

Kapitel 2

Der Body-Mass-Index – von Quetelet zu Haldane

Hans Niels Jahnke

Universität Duisburg-Essen

Abstract Die Idee dieser Arbeit entstammt einer Vorlesung für Studierende des Lehramtes für die Sekundarstufe I, in der gezeigt werden sollte, wie man schon mit elementarer Mathematik grundlegende Phänomene unserer Umwelt modellieren und daraus überraschende und einschneidende Erkenntnisse gewinnen kann. Phänomene in Natur und Technik legen es nahe, den Quotienten aus Volumen und Oberfläche zu bilden. K. Menninger und daran anknüpfend H. Winter bezeichnen diesen Quotienten suggestiv als *Massigkeit*. Man sieht nun leicht, dass unter den üblichen beim Body-Mass-Index (BMI) gemachten Annahmen Massigkeit und BMI proportional zueinander sind. Der Aufsatz zeigt, dass sich aus dieser Proportionalität eine Reihe von inhaltlichen Deutungen für den BMI ergeben. Insbesondere wird geometrisch plausibel, warum in der Definition des BMI das Körpergewicht durch das Quadrat der Körperlänge geteilt wird – eine Definition, die üblicherweise aus statistischen Daten abgeleitet wird. Der Aufsatz geht insbesondere der Frage nach, ob derartige Deutungen auch schon für Adolphe Quetelet (1796 – 1874), dem man die Erfindung des BMI zuschreibt, eine Rolle gespielt haben.

1 Massigkeit

Die folgenden Überlegungen sind aus einer Vorlesung über Inhalte des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I hervorgegangen. In einem einleitenden Kapitel sollte exemplarisch gezeigt werden, wie man schon mit elementarer Mathematik grundlegende Phänomene unserer Umwelt modellieren und daraus überraschende und einschneidende Erkenntnisse gewinnen kann. Konkret ging es um die Beziehung zwischen Umfang und Inhalt von ebenen Figuren bzw. zwischen Oberfläche und Volumen von Körpern. Martin Wagenschein hat dafür die glückliche Bezeichnung „Kern und Schale“ gefunden, die Winter übernimmt.

Aus Winters reichem Material (Winter 1997, S. 56-66) hat der Autor für die Vorlesung zwei Themenbereiche ausgewählt. Zunächst geht es um die „relative Unabhängigkeit von Kern- und Schalenmaß“. Während das naive Denken annehmen mag, dass eine Schale umso größer ist, je größer der Kern ist, den sie um-

schließt, zeigt der analysierende Blick des Mathematikers, dass ein Kern von vorgegebenem Inhalt (aber natürlich veränderlicher Gestalt) von Schalen unterschiedlicher Größe umgeben sein kann. Für die idealen Objekte der Mathematik gilt sogar, dass zu vorgegebenem Flächeninhalt Figuren mit beliebig großem Umfang gefunden werden können. Das dazu duale isoperimetrische Problem führt bekanntlich auf die Aussage, dass bei vorgegebenem Umfang der Kreis die Figur mit dem größten Flächeninhalt ist. Im Dreidimensionalen gelten analoge Aussagen. Natur und Technik machen von dieser „relativen Unabhängigkeit von Kern- und Schalenmaß“ reichlichen Gebrauch. Der Polarfuchs etwa hat eine gedrungene, möglichst kugelnahе Gestalt, um die Abgabe von Körperwärme an seine kalte Umgebung zu minimieren. Dagegen hat sein Artgenosse aus tropischen Regionen das umgekehrte Problem zu lösen und verfügt über einen fein gegliederten Körper mit wesentlich größerer Oberfläche. Ebenso konstruiert der Ingenieur einen Wärmetauscher (Heizung, Kältemaschine) zu vorgegebenem Volumen so, dass seine Oberfläche möglichst groß wird: Natur und Ingenieur nutzen also die Tatsache, dass die Kapazität zum Wärmeaustausch proportional zur Oberfläche ist.

Ein zweiter Themenschwerpunkt erwächst aus der Frage, wie Kern und Schale sich bei maßstäblicher Größenänderung verhalten. Wenn bei zwei ähnlichen Figuren F_1 und F_2 zwei sich entsprechende Seiten l_1 und l_2 im Verhältnis $\frac{l_1}{l_2} = k$ stehen,

dann verhalten sich ihre Flächeninhalte wie k^2 . Entsprechend gilt für Körper, dass sich die Oberflächen wie k^2 und die Volumina wie k^3 verhalten, wenn die Liniendimensionen im Verhältnis k stehen. Man illustriert dies z.B. durch die Feststellung, dass ein bis auf halbe Höhe gefülltes (kegelförmiges) Sektglas nur zu

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \text{ mit Sekt gefüllt ist.}$$

Man kann diese Aussagen allgemein beweisen, wozu im Dreidimensionalen streng genommen schon die Integralrechnung erforderlich ist. Man sollte sie aber auch an konkreten Formeln für Flächen- und Rauminhalte demonstrieren, um den Studierenden zu zeigen, dass diese Aussagen sich auch im Bau dieser Formeln ausdrücken. Formeln, die Flächeninhalte zu berechnen gestatten, sind Funktionen 2. Grades, Formeln für Volumina solche 3. Grades.

Es kann kein Zweifel bestehen, dass der Begriff der Ähnlichkeit wegen seiner fundamentalen Bedeutung für die Anwendung der Mathematik in Technik und Naturwissenschaften eine zentrale Rolle im allgemeinbildenden Mathematikunterricht spielen sollte. Dasselbe gilt für die unterschiedlichen Größenverhältnisse von Längen, Flächen und Volumina bei ähnlichen Figuren und Körpern.

Wir stellen uns nun zwei Personen vor, die gleiches Gewicht haben, uns in ihrer Konstitution aber ganz ungleich vorkommen. Die eine Person mag klein und rundlich sein, die andere groß und schlank, die eine ein „Fässchen“, die andere eine „Bohnenstange“. Solche Gegensätze findet man überall: der massige Elefant und die sperrige Giraffe, die wuchtige romanische Basilika und der filigrane gotische Dom, die massive Steinbrücke und die luftige Hängebrücke (Menninger 1958, S. 181ff).

Kann man diesen qualitativen Unterschied mathematisch quantifizieren, so dass man den binären Gegensatz „dick vs. dünn“ in graduelle Unterschiede „dicker“ bzw. „dünner“ auflösen kann? Offenbar kann die Angabe des Volumens (oder der Masse) allein dieses Problem nicht lösen. Man müsste das Volumen irgendwie zur „Ausgedehntheit“ ins Verhältnis setzen. Für die Ausgedehntheit reicht aber nicht allein die Länge (Größe). Die romanische Basilika und der gotische Dom etwa mögen gleiche Längenausdehnung haben, sie unterscheiden sich aber in der „Gegliedertheit“ ihrer Oberfläche.

