









## 2 Elementarmathematik

## Aufgabe 2.1 Periodische Dezimalbrüche

	(a,b.) je 2 min	(a,b.) 	Punkte (a.) 1 P (b.) 1 P
	(c,d.) je 3 min	(c,d.)  	(c.) 1 P (d.) 1 P
	(e,f.) je 4 min	(e,f.)  	(e.) 2 P (f.) 2 P

Wandeln Sie die nachfolgend gegebenen periodischen Dezimalbrüche in Brüche mit ganzzahligen Zählern und natürlichzahligen Nennern um (ggf. auch in gemischte Brüche):

(a.)  $3.\overline{4}$       (b.)  $3.\overline{47}$       (c.)  $0.\overline{27}$       (d.)  $0.\overline{147}$       (e.)  $8.\overline{1246}$       (f.)  $8.1352\overline{46}$

## ▼ Lösung zu 2.1

### Arbeitshinweis:

Periodische Dezimalbrüche wandelt man in Brüche mit Bruchstrich um, indem man Vielfache der Dezimalbrüche genau derart voneinander abzieht, dass sich die Periodizität beim Subtrahieren mit sich selbst aufhebt.

Geignete Vielfache, wie man sie für diese Subtraktion benötigt, sehen so aus, dass die Periode einmal genau hinter dem Komma beginnt (beim kleineren Faktor – siehe untere Zeile der Subtraktion) und das andere Mal genau eine einzige Periode vor das Komma geschoben wird (beim größeren Faktor – siehe obere Zeile der Subtraktion).

Betrachtet man die nachfolgenden Beispiele, so leuchtet dieser Arbeitshinweis leicht ein.

(a.) Es gilt

$$\begin{array}{r} 10 \cdot 3.\overline{4} = 34.\overline{4} \\ 1 \cdot 3.\overline{4} = 3.\overline{4} \\ \hline \end{array}$$

$$(10-1) \cdot 3.\bar{4} = 31.0 \Rightarrow 3.\bar{4} = \frac{31}{10-1} = \frac{31}{9} = 3\frac{4}{9}$$

(b.) Es gilt

$$\begin{array}{r} 100 \cdot 3.\overline{47} = 347.\overline{47} \\ 1 \cdot 3.\overline{47} = 3.\overline{47} \\ \hline \end{array}$$

$$(100-1) \cdot 3.\overline{47} = 344.00 \Rightarrow 3.\overline{47} = \frac{344}{100-1} = \frac{344}{99} = 3\frac{47}{99}$$

(c.) Es gilt

$$1 \text{ P} \quad \begin{array}{r} 100 \cdot 0.\overline{27} = 27.\overline{7} \\ 10 \cdot 0.\overline{27} = 2.\overline{7} \\ \hline \end{array} -$$

$$(100 - 10) \cdot 0.\overline{27} = 25.0 \Rightarrow 0.\overline{27} = \frac{25}{100 - 10} = \frac{25}{90}$$

(d.) Es gilt

$$1 \text{ P} \quad \begin{array}{r} 1000 \cdot 0.\overline{147} = 147.\overline{47} \\ 10 \cdot 0.\overline{147} = 1.\overline{47} \\ \hline \end{array} -$$

$$(1000 - 10) \cdot 0.\overline{147} = 146.00 \Rightarrow 0.\overline{147} = \frac{146}{1000 - 10} = \frac{146}{990}$$

(e.) Es gilt

$$2 \text{ P} \quad \begin{array}{r} 10000 \cdot 8.\overline{1246} = 81246.\overline{246} \\ 10 \cdot 8.\overline{1246} = 81.\overline{246} \\ \hline \end{array} -$$












$$(10000 - 10) \cdot 8.\overline{1246} = 81165.000 \Rightarrow 8.\overline{1246} = \frac{81165}{10000 - 10} = \frac{81165}{9990} = 8\frac{1245}{9990}$$

(f.) Es gilt

$$2 \text{ P} \quad \begin{array}{r} 1000000 \cdot 8.\overline{135246} = 8135246.\overline{246} \\ 1000 \cdot 8.\overline{135246} = 8135.\overline{246} \\ \hline \end{array} -$$

$$(1000000 - 1000) \cdot 8.\overline{135246} = 8127111.000 \Rightarrow 8.\overline{135246} = \frac{8127111}{1000000 - 1000} = \frac{8127111}{999000} = 8\frac{135111}{999000}$$

## Aufgabe 2.2 Gauß'sche Summenformel

	(a.) 5 min	(a.)  	Punkte (a.) 2 P
	(b,c.) je 5 min	(b,c.)   	(b.) 3 P (c.) 3 P
	(d.) 10 min	(d.)   	(d.) 5 P

Gegeben seien  $a_{ij} = 3i + 4j + 2$  und  $b_{ij} = 2 \cdot i \cdot j$ . Berechnen Sie bitte die Summen.

