u) du)$ (deterministische Zinsen) folgt dann

$$\begin{aligned} P^d(0, T) &= e^{-\int_0^T r(u) du} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(X \cdot (1 - \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}}) + R^*(\tau) \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}} \right) = \\ &= P(0, T) \left(X - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left((1 - R^*(\tau)) \cdot \mathbb{1}_{\{0 < \tau \leq T\}} \right) \right) = \\ &= P(0, T) \left(X - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\int_0^T (1 - R^*(u)) \cdot \gamma(u) \cdot e^{-\int_0^u \gamma(s) ds} \right) \right). \end{aligned}$$

Wir unterstellen im Folgenden, dass die diskontierten Preisprozesse handelbarer Instrumente \mathcal{G} -Martingale unter dem äquivalenten Martingalmaß \mathbb{Q} sind. Dies führt dann zu der bereits in SATZ 2.6 hergeleiteten Bewertungsformel

$$X^d(t, T) = B_t \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\int_{(t; T]} B_u^{-1} d\widetilde{D}_u \middle| \mathcal{G}_t \right), \quad t \in [0; T], \quad (2.45)$$

wobei hier \mathcal{G}_t anstelle von \mathcal{F}_t auftritt.

Diese Bewertungsformel wird zugrunde gelegt, um für verschiedene Modellierungsansätze des Ausfallzeitpunktes τ die Preise kreditrisikobehafteter Zerobonds zu berechnen.

Zur Formulierung des **allgemeinen Hazardratenmodells** definieren wir

$$F_t := \mathbb{Q}(\tau \leq t | \mathcal{F}_t), \quad t \in I, \quad (2.46)$$

und nehmen $F_t < 1$ für alle $t \in I$ an. Der zu τ gehörende **Überlebensprozess** $G = (G_t)_{t \in I}$ bzgl. der Filtration \mathcal{F} ist dann definiert als $G_t := 1 - F_t = \mathbb{Q}(\tau > t | \mathcal{F}_t)$. Wegen $\{\tau \leq t\} \subseteq \{\tau \leq s\}$ für $0 \leq t \leq s$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(F_s | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\tau \leq s | \mathcal{F}_s) | \mathcal{F}_t) = \mathbb{Q}(\tau \leq s | \mathcal{F}_t) \\ &\geq \mathbb{Q}(\tau \leq t | \mathcal{F}_t) = F_t. \end{aligned}$$

Daher ist $(F_t)_{t \in I}$ (bzw. $(G_t)_{t \in I}$) ein beschränktes nichtnegatives \mathcal{F} -Submartingal (bzw. Supermartingal).

DEFINITION 2.14 Der \mathcal{F} -Hazard-Prozess von τ unter \mathbb{Q} ist der durch

$$1 - F_t = \exp(-\Gamma_t), \quad \text{d.h.} \quad \Gamma_t = -\log(G_t) = -\log(1 - F_t) \quad (2.47)$$

definierte Prozess $\Gamma = (\Gamma_t)_{t \in I}$. Existiert ein Prozess $\gamma = (\gamma(u))_{u \in I}$, mit $\Gamma_t = \int_0^t \gamma(u) du$, so heißt γ **Intensität** von Γ .

Wegen $G_0 = 1$ folgt $\Gamma_0 = 0$. Wir unterstellen stets, dass Γ , G und F stetige Prozesse sind.

BEISPIEL 2.16 Es sei \mathcal{F} eine triviale σ -Algebra, d.h. sie enthalte nur Mengen $A \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{Q}(A) \in \{0, 1\}$. Somit ist der Short-Rate-Prozess (vgl. Unterabschnitt 2.2.3) $(r(t))_{t \in I}$ deterministisch, und es gilt $\mathcal{G} = \mathcal{H}$. Die Funktion $F_t = \mathbb{Q}(\tau \leq t)$ sei bzgl. t differenzierbar mit Ableitung f (Dichte von τ). Ein kreditrisikobehafteter Zerobond mit $X = 1$, $R^{**} = 0$, gegebener fixem Recovery Betrag $R^* = R$ und Laufzeit T hat nach (2.45) den Barwert

$$P^d(t, T) = e^{-\int_t^T r(u) du} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left((\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + R \cdot \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}) \middle| \mathcal{H}_t \right),$$

was wie in BEISPIEL 2.15 hergeleitet wird.