Die letztere Beobachtung führt darauf, einen neuen Begriff einzuführen und als „*Massigkeit*“ eines Körpers das Verhältnis seines Volumens zu seiner Oberfläche zu definieren (Menninger 1958, S. 182). Die Massigkeit M_K eines Körpers K ist also definiert als

$$M_K := \frac{V_K}{O_K},$$

wobei V_K das Volumen und O_K die Oberfläche von K bedeuten.

Offenbar trifft diese Definition in allen angeführten Beispielen das Gewünschte. Der Elefant wird massiger sein als die Giraffe, der kugelige Polarfuchs massiger als der fein gegliederte, schlanke Fuchs aus den tropischen Regionen.

Ein Würfel mit der Kantenlänge 10 cm hat ein Volumen von 1000 cm^3 . Seine Oberfläche ist $6 \cdot 100 \text{ cm}^2 = 600 \text{ cm}^2$, seine Massigkeit also

$$\frac{1000 \text{ cm}^3}{600 \text{ cm}^2} = \frac{5 \text{ cm}^3}{3 \text{ cm}^2} \approx 1,67 \frac{\text{cm}^3}{\text{cm}^2}.$$

Eine Holzleiste von 10 m Länge und einem Querschnitt von 1 cm mal 1 cm hat hingegen wieder ein Volumen von 1000 cm^3 , aber eine Massigkeit von

$$\frac{1000 \text{ cm}^3}{4 \cdot 1000 + 2 \cdot 1^2 \text{ cm}^2} = \frac{1000 \text{ cm}^3}{4002 \text{ cm}^2} \approx 0,25 \frac{\text{cm}^3}{\text{cm}^2}.$$

Die Massigkeit des Würfels beträgt also etwa das 6,67 - fache der Massigkeit der gleich voluminösen und gleich schweren Holzleiste.

Allgemein ist die Massigkeit eines Würfels W mit der Kantenlänge a

$$M_W = \frac{a^3}{6a^2} = \frac{a}{6}.$$

Wenn man sich die Oberfläche eines Körpers in der Ebene ausgebreitet denkt (manchmal geht das nur angenähert) und das Volumen des Körpers gleichmäßig auf die Oberfläche verteilt, dann gibt die Massigkeit die Dicke dieser Volumenschicht an. Anders gesagt: *Die Massigkeit gibt an, wie viel Volumen eines Körpers auf eine Flächeneinheit seiner Oberfläche entfällt.* Man kann sie sich als die Höhe einer Säule über dieser Flächeneinheit vorstellen. Das drückt sich auch darin aus, dass die Massigkeit die Dimension einer Länge hat.

Geht ein Körper K' aus einem Körper K durch Streckung mit dem Faktor k hervor, dann ist die Massigkeit von K' das k -fache der Massigkeit von K , denn

$$M_{K'} = \frac{V_{K'}}{O_{K'}} = \frac{k^3 \cdot V_K}{k^2 \cdot O_K} = k \cdot M_K$$

Auf die Flächeneinheit der Oberfläche des k -mal so großen Körpers K' entfällt also im Vergleich zum ursprünglichen Körper K das k -fache Volumen; demnach ist die Säule, die die Massigkeit von K' darstellt k -mal so hoch wie die von K . Diese Eigenschaft der Massigkeit ist fundamental, wir wollen sie die Skalensensitivität der Massigkeit nennen.

Auf der Suche nach Übungsaufgaben, in denen ein mathematischer Begriff angewendet werden kann, verfallen Lehrende heutzutage gerne auf vermeintlich Populäres, und, wie allgemein bekannt, ist der Body-Mass-Index (BMI) in dieser Hinsicht ein heißer Kandidat. So kam dem Autor geradezu unvermeidlich der BMI in den Sinn, und, siehe da, der BMI erweist sich als eine direkte Anwendung des Begriffs der Massigkeit. Der BMI ist definiert als

$$\text{BMI} := \frac{G}{l^2},$$

wobei G das Körpergewicht in kg und l die Körpergröße in m bedeuten. Unter den üblichen, beim BMI gemachten Voraussetzungen nimmt man für den menschlichen Körper eine einheitliche Dichte an. Dann ist aber das Gewicht eines Körpers proportional zu seinem Volumen ($G \sim V$), und seine Oberfläche ist proportional zum Quadrat der Körpergröße ($l^2 \sim O$). *Folglich ist der BMI proportional zur Massigkeit* des jeweiligen Menschenkörpers,

$$\text{BMI} \sim \frac{V}{O} = M$$

Der „Body-Mass-Index“ (BMI) ist ein einfaches Verfahren aus der Anthropometrie zur vergleichenden Einschätzung des Ernährungszustandes des Menschen (Bohlen 2010, S. 1). Als solcher muss er in gewissen Grenzen allgemein anwendbar sein. Die WHO (World Health Organisation) gibt Vergleichswerte für erwachsene Menschen an. Deren Größe variiert etwa zwischen 1,60 m und 2,10 m. Die Definition

$$\text{BMI} := \frac{G}{l^2}$$

setzt also voraus, dass im Intervall [1,60m; 2,10m] für normalgewichtige Personen mit einem idealen BMI der Größe b die Proportionalität

$$G = b \cdot l^2$$

besteht. Um den BMI als angemessenen Maßstab benutzen zu können, müsste also gezeigt werden, dass eine solche Gesetzmäßigkeit den Zusammenhang von G und l^2 hinreichend gut beschreibt.

Durch die Proportionalität von BMI und Massigkeit werden inhaltliche Deutungen des BMI nahegelegt, auf die weiter unten eingegangen wird. Es ist zudem eine naheliegende Frage, ob solche Deutungen, also letztlich geometrische Über-

legungen, in der Genese des BMI eine Rolle gespielt haben. Dem soll im Folgenden nachgegangen werden.

2 Leibniz' Tempel

Als kleines Präludium der folgenden Geschichte wurden die Studierenden in der oben erwähnten Vorlesung an eine Überlegung des Philosophen und Mathematikers G. W. Leibniz (1646 - 1716) erinnert. Sie hat nichts mit dem Body-Mass-Index zu tun, führt aber in die Problematik auf wunderbar anschauliche Weise ein.