(a.)  $\sum_{i=1}^{50} \sum_{j=1}^{100} a_{ij}$

(b.)  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}$

(c.)  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij}$

(d.)  $\sum_{i=1}^{50} \sum_{j=1}^{80} a_{ij}^2$

(mit  $n, m \in \mathbb{N}$  als Konstanten und  $i, j \in \mathbb{N}$  als Laufindizes)

## ▼ Lösung zu 2.2

### Arbeitshinweis:

Durch geeignetes Umformen lassen sich die in den Aufgabenstellung (a...c) gegebenen Summen in die Form der Gauß'schen Summenformel bringen, die man dann elementar lösen kann.

In manchen Fällen muss die Gauß'sche Summenformel auch mehrmals und ineinander geschachtelt angewandt werden.

(a.) Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{50} \sum_{j=1}^{100} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{50} \sum_{j=1}^{100} 3i + 4j + 2 = \sum_{i=1}^{50} \left[ \underbrace{\sum_{j=1}^{100} (3i + 2)}_{=100 \cdot (3i+2)} + 4 \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{100} j}_{=4 \cdot \frac{100 \cdot 101}{2}} \right] = \sum_{i=1}^{50} ((300i + 200) + 20200) \\ &= 300 \cdot \sum_{i=1}^{50} i + \sum_{i=1}^{50} 20400 = 300 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} + 50 \cdot 20400 = 1402500 \end{aligned} \quad 2 \text{ P}$$

(b.) Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} &= \sum_{i=1}^n \left[ \underbrace{\sum_{j=1}^m (3i + 2)}_{=m \cdot (3i+2)} + 4 \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^m j}_{=4 \cdot \frac{m(m+1)}{2}} \right] = \sum_{i=1}^n ((3m \cdot i + 2m) + (2m^2 + 2m)) \\ &= 3m \cdot \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n (2m^2 + 4m) = 3m \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + 2nm^2 + 4nm \end{aligned} \quad 3 \text{ P}$$

(c.) Es gilt

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (2ij) = \sum_{i=1}^n \left( 2i \cdot \sum_{j=1}^m j \right) = \sum_{i=1}^n \left( 2i \cdot \frac{m \cdot (m+1)}{2} \right) = m \cdot (m+1) \cdot \sum_{i=1}^n i = m \cdot (m+1) \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad 3 \text{ P}$$

(d.) Bei diesem Aufgabenteil genügt die Gauß'sche Summenformel nicht. Man braucht zwei

Summenformeln, nämlich  $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$  und  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$  und erhält:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{50} \sum_{j=1}^{80} a_{ij}^2 &= \sum_{i=1}^{50} \sum_{j=1}^{80} (3i + 4j + 2)^2 = \sum_{i=1}^{50} \sum_{j=1}^{80} (9i^2 + 12ij + 6i + 12ji + 16j^2 + 8j + 6i + 8j + 4) \\ &= \sum_{i=1}^{50} \sum_{j=1}^{80} (9i^2 + 16j^2 + 24ij + 12i + 16j + 4) = \sum_{i=1}^{50} \left[ \sum_{j=1}^{80} 9i^2 + \sum_{j=1}^{80} 16j^2 + \sum_{j=1}^{80} 24ij + \sum_{j=1}^{80} 12i + \sum_{j=1}^{80} 16j + \sum_{j=1}^{80} 4 \right] \end{aligned} \quad 1 \text{ P}$$







Hier werden die beiden obengenannten Summenformeln eingesetzt.