Auf der Menge $\{\tau > t\} \subseteq \mathcal{H}_t$ gilt daher

$$\begin{aligned} P^d(t, T) &= e^{-\int_t^T r(u) du} \cdot \left(1 - (1 - R) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} \middle| \{\tau > t\} \right) \right) = \\ &= e^{-\int_t^T r(u) du} \cdot \left(1 - (1 - R) \cdot \mathbb{P}^{\mathbb{Q}} \left(\tau \leq T \middle| \{\tau > t\} \right) \right) = \\ &= e^{-\int_t^T r(u) du} \cdot \left(1 - (1 - R) \cdot \frac{\mathbb{P}^{\mathbb{Q}}(t < \tau \leq T)}{\mathbb{P}^{\mathbb{Q}}(\tau > t)} \right) = \\ &= e^{-\int_t^T r(u) du} \cdot \left(1 - (1 - R) \cdot \frac{F_T - F_t}{1 - F_t} \right) = \\ &= e^{-\int_t^T r(u) du} \cdot \left(\frac{1 - F_T}{1 - F_t} + R \cdot \frac{F_T - F_t}{1 - F_t} \right). \end{aligned}$$

Es sei Γ die durch $\Gamma_t = -\log(1 - F_t)$ gegebene Hazard-Funktion, deren Ableitung nach t wir als existierend voraussetzen und mit $\gamma(t)$ bezeichnen. Für γ , die **Intensitätsfunktion**, ergibt sich

$$\gamma(t) = \frac{f(t)}{1 - F_t}.$$

Die Überlebenswahrscheinlichkeit ist

$$G_t = 1 - F_t = \exp(-\Gamma_t) = \exp\left(-\int_0^t \gamma(u) du\right).$$

Setzt man dies in die oben gewonnene Darstellung von $P^d(t, T)$ ein, so folgt unmittelbar

$$P^d(t, T) = e^{-\int_t^T (r(u) + \gamma(u)) du} + R \cdot e^{-\int_t^T r(u) du} \cdot \left(1 - e^{-\int_t^T \gamma(u) du}\right).$$

Dies Formel entspricht der in der Praxis üblichen Vorgehensweise, kreditrisikobehaftete Forderungen zu bewerten, indem der ausstehende Betrag abgezinst wird mit dem risikolosen Zins zuzüglich eines Credit Spreads für das Kreditrisiko. Die Rolle des Credit Spreads spielt hier der Term $\gamma(u)$. Im Falle $R = 0$ und konstanten Werten $r(u) = r$ sowie $\gamma(u) = \gamma$ lautet der in DEFINITION 2.13 eingeführte Credit Spread $s_t^y(T)$ in diesem Fall

$$s_t^y(T) = \frac{1}{T-t} \cdot \log\left(\frac{P(t, T)}{P^d(t, T)}\right) = \frac{1}{T-t} \cdot \log \exp(\gamma \cdot (T-t)) = \gamma.$$

Der folgende Satz erlaubt die allgemeine Bewertung kreditrisikobehafteter Forderungen in Abhängigkeit vom Hazard-Prozess Γ vor Eintritt des Ausfallereignisses.

SATZ 2.10 Es sei $X^d(t, T)$ der zur Zeit t gültige Wert einer kreditrisikobehafteten Forderung mit Fälligkeit T , Rückzahlung X , (zufälliger) Recovery Zahlung $R^*(\tau)$ bei Fälligkeit und $R^{**} = 0$, wobei vor dem Zeitpunkt T keinerlei Zahlungen aus der Forderung stattfinden mögen.

(1) Ist $B_t = e^{\int_0^t r(u) du}$, so gilt für alle $t \in [0; T]$

$$\begin{aligned} X^d(t, T) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot B_t \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \Big(\int_{(t; T]} B_u^{-1} \cdot e^{\Gamma_t - \Gamma_u} \cdot R^*(u) d\Gamma_u + \\ + B_T^{-1} \cdot X \cdot e^{\Gamma_t - \Gamma_T} \Big | \mathcal{F}_t \Big). \end{aligned} \quad (2.48)$$

(2) Besitzt Γ eine Intensität γ , so gilt

$$\begin{aligned} X^d(t, T) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \Big(\int_{(t; T]} e^{-\int_t^u (r(s) + \gamma(s)) ds} \cdot \gamma(u) \cdot R^*(u) du \Big | \mathcal{F}_t \Big) + \\ + \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \Big(e^{-\int_t^T (r(s) + \gamma(s)) ds} \cdot X \Big | \mathcal{F}_t \Big). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir zwei Lemmata.