Im Zusammenhang eines philosophisch-mathematischen Versuchs, den geometrischen Begriff der Ähnlichkeit zu definieren, stellte Leibniz das folgende Gedankenexperiment an:

Denken wir uns, es seien zwei Tempel oder Gebäude in der Weise eingerichtet, dass sich in dem einen nichts finden lässt, was sich nicht auch in dem anderen vorfände: dass also das Material durchweg dasselbe, etwa weißer parischer Marmor ist, dass ferner die Wände, die Säulen und alles übrige beiderseits genau dieselben Verhältnisse zeigen, die Winkel in beiden gleich sind usw. Wird nun jemand mit verbundenen Augen nacheinander in diese beiden Tempel geführt, und wird ihm erst nach dem Eintritt die Binde abgenommen, so wird er, wenn er in ihnen umhergeht, an ihnen selbst kein Merkmal entdecken, an dem er sie unterscheiden könnte. Trotzdem aber können sie der Größe nach voneinander verschieden sein ... (Leibniz o.J./1966, S. 72).

Leibniz schließt daraus, dass zwei Objekte ähnlich sind, wenn sie ununterscheidbar in allen Eigenschaften außer ihrer Größe sind. Denkt man den Beobachter auf ein punktförmiges Auge reduziert, erscheinen ihm die beiden Tempel als gleich. Wenn der Beobachter hingegen seinen Körper in die Betrachtung einbezieht, dann verfügt er über einen Maßstab, durch den er die beiden Tempel unterscheiden kann. Erst bei Einbeziehung eines Maßstabes ist dann ein 40 cm hoher Tempel von einem 40 m hohen Tempel verschieden.

Die Studierenden wurden auch an das Buch *Gullivers Reisen* (1726) von Jonathan Swift erinnert, in dem zu Zwecken politischer Satire mit einer ähnlichen Vision wie der von Leibniz' Tempeln gespielt wird. Bis auf die Größe sind das Land Liliput und seine Einwohner vom England des frühen 18. Jahrhunderts nicht unterscheidbar.

Leibniz' Gedankenexperiment und Swifts dichterische Vision sind Fiktionen. Aber worin besteht das Fiktionale? Handelt es sich um gedanklich mögliche Vorstellungen, die die Natur nur zufällig nicht realisiert hat, oder um Ideen, die fundamentalen Gesetzmäßigkeiten unserer Welt widersprechen? Es zeigt sich, dass Letzteres der Fall ist. Der Grund, warum zwei ähnliche Welten, die in ihren Größen wesentlich verschieden sind, nicht existieren können, ist so fundamental, dass man ihn als „quasi-mathematisch“ bezeichnen könnte. Der Leibnizsche 40-cm-Tempel und sein 40-m-Gegenstück sind durch einen versteckten geometrischen Parameter charakterisiert, der es ausschließt, dass der eine Tempel möglich ist,

wenn der andere existiert. Wie im Folgenden gezeigt wird, ist die Massigkeit dieser Parameter.

3 Quetelets „Soziale Physik“

Kehren wir zum Body-Mass-Index zurück. Als sein Erfinder gilt der belgische Mathematiker Adolphe Quetelet (1796 – 1874). Quetelet nahm schon in jungen Jahren eine zentrale Stellung im Wissenschaftsbetrieb des neu gegründeten Staates Belgien ein. So gründete er 1826 die Sternwarte in Brüssel und wurde 1834 ständiger Sekretär der Brüsseler Akademie der Wissenschaften. Er verfolgte das Ziel, die Sozialwissenschaften als eine der Physik vergleichbare strenge Wissenschaft zu entwickeln und zu begründen. Sein Hauptwerk (Quetelet 1835/1921) enthält im Titel programmatisch den Begriff „Soziale Physik“. In Quetelets Soziologie ist der Begriff des „mittleren Menschen“ („homme moyen“) zentral. Quetelet nimmt an, dass Eigenschaften der Menschen wie Körpergröße, „Neigung zum Verbrechen“ etc. im Allgemeinen normal verteilt sind. Dann kann man sich hypothetisch den Menschen vorstellen, der in Bezug auf diese Eigenschaften jeweils den Mittelwert repräsentiert und diesen den „mittleren Menschen“ nennen. Der hypothetische mittlere Mensch ist das Produkt „wesentlicher Ursachen“. Die Eigenschaften der realen Menschen oszillieren aufgrund von „zufälligen Ursachen“ jeweils um die des mittleren Menschen. Umgekehrt kann man den mittleren Menschen dadurch konstruieren, dass man aus statistischen Daten die Verteilungen der jeweiligen Eigenschaften und ihre Mittelwerte bestimmt. Quetelet wurde so zum Begründer der modernen Sozialstatistik und Anthropometrie.

Im 2. Band der „Sozialen Physik“ untersucht Quetelet zunächst die Verteilungen von physischen Eigenschaften des Menschen wie Größe, Gewicht, Kraft, Schnelligkeit, Beweglichkeit. Man vergleiche zu den folgenden Ausführungen auch die Arbeit (Mamerow 2012). Zu seiner Zeit lagen Quetelet nur wenige und unsystematische empirische Daten über Größen und Gewichte von Menschen vor. Er versuchte, diesen Mangel zu beheben, indem er Daten aus unterschiedlichen Bereichen zusammenführte. So verschaffte er sich Messwerte aus Brüsseler Kliniken, Schulen, Waisenhäusern und aus Unterlagen für Musterungen zum Militär. Das erlaubte es ihm, für die belgische Bevölkerung Tabellen aufzustellen, die Größe und Gewicht von Männern und Frauen in Abhängigkeit vom Alter darstellen. Aus diesen Daten versuchte er Gesetze über das Wachstum der Menschen abzuleiten.

Seine Überlegungen über den Zusammenhang von Gewicht und Größe beim Menschen leitet Quetelet im Kapitel „Verhältnis zwischen Gewicht und Größe“ mit einer allgemeinen Formulierung seines Ergebnisses ein. Er sagt:

Würde der Mensch gleichmäßig nach allen Dimensionen wachsen, so würden sich die Gewichte in den verschiedenen Lebensaltern wie die Kubikzahlen der Größe verhalten. In Wirklichkeit macht man aber eine andere Beobachtung. Die Zunahme des Gewichts geschieht weniger schnell, ausgenommen im ersten Jahr nach der Geburt, in welchem das

angegebene Verhältnis ziemlich regelmäßig beobachtet wird. Nach dieser Zeit aber und bis gegen das Pubertätsalter entspricht die Zunahme des Gewichts fast den Quadraten der Größe. Die Entwicklung des Gewichts wird noch sehr schnell zur Zeit der Pubertät und steht dann ungefähr mit 25 Jahren still. Im allgemeinen weicht man wenig von der Wahrheit ab, wenn man annimmt, *dass sich während dieser Entwicklung die Quadrate des Gewichts in den verschiedenen Lebensaltern wie die fünften Potenzen der Größe verhalten*; was, vorausgesetzt, daß das spezifische Gewicht dasselbe bleibt, von selbst zu der Folgerung führt, dass das Wachstum des Menschen in die Breite geringer ist als das in die Länge (Quetelet 1835/1921, S. 89).