$$1 \text{ P} = \sum_{i=1}^{50} \left[ \underbrace{80 \cdot (9i^2)}_{=720i^2} + \underbrace{\frac{16}{6} \cdot 80 \cdot 81 \cdot 161}_{=2782080} + \underbrace{24i \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 81\right)}_{=77760i} + \underbrace{80 \cdot 12i}_{=960i} + \underbrace{16 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 81\right) + 80 \cdot 4}_{=52160} \right]$$

$$2 \text{ P} = 720 \cdot \sum_{i=1}^{50} i^2 + 78720 \cdot \sum_{i=1}^{50} i + 2834240 \cdot \sum_{i=1}^{50} 1$$

$$1 \text{ P} = \frac{720}{6} \cdot 50 \cdot 51 \cdot 101 + \frac{78720}{2} \cdot 50 \cdot 51 + 2834240 \cdot 50 = 272986000$$

### Aufgabe 2.3 Betragsgleichungen mit Fallunterscheidungen

	(a,b,c.) je 12 min	 	Punkte (a,b,c.) je 9 P
	(d.) 2 min	 	(d.) 2 P

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Betragsgleichungen

(a.)  $|3x - 12| - |x + 7| = 25$

(b.)  $|2x - 3| + |3x + 2| = +21$

(c.)  $|x + 2| - (x + 2) = |x - 2| - (x - 2)$

(d.)  $|2x - 3| + |3x + 2| = -18$

### ▼ Lösung zu 2.3

Da das Auflösen von Beträgen vom Wert des Arguments des Betrags abhängt, erfordert das Lösen der zu untersuchenden Betragsgleichungen eine Fallunterscheidung – und zwar in Abhängigkeit von der im Argument des Betrages auftretenden Variablen  $x$ .

Weil Fallunterscheidungen Anfängern immer wieder unerwartet viele Schwierigkeiten bereiten, sei dieses Thema hier ausführlich kommentiert. Wer keine Probleme mit diesem Aufgabentyp hat, braucht nicht unnötig lange bei Aufgabe 2.3 zu verweilen.

#### Erster Arbeitshinweis:

Immer dann, wenn Rechenoperationen nicht allgemeingültig ausgeführt werden können, sondern in Abhängigkeit vom Wert des Operanden durchgeführt werden müssen, ist bei variablem Operanden eine Fallunterscheidung nötig. Das Auflösen von Beträgen ist nur ein Beispiel für eine solche Rechenoperation, die Fallunterscheidungen erfordert.

#### Zweiter Arbeitshinweis:

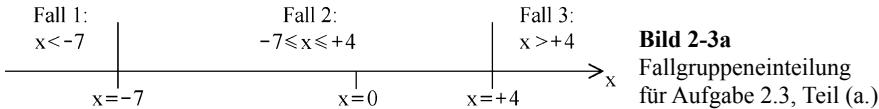
Um möglichst effektiv zu arbeiten, minimiere man die Zahl der zu untersuchenden Fälle. Zeitraubend wäre es beispielsweise, jedes Mal beim Auflösen eines Betrages in zwei Fälle zu unterscheiden. Viel effektiver ist es, zu Beginn der Überlegungen für jeden Betrag eine Fallgrenze festzulegen. Dies sei anhand von Aufgabenteil (a.) demonstriert.

(a.) Immer dort, wo das Argument eines Betrages zu Null wird, liegt eine Fallgrenze, also

- eine Fallgrenze bei  $3x - 12 = 0 \Rightarrow x = 4$

- und eine andere Fallgrenze bei  $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$

2 Grenzen führen zu 3 Fällen (siehe Bild 2-3), mehr Fälle werden nicht benötigt.



2 P

### Stolperfalle:

Man achte darauf, dass alle reellen Zahlen ( $x$ ) für die alle Terme in der Gleichung definiert sind, genau einmal auftreten. Das Vergessen von Fallgrenzen kann unter Umständen zu Fehlern führen, ebenso ein mehrfaches Bearbeiten von Fallgrenzen.