LEMMA 2.5 (1) Für jede Menge $A \in \mathcal{G}_t$ gibt es eine Menge $B \in \mathcal{F}_t$ mit $A \cap \{\tau > t\} = B \cap \{\tau > t\}$.

(2) Für jede \mathcal{G}_t -messbare Zufallsvariable Y gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot Y | \mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot Y | \mathcal{F}_t)}{\mathbb{Q}(\tau > t | \mathcal{F}_t)}, \quad (2.50)$$

und zu Y existiert eine \mathcal{F}_t -messbare Zufallsvariable \tilde{Y} mit

$$Y \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} = \tilde{Y} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}. \quad (2.51)$$

BEWEIS: Zu (1): Man rechnet nach, dass

$$\mathcal{G}_t^* := \{A \in \mathcal{G} : \exists B \in \mathcal{F}_t, A \cap \{\tau > t\} = B \cap \{\tau > t\}\}$$

eine in \mathcal{G} enthaltene σ -Algebra ist. Wegen

$$\mathcal{G}_t = \sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{H}_t) \quad \text{und} \quad \mathcal{H}_t = \sigma(\{\tau \leq u\} : u \leq t)$$

genügt es zu zeigen, dass für alle $A = \{\tau \leq u\}$ oder $A \in \mathcal{F}_t$ ein $B \in \mathcal{F}_t$ existiert mit $A \cap \{\tau > t\} = B \cap \{\tau > t\}$. Im ersten Fall wähle nun $B = \emptyset$, im zweiten Fall $B = A$. Zu (2): Es sei $C := \{\tau > t\}$. Aussage (2.50) geht nach Multiplikation mit $\mathbb{Q}(\tau > t | \mathcal{F}_t)$ und Beachtung der Regel (A.4) über in

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_C \cdot Y \cdot \mathbb{Q}(C | \mathcal{F}_t) | \mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_C \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_C \cdot Y | \mathcal{F}_t) | \mathcal{G}_t),$$

und dies gilt, falls für alle $A \in \mathcal{G}_t$

$$\int_A \mathbb{1}_C \cdot Y \cdot \mathbb{Q}(C | \mathcal{F}_t) d\mathbb{Q} = \int_A \mathbb{1}_C \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_C \cdot Y | \mathcal{F}_t) d\mathbb{Q}$$

erfüllt ist, was wir nun zeigen. Dazu beachten wir zunächst $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_C \cdot Y \cdot \mathbb{Q}(C | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_C \cdot Y | \mathcal{F}_t) \cdot \mathbb{Q}(C | \mathcal{F}_t)$ und damit

$$\int_B \mathbb{1}_C \cdot Y \cdot \mathbb{Q}(C | \mathcal{F}_t) d\mathbb{Q} = \int_B \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_C \cdot Y | \mathcal{F}_t) \cdot \mathbb{Q}(C | \mathcal{F}_t) d\mathbb{Q} \quad \text{für alle } B \in \mathcal{F}_t. \quad (*)$$

Nun gilt wegen der 1. Aussage dieses Lemmas:

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{1}_C \cdot Y \cdot \mathbb{Q}(C | \mathcal{F}_t) d\mathbb{Q} &= \int_{A \cap C} Y \cdot \mathbb{Q}(C | \mathcal{F}_t) d\mathbb{Q} = \int_{B \cap C} Y \cdot \mathbb{Q}(C | \mathcal{F}_t) d\mathbb{Q} = \\ &= \int_B \mathbb{1}_C \cdot Y \cdot \mathbb{Q}(C | \mathcal{F}_t) d\mathbb{Q} \stackrel{(*)}{=} \int_B \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_C \cdot Y | \mathcal{F}_t) \cdot \mathbb{Q}(C | \mathcal{F}_t) d\mathbb{Q} = \\ &= \int_B \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_C \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_C \cdot Y | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_t) d\mathbb{Q} = \int_{B \cap C} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_C \cdot Y | \mathcal{F}_t) d\mathbb{Q} = \\ &= \int_{A \cap C} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_C \cdot Y | \mathcal{F}_t) d\mathbb{Q} = \int_A \mathbb{1}_C \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_C \cdot Y | \mathcal{F}_t) d\mathbb{Q}, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. Zum Beweis der letzten Aussage setzen wir $\tilde{Y} := \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot Y | \mathcal{F}_t)}{\mathbb{Q}(\tau > t | \mathcal{F}_t)}$, und erhalten dann wegen (2.50) die Aussage (2.51), womit das Lemma bewiesen ist. \square