Also: wenn der Mensch so wächst, dass der größere Mensch ähnlich zum kleineren ist (er wächst „gleichmäßig in allen Dimensionen“), dann verhalten sich die Gewichte wie die Kubikzahlen der Größen. Die Gewichte sind proportional zu den Volumina, und letztere wachsen in der dritten Potenz. Das sei, so Quetelet, im ersten Jahr nach der Geburt noch richtig, danach beobachte man aber etwas anderes, dass nämlich die Zunahme der Gewichte den Quadraten der Größen entspreche. In den verschiedenen Phasen des Wachstums (vor, während und nach der Pubertät) sind die Wachstumsgeschwindigkeiten noch unterschiedlich, so dass man insgesamt mit der $2\frac{1}{2}$ -ten Potenz wenig von der Wahrheit abweiche. Folglich

wachse der Mensch nicht in allen Dimensionen gleich, und der größere Mensch sei nicht ähnlich zum kleineren. Stattdessen sei das Wachstum des Menschen in die Breite geringer als in die Länge. Gemessen am Maßstab der Ähnlichkeit seien größere Menschen also im Allgemeinen schlanker als kleinere und umgekehrt seien kleinere korpulenter als größere.

Unter Hinzunahme von Beobachtungen an gleich alten, aber unterschiedlich großen Menschen entscheidet sich Quetelet dafür, *dass insgesamt die Gewichte sich verhalten wie die Quadrate der Größen*.

Wie begründet Quetelet diese letztere Aussage? Der Leser, der nun umfangreiche statistische Rechnungen an Daten zu Größen und Gewichten erwartet, sieht sich gründlich getäuscht. Stattdessen setzt Quetelet größte und kleinste Werte ins Verhältnis. Dies sei am Beispiel der Daten zu Männern erläutert, für Frauen ergibt sich mit anderen Werten ungefähr dasselbe Ergebnis (Quetelet 1835/1921, S. 90). Quetelet wählt aus seinen Daten die Größen und Gewichte der zwölf größten und zwölf kleinsten Männer aus und bildet Mittelwerte. Das führt ihn auf das Ergebnis, wie es in Tabelle 3.1 zu sehen ist.

Tab. 3.1 Mittelwerte Größen und Gewichte von Männern

	Größe	Verhältnis des Gewichts zur Größe
Mittelwert kleinste Männer	$t = 1,511 \text{ m}$	$p/t = 36,7$
Mittelwert größte Männer	$T = 1,822 \text{ m}$	$T/P = 41,4$

In Tabelle 3.1 bezeichnen t und T die Mittelwerte für die Größe sowie p und P die Mittelwerte für das Gewicht der größten und kleinsten „Individuen“.

Bildet man den Quotienten der beiden Mittelwerte für die Größe, erhält man

$$t : T = \frac{1,511 \text{ m}}{1,822 \text{ m}} \approx 0,829 \approx \frac{5}{6}.$$

Ebenso ergibt sich für die beiden Quotienten aus Gewicht und Größe

$$\frac{p}{t} : \frac{P}{T} = \frac{36,7}{41,4} \approx 0,886 \approx \frac{5}{6}.$$

Offensichtlich wird hier kräftig gerundet. Da der Quotient in beiden Spalten gleich $5/6$ ist (ein Ergebnis der Daten), darf man die linken Seiten gleichsetzen:

$$\frac{p}{t} : \frac{P}{T} = t : T \Leftrightarrow \frac{p}{P} = \frac{t^2}{T^2}.$$

Das ist das gewünschte Ergebnis: die *Gewichte verhalten sich wie die Quadrate der Größen*.

Eine populäre Version desselben Argumentes findet sich drei Seiten später (Quetelet 1835/1921, S. 93). Dort erwähnt er einen schwedischen „Riesen“, der bei den Leibgardisten Friedrichs II. diente und der 2,52 m groß gewesen sein soll, und einen englischen „Zwerg“ von 0,44 m. Dann sagt er, dass diese zwei Individuen sozusagen die Grenzen unserer Gattung bilden. Wenn sie nun zueinander im geometrischen Sinne ähnlich wären, dann würden sich ihre Gewichte wie 188 zu 1 verhalten. „Ein derartiges Missverhältnis hat gewiss niemals zwischen zwei Menschen bestehen können.“ (Quetelet 1835/1921, S. 93) Dies ist einfach ein Appell an die Anschauung (oder den gesunden Menschenverstand) und kann sicher nicht als wissenschaftliches Argument gewertet werden.

Ausdrücklich wendet sich Quetelet gegen den französischen Naturforscher Buffon (1707 – 1788), von dem er ohne Quellenangabe behauptet, dieser habe die Gewichte als proportional zu den dritten Potenzen der Größen betrachtet. Er wirft Buffon vor, keine Daten studiert und sich damit begnügt zu haben,

„ein Ergebnis der Theorie auszusprechen, indem er voraussetzte, dass die Menschen im geometrischen Sinne unter sich ähnlich seien.“ (Quetelet 1835/1921, S. 94)

Es ist schwer zu beurteilen, wie intensiv und mit welchen Methoden Quetelet sich tatsächlich mit seinen Daten über Größe und Gewicht auseinandergesetzt hat. Über die oben vorgeführte Rechnung hinaus gibt es bei ihm keinerlei datenbezogene Diskussion. Insbesondere versucht Quetelet nicht, rechnerisch zu zeigen, dass der von ihm postulierte Zusammenhang

$$G \sim l^2$$

zwischen Gewicht G und dem Quadrat der Größe l^2 besser mit den Daten übereinstimmt als Buffons Annahme

$$G \sim l^3.$$

Das wäre auch nicht leicht gewesen. Wenn man nämlich mit modernen Methoden Quetelets Daten analysiert, ist es schwer zu sehen, wie sich daraus die Proportionalität $G \sim l^2$ ablesen lassen soll. Auf S. 91 von (Quetelet 1835/1921) findet man eine Tabelle, in der zu den Größen zwischen 0,60 m und 1,90 m, jeweils in Schritten von 10 cm, die zugehörigen Mittelwerte der Gewichte aus Quetelets Erhebungen angegeben sind. Berechnet man die Korrelationen zwischen G und l , G und l^2

sowie G und l^3 , dann erhält man in allen drei Fällen hohe Werte oberhalb von 0,9, eine Bevorzugung des Verhältnisses von G und l^2 lässt sich aber nicht ablesen. Der Leser sollte sich, um die Situation angemessen zu bewerten, klar machen, dass Quetelet die statistischen Werkzeuge, die wir heutzutage benutzen, nicht zur Verfügung standen. Regression und Korrelation wurden erst am Ende des 19. Jahrhunderts von Galton und Yule entwickelt.