Wir lösen nun die Aufgabe mit den Beträgen auf:

Fall 1:  $x < -7 \rightarrow$  Die Argumente beider Beträge sind negativ, sodass sich beim Auflösen der Betragsstriche Minuszeichen ergeben:

$$|3x - 12| - |x + 7| = 25 \Rightarrow -(3x - 12) + (x + 7) = 25 \Rightarrow -2x = 6 \Rightarrow x_1 = -3$$

Begründung: Falls  $x < -7$  ist, gilt  $|3x - 12| = -(3x - 12)$  und  $|x + 7| = -(x + 7)$  1 P

Fall 2:  $-7 \leq x \leq 4 \rightarrow$  Hier müssen zum Auflösen nur bei einem der beiden Beträge die Betragsstriche durch ein negatives Vorzeichen ersetzt werden, sodass sich das Auflösen der Betragsstriche wie folgt ergibt:

$$|3x - 12| - |x + 7| = 25 \Rightarrow -(3x - 12) - (x + 7) = 25 \Rightarrow -4x = 20 \Rightarrow x_2 = -5$$

Begründung: Falls  $-7 \leq x \leq 4$  ist, gilt  $|3x - 12| = -(3x - 12)$  und  $|x + 7| = +(x + 7)$  1 P

Fall 3:  $x > 4 \rightarrow$  Die Argumente beider Beträge sind positiv, sodass die Betragsstriche in beiden Ausdrücken ersatzlos weggelassen werden können.

$$|3x - 12| - |x + 7| = 25 \Rightarrow (3x - 12) - (x + 7) = 25 \Rightarrow 2x = 44 \Rightarrow x_3 = 22$$

Begründung: Falls  $x > 4$  ist, gilt  $|3x - 12| = +(3x - 12)$  und  $|x + 7| = +(x + 7)$  1 P

### Arbeitshinweis:

Wer Abstraktionsschwierigkeiten hat, sich die genannten Begründungen in den einzelnen Fällen vorzustellen, der setze für jeden einzelnen der Fälle jeweils einen willkürlichen Wert innerhalb der jeweiligen Fallgrenzen exemplarisch für den entsprechenden Fall ein.

Wenden wir diesen Arbeitshinweis an, so verstehen wir seine Umsetzung:

z.B. bei Fall 1: Wir wählen exemplarisch  $x = -10$  (dies liegt innerhalb Fall 1) und untersuchen damit das Verhalten der beiden Beträge beim Auflösen:

$$|3x - 12| = |3 \cdot (-10) - 12| = |-42| = +42 \quad \text{Der Betrag kehrt also das Vorzeichen um.}$$

$$|x + 7| = |(-10) + 7| = |-3| = +3 \quad \text{Wieder kehrt der Betrag das Vorzeichen um.}$$



Wir lösen nun die einzelnen Fälle:

Fall 1:  $x < -\frac{2}{3} \Rightarrow$  Die Gleichung wird zu  $-(2x-3)-(3x+2)=+21 \Rightarrow x=-4$

Da dieses  $x$  innerhalb der Fallgrenzen liegt, ist  $\mathbb{L}_1 = \{x \mid (x < -\frac{2}{3}) \wedge (x = -4)\} = \{-4\}$ . 2 P

Fall 2:  $-\frac{2}{3} \leq x \leq +\frac{3}{2} \Rightarrow$  Die Gleichung wird zu  $-(2x-3)+(3x+2)=+21 \Rightarrow x=16$

Da dieses  $x$  außerhalb der Fallgrenzen liegt, ist  $\mathbb{L}_2 = \emptyset$ . 2 P

Fall 3:  $x > +\frac{3}{2} \Rightarrow$  Die Gleichung wird zu  $+(2x-3)+(3x+2)=+21 \Rightarrow x=\frac{22}{5}$

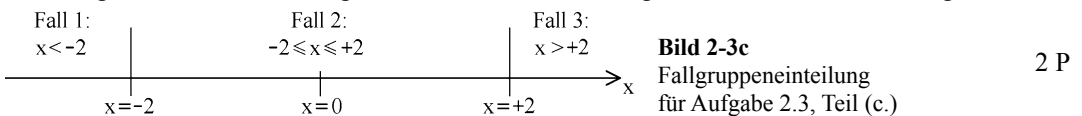
Da dieses  $x$  innerhalb der Fallgrenzen liegt, ist  $\mathbb{L}_3 = \{\frac{22}{5}\}$ . 2 P

Somit erhalten wir als Gesamt-Lösungsmenge  $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \{-4; \frac{22}{5}\}$  1 P

(c.) Die Aufgabe  $|x+2|-(x+2)=|x-2|-(x-2)$  enthält wieder zwei Beträge, also sind ebensoviele Fallgrenzen notwendig:

- die eine bei  $x+2=0 \Rightarrow x=-2$
- die andere bei  $x-2=0 \Rightarrow x=+2$

Somit ergibt sich die Notwendigkeit zu der in Bild 2-3c dargestellten Fallunterscheidung.