LEMMA 2.6 (1) Für $t \in I$ gilt

$$\mathbb{Q}(\{\tau < \tau \leq T\} | \mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(1 - e^{\Gamma_t - \Gamma_T} | \mathcal{F}_t). \quad (2.52)$$

(2) Für jede \mathcal{G} -messbare Zufallsvariable Y und $t \leq s$ gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \cdot Y | \mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \cdot e^{\Gamma_t} \cdot Y | \mathcal{F}_t). \quad (2.53)$$

(3) Ist Y messbar bzgl. \mathcal{F}_s , so gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \cdot Y | \mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{\Gamma_t - \Gamma_s} \cdot Y | \mathcal{F}_t). \quad (2.54)$$

(4) Ist Z ein beschränkter, bzgl. \mathcal{F} vorhersehbarer Prozess, so gilt für alle $0 \leq t < s$:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{t < \tau \leq s\}} \cdot Z_\tau | \mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot e^{\Gamma_t} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\int_{(t;s]} Z_u dF_u \middle| \mathcal{F}_t\right). \quad (2.55)$$

BEWEIS: Zu (1): Wir verwenden Aussage (2.50) mit $Y := \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}$ und beachten, dass gilt $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(1 - e^{\Gamma_t - \Gamma_T} | \mathcal{F}_t) = \mathbb{Q}(t < \tau \leq T | \mathcal{F}_t) / \mathbb{Q}(\tau > t | \mathcal{F}_t)$.

Zu (2): Wir verwenden Aussage (2.50) mit $\hat{Y} := \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \cdot Y$ und beachten, dass gilt $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \cdot e^{\Gamma_t} \cdot Y | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \cdot Y | \mathcal{F}_t) / \mathbb{Q}(\tau > t | \mathcal{F}_t)$.

Zu (3): Nach Aussage (2.53) und den Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \cdot Y | \mathcal{G}_t) &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \cdot e^{\Gamma_t} \cdot Y | \mathcal{F}_t) = \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \cdot e^{\Gamma_t} \cdot Y | \mathcal{F}_s) | \mathcal{F}_t) = \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{\tau > s\}} | \mathcal{F}_s) \cdot e^{\Gamma_t} \cdot Y | \mathcal{F}_t) = \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}((1 - F_s) \cdot e^{\Gamma_t} \cdot Y | \mathcal{F}_t) = \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{\Gamma_t - \Gamma_s} \cdot Y | \mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

Zu (4): Zunächst zeigt man mit ganz analogen Überlegungen wie bei der Herleitung von (2.53), dass $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{t < \tau \leq s\}} \cdot Z_\tau | \mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot e^{\Gamma_t} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{t < \tau \leq s\}} \cdot Z_\tau | \mathcal{F}_t)$ gilt. Daher genügt es also, zu beweisen, dass gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{t < \tau \leq s\}} \cdot Z_\tau | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\int_{(t;s]} Z_u dF_u \middle| \mathcal{F}_t\right), \quad (**)$$

was wir nun tun. Zuerst nehmen wir an, dass Z ein stückweise konstanter, bzgl. \mathcal{F} vorhersehbarer Prozess sei, d.h. $Z_u = \sum_{j=0}^n Z_{t_j} \mathbb{1}_{\{t_j < u \leq t_{j+1}\}}$, wobei $t < u \leq s$, $t_0 = t < t_1 < \dots < t_{n+1} = s$, und Z_{t_j} ist eine \mathcal{F}_{t_j} -messbare Zufallsvariable. Nun gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{t < \tau \leq s\}} \cdot Z_{\tau} | \mathcal{G}_t) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{j=0}^n \mathbb{1}_{\{t_j < \tau \leq t_{j+1}\}} \cdot Z_{t_j} \middle| \mathcal{F}_{t_j}\right) = \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{j=0}^n Z_{t_j} \cdot (F_{t_{j+1}} - F_{t_j}) \middle| \mathcal{F}_{t_j}\right), \end{aligned}$$

somit folgt also (**) im ersten Fall. Im allgemeinen Fall approximiert man Z durch eine Folge stückweise konstanter, bzgl. \mathcal{F} vorhersehbarer Prozesse; aufgrund der Beschränktheit von Z und F konvergiert der in der letzten Gleichung auftretende bedingte Erwartungswert gegen den Ausdruck auf der rechten Seite von (**), und die Behauptung folgt. \square