So ist es kein Wunder, dass Quetelet sich letztlich sehr vorsichtig ausdrückt, wenn er resümierend feststellt:

„Nach den zahlreichen Untersuchungen, die ich über die Wechselbeziehungen zwischen den verschiedenen Größen und Gewichten der erwachsenen Menschen angestellt habe, glaubte ich den Schluss ziehen zu können, dass die Gewichte einfach wie die Quadrate der Größen sich verhalten.“ (Quetelet 1835/1921, S. 94)

Wie gesagt: welcher Art diese zahlreichen Untersuchungen sind, sagt er nicht.

Insgesamt ergibt die Lektüre von Quetelets „Sozialer Physik“ das folgende Bild. Quetelet betrachtet drei mögliche Proportionalitäten, nämlich

$$(1) G \sim l^2, (2) G \sim l^{2,5} \text{ und } (3) G \sim l^3.$$

Den Fall (2) zieht er in Erwägung, schließt ihn aber unter Hinweis auf die Gesamtheit seiner Daten aus. (3) ist die These von Buffon. Sie beruht auf der Annahme, dass große und kleine „mittlere Menschen“ zueinander im geometrischen Sinne ähnlich sind. Dem hält Quetelet entgegen, dass Menschen in der Länge stärker wachsen als im Querschnitt und dass von geometrischer Ähnlichkeit daher keine Rede sein könne. Seine Begründung für diese Aussage ist aber mehr phänomenologischer Art. In seinen Daten findet diese Aussage keine zwingende Stütze. Da er keine weiteren Begründungen anführt, ist es schwer zu sagen, warum Quetelet die Proportionalität (1) $G \sim l^2$ bevorzugt. Man kann nicht ausschließen, dass es sich hierbei um eine Meinung handelt, die zu seiner Zeit auch andere Wissenschaftler vertreten haben. Aussagen dazu gibt es bei Quetelet allerdings nicht.

Der Leser sollte sich klarmachen, dass Quetelet den Quotienten $\frac{G}{l^2}$, also den eigentlichen Body-Mass-Index nicht gebildet hat, geschweige denn, dass er auf die Idee gekommen wäre, diesen Quotienten als Beurteilungsgröße für den Ernährungszustand von Menschen anzuwenden. Quetelet ist ausschließlich an der Formulierung eines Gesetzes interessiert, das die Körpergröße mit dem Gewicht des „mittleren Menschen“ verknüpft.

Eine Geschichte des Body-Mass-Index ist noch nicht geschrieben. In der Anthropometrie am Ende des 19. und beginnenden 20. Jahrhunderts wird mit verschiedenen Indizes experimentiert. Auch der Quotient $\frac{G}{l^3}$, der auf Buffons Annahme der Proportionalität $G \sim l^3$ beruht, spielte als „Ponderalindex“ weiter eine Rolle. Die Arbeit (Keys et al. 1972) scheint die entscheidende Wende zugunsten des Index $\frac{G}{l^2}$ eingeleitet zu haben. In dieser Arbeit wurden mehrere Studien mit großen

Anzahlen von Probanden ausgewertet, in denen für jede Versuchsperson die Größe, das Gewicht, die Dicke der subkutanen Fettschicht und die Körperdichte gemessen worden sind. Subkutane Fettschicht und Körperdichte erlauben eine direkte Beurteilung des Ernährungszustands, Gewicht und Körpergröße sind leicht messbar. Die Autoren der Studie stellen nun die einleuchtenden Forderungen auf, dass ein aus G und l gebildeter Index zur Beurteilung des Ernährungszustandes einerseits von der Länge unabhängig sein sollte, andererseits sollte er möglichst gut mit den Parametern ‚subkutane Fettschicht‘ und ‚Körperdichte‘ korrelieren. Verglichen werden die drei Möglichkeiten

$$(1) \frac{G}{l}, \quad (2) \frac{G}{l^2}, \quad (3) \frac{G}{l^3}$$

Aus den Daten ergibt sich eine deutliche Präferenz von (2) gegenüber (3) und eine leichte Präferenz von (2) gegenüber (1), genauer:

Judged by the criteria of correlation with height (lowest is best) and to measures of body fatness (highest is best), the ponderal index [das heißt $\frac{G}{l^3}$] is the poorest of the relative weight indices studied. The ratio of weight to height squared, here termed the body mass index, is slightly better in these respects than the simple ratio of weight to height. The body mass index seems preferable over other indices of relative weight on these grounds as well as on the simplicity of the calculation and, in contrast to percentage of average weight, the applicability to all populations at all times. (Keys et al. 1972, S. 341)

4 Haldanes Prinzip

Der Body-Mass-Index $\frac{G}{l^2}$ setzt sich aus Größen zusammen, die leicht messbar sind. Da er mit anderen Größen, die eine direkte Beurteilung des Ernährungszustands erlauben, statistisch gut korreliert, ermöglicht er eine praktikable Gewinnung von Daten zur Beurteilung des Ernährungszustands. Wie angemessen und relevant dieser Indikator tatsächlich ist, kann in einem mathematischen Aufsatz natürlich nicht diskutiert werden und ist unter Medizinern und Physiologen in der Diskussion.

Die Eignung des BMI wird statistisch begründet. Wir wollen uns nun mit der Frage einer möglichen inhaltlichen Deutung beschäftigen. Dazu knüpfen wir an einen berühmten Aufsatz des britischen Biologen John Burdon Sanderson Haldane (1892 – 1964) an, der in den 1920er Jahren geschrieben wurde und den Titel *On Being the Right Size* trägt. Haldane war theoretischer Biologe und Genetiker und einer der Begründer der Populationsgenetik. Vorweg sollte gesagt werden, dass Haldane nicht an Indices für Fettleibigkeit interessiert war, sondern an der Formulierung einer grundlegenden biologischen Gesetzmäßigkeit.

Die Hauptaussage dieses Aufsatzes findet sich in den einleitenden Zeilen. Haldane sagt, dass die offensichtlichsten Unterschiede in der Natur solche der

Größe seien und dass die Zoologen dieser Tatsache bisher nur wenig Beachtung geschenkt hätten. In Lehrbüchern der Zoologie werde nicht thematisiert, dass der Adler größer sei als der Sperling oder das Nilpferd größer als der Hase. Aber, sagt Haldane, es könne leicht gezeigt werden, dass ein Hase nicht so groß sein könne wie ein Nilpferd oder ein Wal so klein wie ein Hering. Dem liege das Prinzip zugrunde, *dass es für jedes Lebewesen eine angemessene Größe gebe und dass eine beträchtliche Änderung der Größe unvermeidlich eine Änderung der Form nach sich ziehe*. Diese Aussage wird in der Literatur als das *Prinzip von Haldane* bezeichnet.