Wir kommen nun zum Beweis von SATZ 2.10:

BEWEIS: Wir wenden die allgemeine Formel (2.45) an und erhalten daraus ganz analog zu BEISPIEL 2.9 die Beziehung

$$X^d(t, T) = B_t \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left((X \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + R^*(\tau) \cdot \mathbb{1}_{\{t < \tau \leq T\}}) \cdot B_T^{-1} \middle| \mathcal{G}_t\right).$$

Nach (2.54) gilt

$$B_t \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(B_T^{-1} \cdot X \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} \middle| \mathcal{G}_t\right) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot B_t \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(B_T^{-1} \cdot e^{\Gamma_t - \Gamma_T} \cdot X | \mathcal{F}_t).$$

Eine Anwendung von (2.55) liefert ferner

$$B_t \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(B_T^{-1} \cdot R^*(\tau) \cdot \mathbb{1}_{\{t < \tau \leq T\}} \middle| \mathcal{G}_t\right) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot B_t \cdot e^{\Gamma_t} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\int_t^T B_u^{-1} \cdot R^*(u) dF_u \middle| \mathcal{F}_t\right).$$

Aufgrund der Stetigkeit von Γ und F gilt schließlich

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\int_t^T B_u^{-1} \cdot R^*(u) dF_u \middle| \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\int_t^T B_u^{-1} \cdot e^{\Gamma_t - \Gamma_u} \cdot R^*(u) d\Gamma_u \middle| \mathcal{F}_t\right).$$

Addiert man die beiden ermittelten Terme, so ergibt sich (2.48). Die Aussage (2.49) ist eine unmittelbare Konsequenz aus (2.48) und DEFINITION 2.14. \square

BEISPIEL 2.17 Wir betrachten zwei Beispiele zur Anwendung von SATZ 2.10. Dabei unterstellen wir jeweils, dass Γ eine Intensität γ besitzt.

Im ersten Fall liege eine kreditrisikobehaftete Forderung mit Rückzahlung X und konstanter Recovery Rate $R^* = R$ vor. Nach (2.49) gilt dann

$$\begin{aligned} X^d(t, T) &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(R \cdot X \cdot \int_{(t; T]} e^{-\int_t^u (r(s) + \gamma(s)) ds} \cdot \gamma(u) du \mid \mathcal{F}_t \right) + \\ &+ \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T (r(s) + \gamma(s)) ds} \cdot X \mid \mathcal{F}_t \right). \end{aligned}$$

Im zweiten Fall betrachten wir die Situation, dass die Recovery Zahlung aus einem Anteil R eines kreditrisikolosen Zerobonds mit Nominal X und Fälligkeit T besteht. Dessen Barwert zur Zeit $t \in [0; T]$ beträgt nach (2.45) gerade

$$P^d(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T r(s) ds} \cdot X \mid \mathcal{G}_t \right).$$

Mit $R^*(u) = R \cdot P^d(t, T)$ folgt nun aus (2.49)

$$\begin{aligned} P^d(t, T) &= \\ &\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\int_{(t; T]} e^{-\int_t^u (r(s) + \gamma(s)) ds} \cdot \gamma(u) \cdot R \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_u^T r(s) ds} \cdot X \mid \mathcal{G}_u \right) du \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &+ \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T (r(s) + \gamma(s)) ds} \cdot X \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\int_{(t; T]} e^{-\int_t^T r(s) ds} \cdot e^{-\int_t^u \gamma(s) ds} \cdot \gamma(u) \cdot R \cdot X du \mid \mathcal{G}_t \right) \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &+ \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T (r(s) + \gamma(s)) ds} \cdot X \mid \mathcal{F}_t \right), \end{aligned}$$

wobei im zweiten Rechenschritt beim ersten Summanden messbare Faktoren in den inneren Erwartungswert hineingezogen wurden und Satz von FUBINI angewendet wurde. Unter Beachtung von

$$\int_{(t; T]} e^{-\int_t^u \gamma(s) ds} \cdot \gamma(u) du = 1 - e^{-\int_t^T \gamma(s) ds}$$

und Verwendung der Rechenregel (A.4) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} P^d(t, T) &= (1 - R) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T (r(s) + \gamma(s)) ds} \cdot X \mid \mathcal{F}_t \right) + \\ &+ R \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T r(s) ds} \cdot X \mid \mathcal{F}_t \right) \end{aligned}$$

Wir zitieren noch das folgende Resultat aus DUFFIE & LANDO (1999) [111] (vgl. auch BIELECKI & RUTKOWSKI (2002) [29]):

SATZ 2.11 (Mean fraction of market value) *Ist die zufällige Recovery Rate durch $R^*(t) = (1 - L) \cdot X^d(t-, T)$ gegeben (mit einer zufälligen Verlustrate L) und setzt man $L(t) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(L | \mathcal{F}_t)$, so gilt (unter geeigneten Integrierbarkeitsvoraussetzungen)*

$$P^d(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(- \int_t^T (r(u) + s(u)) du \middle| \mathcal{F}_t \right). \quad (2.56)$$

Dabei ist $s(t) := \gamma(t) \cdot L(t)$.

BEMERKUNG 2.14 *Die Größe $s(t)$ im letzten Satz lässt sich als Spread für die Übernahme des Kreditrisikos interpretieren. Basierend auf der Darstellung (2.56) können stochastische Modelle für die künftige Entwicklung der risikolosen Zinsen und der Spreads herangezogen werden, um kreditrisikobehaftete Forderungen zu bewerten. Des weiteren können **ökometrische Modelle** für die Zins- und Spreadstruktur aufgestellt werden und mit (2.56) kombiniert werden (vgl. DUFFIE & SINGLETON (1999, 2003) [111, 112]).*

Zum Abschluss dieses Abschnitts geben wir noch einen kurzen Ausblick zum Thema **Intensitätsmodelle mit Zustandsvariablen**. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf die Originalliteratur (z.B. LANDO (1998) [200]) sowie auf die ausführliche und weiterführende Darstellung in BIELECKI & RUTKOWSKI (2002) [29] und die dort zitierten Quellen.

Ausgehend von der Idee, dass das Kreditrisiko wie auch das allgemeine Zinsniveau von gewissen ökonomischen Indikatoren beeinflusst wird, führt man zur Modellierung der relevanten ökonomischen Größen eine Zustandsvariable $Y = (Y_t)_{t \in [0; T]}$ ein, bei der es sich um einen d -dimensionalen stochastischen Prozess handelt, welcher die Eigenschaft hat, ein MARKOV-Prozess bzgl. der Filtration \mathcal{F} unter dem Maß \mathbb{Q} zu sein. Für geeignete Funktionen

$$r : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad \lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$$

bildet man dann die Prozesse $(r(t))_{t \in [0; T]}$ (Zinsprozess) und $(\lambda(t))_{t \in [0; T]}$, (Intensitätsprozess) wobei gilt $r(t) = r(Y_t)$ und $\lambda(t) = \lambda(Y_t)$. Der entscheidende Punkt ist nun die Festlegung des Ausfallzeitpunktes τ : Dazu führt man auf dem Wahrscheinlichkeitsraum eine von \mathcal{F} unabhängige Zufallsvariable η mit Exponentialverteilung ein und setzt dann

$$\tau := \inf\{t \in \mathbb{R}^+ : \int_0^t \lambda(Y_s) ds \geq \eta\}.$$

Man kann τ interpretieren als Zeitpunkt des ersten Sprungs eines sog. COX-Prozesses (vgl. hierzu LANDO (1998) [200]). Als zusätzliche Annahmen werden getroffen:

- Die Auszahlung X einer kreditrisikobehafteten Forderung mit Fälligkeit T ist eine \mathcal{F}_T -messbare Zufallsvariable,
- der Recovery Prozess $(R^*(t))_{t \in [0;T]}$ ist ein bzgl. \mathcal{F} vorhersehbarer Prozess
- und die Funktionen r sowie λ erfüllen geeignete Integrierbarkeitsvoraussetzungen.

Unter diesen Annahmen ergibt dann eine Anwendung von SATZ 2.10 die folgende Darstellung des zur Zeit t gültigen Preises einer (noch nicht ausgefallenen) kreditrisikobehafteten Forderung:

$$\begin{aligned} X^d(t, T) &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\int_t^T e^{-\int_t^u (r(Y_s) + \lambda(Y_s)) ds} \cdot \lambda(Y_u) \cdot R^*(u) du \mid \mathcal{F}_t \right) + \\ &\quad + \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T (r(Y_s) + \lambda(Y_s)) ds} \cdot X \mid \mathcal{F}_t \right). \end{aligned}$$

Ein Beweis dieser Formel findet sich in BIELECKI & RUTKOWSKI (2002) [29].