Den Kern seines Arguments stellt Haldane in amüsanter Form am Beispiel von menschenähnlichen Riesen dar. Doch hören wir ihn selbst:

Let us take the most obvious of possible cases, and consider a giant man sixty feet high - about the height of Giant Pope and Giant Pagan in the illustrated *Pilgrim's Progress* of my childhood. These monsters were not only ten times as high as Christian, but ten times as wide and ten times as thick, so that their total weight was a thousand times his, or about eighty to ninety tons. Unfortunately the cross-sections of their bones were only a hundred times those of Christian, so that every square inch of giant bone had to support ten times the weight borne by a square inch of human bone. As the human thigh-bone breaks under about ten times the human weight, Pope and Pagan would have broken their thighs every time they took a step. This was doubtless why they were sitting down in the picture I remember. But it lessens one's respect for Christian and Jack the Giant Killer. (Haldane 1927/1985, S. 1)

Pilgrim's Progress war ein weit verbreitetes Erbauungsbuch des britischen Baptistenpredigers und Schriftstellers John Bunyan, das 1678, also 40 Jahre vor Swifts *Gullivers Reisen*, erschienen ist. Auf seinem Weg zur Seligkeit trifft der Held Christian auf alle möglichen Feinde des rechten Glaubens, die er besiegen muss und unter denen –in einem anglikanischen Buch!- der Papst („giant pope“) nicht fehlen darf. Unterstellt man, dass Riesen im geometrischen Sinne zu Menschen ähnlich sind, dann hat der zehnmal so große Riese ein tausendmal so großes Volumen und eine tausendmal so große Masse, die von seinen Knochen zu tragen ist, deren Querschnitt nur hundertmal so groß ist. Also hat die Flächeneinheit des Oberschenkels von Giant Pope das zehnfache Gewicht zu tragen, das ein menschlicher Oberschenkel tragen muss. Wenn der Knochen des Riesen in seiner Konsistenz sich vom menschlichen Knochen nicht unterscheidet, muss das zum Bruch führen.

Generell gilt, dass die Bruchfestigkeit eines Balkens proportional zu seinem Querschnitt ist. Wenn man sich zu einem beliebigen Lebewesen eine zehnmal so große Kopie vorstellt, dann hat diese ein tausendmal so großes Gewicht, aber nur eine hundertmal so große Tragfähigkeit. Das Skelett wird unter dieser Last brechen. Nun ist das Gewicht proportional zum Volumen V , also proportional zur dritten Potenz der Größe l , d. h. $G \sim V \sim l^3$, der Querschnitt Q ist proportional zum Quadrat der Größe und damit auch zur Oberfläche O , also $Q \sim l^2 \sim O$. Die physikalischen Eigenschaften der Knochen des betrachteten Lebewesens erfordern, dass Gewicht und Querschnitt der Knochen in einem angemessenen Ver-

hältnis stehen. Dieses Verhältnis ist proportional zu $\frac{l^3}{l^2}$ bzw. zu $\frac{V}{O}$. Letzterer

Quotient war als Massigkeit definiert worden. Die oben erwähnte Skalensensitivität der Massigkeit hat also zur Folge, dass das Skelett eines mit dem Faktor k vergrößerten Lebewesens (k hinreichend groß) keine hinreichende Tragfähigkeit mehr hat. Genau das wird in Haldanes Prinzip ausgesagt. Ein Lebewesen mit der organisch-physiologischen Ausstattung des Menschen muss grosso modo auch die Größe von Menschen haben. Stellt man sich einen größeren Menschen vor, hat das notwendig eine Veränderung der Form bzw. seiner organisch-physiologischen Ausstattung zur Folge. Das ist es, was möglicherweise auch Quetelet schon wusste oder ahnte, als er so selbstgewiss gegen Buffon sagte, dass der Mensch, wenn er in der Länge wächst, nicht im selben Maße auch in die Breite wachse.

Mit dieser Überlegung ist auch gezeigt, dass die Leibnizsche Vision der unterschiedlich großen, aber geometrisch ähnlichen Tempel unmöglich ist, wenn das Material jeweils dasselbe ist. Der 40 cm hohe, aus einem gewissen Material hergestellte Tempel wird zusammenbrechen, wenn man aus demselben Material einen 40 m hohen Tempel bauen wollte. Umgekehrt gilt: die Statik eines Gebäudes kann nicht an einem verkleinerten Modell getestet werden, wenn man für das Modell dasselbe Material nimmt wie für das zu bauende Objekt.

Haldane dekliniert sein Prinzip an einer Fülle aufschlussreicher zoologischer Beispiele durch. Man stelle sich etwa vor, dass die graziöse Gazelle, die über lange Beine verfügt, beträchtlich größer wird. Dann würden ihre Knochen brechen, wenn sie nicht eines von zwei Dingen tut. Zum einen könnte sie ihre Beine kurz und dick machen wie die eines Rhinoceros, so dass jedes Kilo Gewicht immer noch von derselben Querschnittsfläche Knochen getragen würde, oder sie könnte ihren Körper komprimieren und ihre Beine schräg stellen wie eine Giraffe. Rhinoceros und Giraffe sind von derselben Größenordnung und mechanisch sehr erfolgreich, weil bemerkenswert schnelle Läufer. (Haldane 1927/1985, S. 1/2) Entsprechend Haldanes Prinzip hat also die Änderung der Größe notwendig eine Änderung der Form zur Folge.

Stürzt ein Mensch in einen tausend Meter tiefen Schacht, würde er sterben, ein Pferd würde zersplittern, aber eine Maus würde dies überleben. Denn der Luftwiderstand ist proportional zur Oberfläche. Wenn man ein Lebewesen in allen Dimensionen auf ein Zehntel seiner ursprünglichen Größe verkleinert denkt, dann reduziert sich sein Gewicht auf ein Tausendstel, seine Oberfläche aber nur auf ein Hundertstel. Folglich verzehnfacht sich sein Luftwiderstand.

Ein letztes Beispiel: Säugetiere sind darauf angewiesen, ihre Körpertemperatur auf einer konstanten Höhe zu halten. Der Körper produziert Wärme und gibt sie über die Haut an die kühlere Umgebung ab. Wärmeproduktion und -abgabe müssen im Gleichgewicht sein. Die Wärmeproduktion ist proportional zum Volumen des Körpers, die Wärmeabgabe proportional zur Oberfläche, durch die sie erfolgt. Man stelle sich wieder eine Maus vor, bei der beides im Gleichgewicht ist. Verzehnfacht man in Gedanken die Größe der Maus, dann vertausendfacht man ihr Volumen und die Menge der produzierten Wärme. Die Oberfläche und damit die

Kapazität zur Wärmeabgabe würden aber nur ver Hundertfacht. Die Körpertemperatur würde entsprechend steigen, die zehnmal vergrößerte Maus wäre nicht lebensfähig.