2.5 Weiterführende Literatur

Eine sehr umfassende Darstellung der unterschiedlichen Modellierungsansätze für Kreditrisiken bietet das Werk [29] von BIELECKI & RUTKOWSKI (2002). Es wird dort auch auf die umfangreiche Originalliteratur verwiesen. Unsere Darstellung hier orientiert sich auch an dem Buch [36] von BINGHAM & KIESEL (2004), das dem Leser ebenfalls empfohlen sei. Weitergehende Untersuchungen finden sich auch in der Monographie [112] von DUFFIE & SINGLETON (2003) sowie in SCHÖNBUCHER (2003) [285]. Eine sehr empfehlenswerte Darstellung von Sprungprozessen bietet das Buch von CONT & TANKOV (2004) [90]. Von FINGER et al. (2002) werden in [127] Techniken zur Implementierung von Unternehmenswertmodellen und das CREDITGRADES[®]-Modell eingeführt.

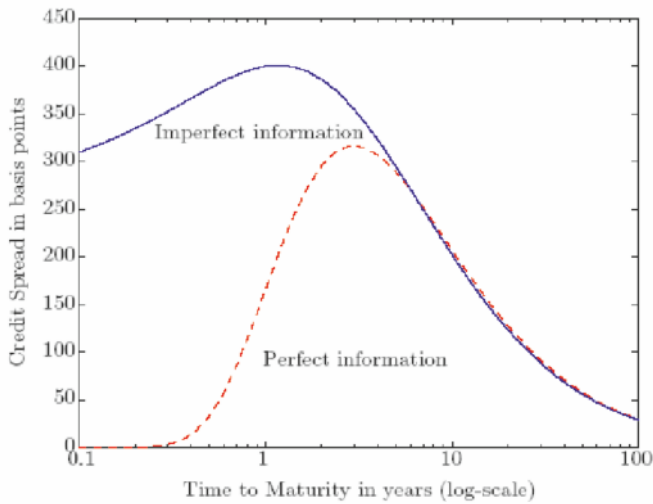


Abbildung 2.9 Einfluss unvollständiger Informationen über den Firmenwert auf die Zeitstruktur der Credit Spreads nach DUFFIE & LANDO (2001) [110].

Besonderer Erwähnung bedarf noch die Arbeit [110] von DUFFIE & LANDO (2001), in der erstmalig der Einfluss unvollständiger Information über Bilanzdaten bzw. allgemeiner des Firmenwertprozesses für Investoren auf die Zeitstruktur von Credit Spreads untersucht wird. Das von DUFFIE & LANDO (2001) entwickelte Unternehmenswertmodell ist dabei insofern konsistent mit Intensitätsmodellen, als dass darin wie bei diesen die Credit Spreads auch für kurze Laufzeiten von der Null weg beschränkt bleiben. Dies ist darauf zurückzuführen, dass bei unvollständigen Informationen die Nähe des Firmenwertes zur Ausfallschranke nicht bekannt ist, sodass diese Unsicherheit sich in entsprechend höheren Credit Spreads für kurze Laufzeiten gegenüber einem Unternehmenswertmodell unter vollständiger Information widerspiegelt (vgl. Abbildung 2.9).

Diese Problematik unvollständiger Information sowie deren Einflusses auf das Kreditrisiko und dessen Bewertung wurde von einer Reihe von Autoren im Nachgang aufgegriffen und weiter untersucht. In diesem Kontext sind vor allem die Arbeiten [132, 131, 133, 134] von T. SCHMIDT und R. FREY (u.a. mit verschiedenen Ko-Autoren) zu erwähnen, wobei für Kontrahentenrisiken bspw. die Arbeit [310] von S. VALCHEV et al. oder die Arbeit [130] von T. FREY und L. RÖSLER, auf die wir später noch einmal eingehen wollen, explizit genannt werden sollten.

<http://www.springer.com/978-3-658-02399-7>

Kreditderivate und Kreditrisikomodelle

Eine mathematische Einführung

Martin, M.; Reitz, S.; Wehn, C.

2014, XVI, 432 S. 84 Abb., 2 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-02399-7