Insgesamt ergibt sich aus diesen und vielen weiteren Beispielen, die man bei Haldane und in der daran anschließenden Literatur findet, folgendes Bild:

1. Der Quotient $\frac{G}{l^2} \sim M = \frac{V}{O} \sim \frac{l^3}{l^2}$ ist charakteristisch für einen physiologischen bzw. statischen *Gleichgewichtszustand* bei Lebewesen und materiellen Objekten. Bei Lebewesen geht es um den Wärmehaushalt, die zu leistende Arbeit bei der Fortbewegung und den Einfluss der Schwerkraft auf die Lebensbedingungen. Bei unbelebten Objekten steht die Bruchfestigkeit im Mittelpunkt.
2. Wegen der Skalensensitivität der Massigkeit können diese Gleichgewichte bei Größenänderung nur bestehen bleiben, wenn sich die Form ändert, wenn also die Größenänderung nicht in allen Dimensionen in gleichem Maße stattfindet, oder, mathematisch ausgedrückt, wenn sie keine Ähnlichkeitstransformation ist.
3. Aus derselben Problematik heraus sucht man heute bei der Modellierung und Simulation technischer Objekte und Prozesse nach sogenannten *dimensionslosen Kennzahlen*. Nur solche Kenngrößen können vom „kleinen“ Modell auf „große“ Objekte übertragen werden. Eine solche dimensionslose Kennzahl heißt dann auch *Ähnlichkeitszahl*.
4. In gewissen Grenzen sind die betrachteten belebten und unbelebten Objekte gegen Schwankungen des Gleichgewichts tolerant. Die Statik ist so ausgelegt, dass eine maßvoll höhere Belastung kein Problem dargestellt, Störungen im Wärmehaushalt können durch Körperreaktionen ausgeglichen werden, etc.
5. Es hängt also von weiteren spezifischen Eigenschaften des betrachteten Objektes ab, welche Größenänderung zu einer tatsächlichen Beeinträchtigung bzw. Gefährdung seiner Existenz führt.
6. Im Hinblick auf den BMI ist daher die statistische Analyse von Daten zum Ernährungszustand und zur Physiologie des Menschen unabdingbar, um seine Aussagekraft abschätzen zu können. Es könnte ja durchaus sein, dass die Gleichgewichtstörungen, die durch Haldanes Prinzip prognostiziert werden, erst bei Größenänderungen relevant werden, die außerhalb der Bandbreite der bei Menschen üblichen Größendifferenzen liegen.

5 Verständnisprobleme beim proportionalen Denken

Es gibt eine Reihe von Publikationen, in denen Haldanes Prinzip für den (Mathematik- und Naturwissenschaftsunterricht aufbereitet worden ist. Wir verweisen exemplarisch auf den Abschnitt „Wie im Kleinen, so nicht im Großen“ in (Glaeser 2008), die Einleitung zu (Sextl et al. 1990) sowie auf (Schlichting und Rodewald 1986) und (Apolin 1996).

Auf Details unserer Vorlesung zu diesem Thema soll nicht eingegangen werden. Die erheblichen Verständnisprobleme vieler Studierender sind allerdings lehrreich. Der sachliche Kern des ganzen Problems steckt in der folgenden Aufgabe:

- a) Ein Mann mit 1,60 m Körpergröße habe eine Masse von 50 kg. Welche Masse hat ein anderer Mann mit *ähnlicher* Statur, der 2 m groß ist?
- b) Ein Mann mit 1,60 m Körpergröße habe eine Masse von 50 kg. Welche Masse hat ein anderer Mann mit demselben Body-Mass-Index, der 2 m groß ist?
- c) Erklären Sie den Unterschied der Ergebnisse in a) und b) mit Hilfe des Begriffs der Massigkeit.

Der Teil a) der Aufgabe stammt aus (Glaeser 2008, S. 53), die Teile b) und c) wurden vom Autor hinzugefügt. Zur Beantwortung wird etwa folgende Lösung erwartet:

- a) Der 2 m-Mann mit ähnlicher Statur geht aus dem 1,60 m-Mann durch eine Streckung mit dem Faktor $(5/4)$ hervor. Sein Volumen ist daher das $\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} \approx 2$ -fache des 1,60 m-Mannes. Gleiche Gewebedichte vorausgesetzt, verdoppelt sich folglich auch das Gewicht auf ca. 100 kg.

- b) Der BMI des 1,60 m - Mannes beträgt

$$BMI_{1,60m} = \frac{50 \text{ kg}}{1,60^2 \text{ m}^2} \approx 19,5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}.$$

Daraus folgt für das Gewicht M_{2m} des 2 m-Mannes

$$M_{2m} = 19,5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} * 4 \text{ m}^2 = 78 \text{ kg}.$$

- c) Der BMI ist proportional zur Massigkeit. Folglich muss er nach dem Ergebnis in a) bei dem 2 m-Mann „mit ähnlicher Statur“ um den Faktor $5/4$ wachsen. Umgekehrt beträgt das Gewicht des 2 m-Mannes, der denselben BMI hat, nur $4/5$ des Gewichts des „ähnlichen“ 2 m-Mannes. Es ist

$$100 * (4/5) = 80 \approx 78.$$

(Hätten wir genau gerechnet, wäre es auch genau herausgekommen.)

Folglich: wenn ein größerer Mensch denselben BMI wie ein kleinerer haben soll, muss er bei gleicher Gewebedichte deutlich schlanker sein. Dies ist eine Folge der Skalensensitivität der Massigkeit und des BMI.

Bei Glaeser steht die Aufgabe a) im Zusammenhang mehrerer Übungen, in denen die Einsicht, dass sich Volumina mit k^3 ändern, in verschiedenen Kontexten angewandt werden soll. Eine Aufgabe fragt z.B. nach der Volumenänderung einer Pyramide bei maßstäblicher Vergrößerung. Die Mehrzahl unserer Studierenden hatte große Hemmungen, den allgemeinen Sachverhalt tatsächlich anzuwenden und das ursprüngliche Volumen einfach mit k^3 zu multiplizieren. Stattdessen zogen sie es vor, mit der „sicheren“ Formel für das Volumen einer Pyramide zu rechnen.

Im Falle des maßstäblich auf 2 m vergrößerten Mannes gibt es allerdings keine Formel. Man ist also gleichsam „gezwungen“, den allgemeinen Sachverhalt zu nutzen. Das haben viele Studierende aber nicht getan, sondern „proportional“ gerechnet. Sie multiplizierten das Gewicht des 1,60 m – Mannes nicht mit $\left(\frac{5}{4}\right)^3$, sondern mit $\left(\frac{5}{4}\right)$, und waren sich ziemlich sicher, dass das auch zu einem richtigen Ergebnis führt.

Der Kontrast schließlich zwischen den Gewichten, die sich aus den verschiedenen Ansätzen in a) und b) ergeben, war für viele Studierende eine große Überraschung. Der Unterschied von etwa 20 kg ist in der Tat beträchtlich. Nur wenige Studierende konnten diesen Sachverhalt durch Hinweis auf die Skalensensitivität der Massigkeit, aus der sich auch die Skalensensitivität des zu ihr proportionalen BMI ergibt, angemessen erklären. Für die meisten Studierenden ist der BMI intuitiv ein Parameter, der die Güte einer Gestalt misst. Er soll ja Fettleibigkeit von Schlankheit unterscheiden. Folglich erfasst er (analog zum „Goldenen Schnitt“) so etwas wie die „richtigen Proportionen“ einer Gestalt. Daher sollte ein gut proportionierter „großer“ Mensch denselben BMI haben wie ein ähnlich gut proportionierter „kleiner“ Mensch.

Den Studierenden wurde in diesem Zusammenhang das folgende Gedankenexperiment vorgeschlagen. Man stelle sich vor, dass der in Florenz stehende David des Michelangelo in Fleisch und Blut von seinem Podest herabsteigt. Der David ist 5,17 m groß, er sei ähnlich zu einem lebenden Mann von 1,80, der über einen „idealen“ BMI von 23 verfügt. Was kann man über den BMI des David sagen? Auch hier fiel es schwer, die einfache Rechnung anzustellen, dass der lebende David etwa 2,8 mal so groß wäre wie die Vergleichsperson und demgemäß einen krankhaften BMI von etwa 64 hätte. Dieses Gedankenexperiment ist selbstverständlich nur eine weitere Variation von Haldanes Überlegungen zu Giant Pope und Christian.

Insgesamt zeigt sich, dass Proportionalität und Ähnlichkeit für Studierende der Anfangssemester ein durchaus schwieriges Begriffsfeld darstellen. Um sich in diesem Begriffsfeld zu bewegen, ist ein erhebliches Abstraktionsvermögen erforderlich. So ist es schon nicht selbstverständlich zu verstehen, dass man bereits über Information verfügt, wenn man weiß, dass zwei Größen proportional sind. Was bedeutet es, dass eine Größe proportional zum Quadrat einer anderen Größe ist? Letzteres ist fundamental für ein Verständnis des BMI. Gleichzeitig besteht eine Tendenz zur proportionalen Übergeneralisierung. Zur Vielschichtigkeit des Proportionalitätsbegriffs vergleiche man den Überblick in (Jahnke und Seeger 1986). Dieses Begriffsfeld bedarf dringend einer Klärung spätestens beim Studienbeginn, denn seine Beherrschung stellt eine Schlüsselqualifikation für ein erfolgreiches Arbeiten im Bereich der MINT - Fächer dar.

Literaturverzeichnis

- Apolin, M. (1996). Von Gullivers Reisen bis Jurassic Park. Größenordnungen in der Natur. *Plus Lucis*, 2, 29-32.
- Bohlen, A. (2010). *Der „Body Mass Index“ – Eine bibliometrische Analyse* (Dissertation). Medizinische Fakultät Charité, Berlin.
- Galilei, G. (1973). Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenschaftszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend. (A. von Oettingen, Hrsg. & Trans.). Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft. (Originalwerk veröffentlicht 1638).
- Glaeser, G. (2008). *Der mathematische Werkzeugkasten. Anwendungen in Natur und Technik* (3. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Haldane, J. B. S. (1985). On Being the Right Size. In J. B. S. Haldane, *On Being the Right Size and other essays* (S. 1-8). Oxford & New York: Oxford University Press. (Originalwerk veröffentlicht 1927).
- Hankins, F. H. (1908). *Adolphe Quetelet as statistician*. New York: AMS Press.
- Jahnke, H. N., & Seeger, F. (1986). Proportion. In G. v. Harten, H. N. Jahnke, T. Mormann, M. Otte, F. Seeger, H. Steinbring, & H. Stellmacher (Hrsg.), *Funktionsbegriff und funktionales Denken* (S. 35-83). Köln: Aulis.
- Keys, A., Fidanza, F., Karvonen, M.J. Kimura, N., & Taylor, H. L. (1972). Indices of relative weight and obesity, *Journal of chronic diseases*, 25, 329-343.
- Leibniz, G. W. (1966). De analysi situs. In G. W. Leibniz, *Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie* (Bd.1, übersetzt von A. Buchenau, durchgesehen und mit Einleitungen und Erläuterungen herausgegeben von E. Cassirer, 3. Auflage, S. 69-76). Hamburg: Felix Meiner. (Originalwerk ohne Jahresangabe).
- Mamerow, Th. (2012). *Der BMI bei Quetelet*. (Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt GHR mit Schwerpunkt HRGe) Universität Duisburg-Essen.
- Menninger, K. (1958). *Mathematik in deiner Welt. Von ihrem Geist und ihrer Art zu denken*. Göttingen: Vandenhoeck&Ruprecht.
- Quetelet, A. (1921). *Soziale Physik oder Abhandlung über die Entwicklung der Fähigkeiten des Menschen* (Band 2, Übersetzung von 1869). Jena: Gustav Fischer. (Originalwerk von 1835).
- Schlichting, H. J., & Rodewald, B. (1986). Energiehaushalt und Körperbau. Unterrichtsmodell für die Sekundarstufe I. (9./10. Schülerjahrgang). *Unterricht Biologie*, 120, 20-24.
- Sexl, R., Raab, I., & Streeruwitz, E. (1990). *Das mechanische Universum. Eine Einführung in die Physik* (1. Band). Frankfurt: Diesterweg & Aarau: Sauerländer.
- Stigler, S. M. (1986). *The History of Statistics. The Measurement of Unvertainty before 1900*. Cambridge/Mass & London: Harvard University Press.
- Winter, H. (1997). Mathematik als Schule der Anschauung, oder: Allgemeinbildung im Mathematikunterricht des Gymnasiums. In R. Biehler, & H. N. Jahnke (Hrsg.), *Mathematische Allgemeinbildung in der Kontroverse. Materialien eines Symposiums an der Universität Bielefeld*. Occasional Paper des IDM der Universität Bielefeld, Bd. 163. IDM Bielefeld.

Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen –

Using Tools for Learning Mathematics and Statistics

Wassong, Th.; Frischemeier, D.; Fischer, P.R.;

Hochmuth, R.; Bender, P. (Hrsg.)

2014, XI, 497 S. 149 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-03103-9