Die sich ergebenden drei Fälle lösen wir wie folgt:

Fall 1:  $x < -2 \Rightarrow$  Die Gleichung wird zu  $-(x+2)-(x+2)=-(x-2)-(x-2) \Rightarrow -4=+4$

Da es keine  $x$  gibt, die diese Gleichung erfüllen, ist  $\mathbb{L}_1 = \emptyset$ . 2 P

Fall 2:  $-2 \leq x \leq +2 \Rightarrow$  Die Gleichung wird zu  $(x+2)-(x+2)=-(x-2)-(x-2) \Rightarrow x=2$

Da dieses  $x$  innerhalb der Fallgrenzen für Fall 2 liegt, ist  $\mathbb{L}_2 = \{2\}$ . 2 P

Fall 3:  $x > +2 \Rightarrow$  Die Gleichung wird zu  $(x+2)-(x+2)=(x-2)-(x-2) \Rightarrow 0=0$

Da alle  $x \in \mathbb{R}$  diese Gleichung erfüllen, sind alle  $x$  aus Fall 3 Lösungen der Gleichung, also ist  $\mathbb{L}_3 = \{x \mid x > 2\}$ . 2 P

Die Gesamt-Lösungsmenge als Vereinigung der Teil-Lösungsmengen lautet dann:






$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \{x \mid (x = 2) \vee (x > 2)\} = \{x \mid x \geq 2\}$  1 P

(d.)  $|2x-3|+|3x+2|=-18$

Hier sieht man ohne explizite Berechnung, dass die Lösungsmenge leer ist.

Begründung: Links des Gleichheitszeichens stehen zwei Beträge, die addiert werden, also eine Summe, die immer größer oder gleich Null ist. Auf der rechten Seite steht eine negative Zahl. Dass es keine  $x$  gibt, die dabei eine Gleichheit herstellen, liegt auf der Hand. 2 P

## Aufgabe 2.4 pq-Formel in den reellen und komplexen Zahlen

	(a...d.) je ½ min	(a...d.) 	Punkte (a...c.) je 1 P      (d.) 2 P
	(e...g.) je 1 min	(e...g.)  	(e...g.) je 2 P

Lösen Sie die folgenden Gleichungen mit Hilfe der pq-Formel auf, nötigenfalls in den komplexen Zahlen:

(a.)  $x^2 + 4x - 5 = 0$       (b.)  $x^2 + 4x + 5 = 0$       (c.)  $x^2 + 4ix - 5 = 0$       (d.)  $2x^2 + 12x + 10 = 0$

Die folgenden Ungleichungen machen natürlich nur in den reellen Zahlen Sinn, weil in den komplexen Zahlen keine größer- / kleiner- Relation existiert:

(e.)  $x^2 - 8x + 7 > 0$       (f.)  $-3x^2 + 6x - 9 \geq -6$       (g.)  $-3x^2 + 6x \geq -9$

### ▼ Lösung zu 2.4

Die Anwendung der pq-Formel sollte eigentlich ohne Probleme funktionieren:

1 P (a.)  $x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4+5} = -2 \pm 3 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ und } x_2 = -5$

1 P (b.)  $x^2 + 4x + 5 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i \Rightarrow x_1 = -2 + i \text{ und } x_2 = -2 - i$

1 P (c.)  $x^2 + 4ix - 5 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -2i \pm \sqrt{-4+5} = -2i \pm 1 \Rightarrow x_1 = 1 - 2i \text{ und } x_2 = -1 - 2i$

(d.) Vor der Anwendung der pq-Formel dividieren wir die Gleichung durch 2:

2 P  $2x^2 + 12x + 10 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9-5} = -3 \pm 2 \Rightarrow x_1 = -5 \text{ und } x_2 = -1$

#### Stolperfalle:

Die pq-Formel funktioniert nur in der Normalform der quadratischen Gleichung, d.h. wenn der Faktor vor dem  $x^2$  eine Eins ist.

(zu e, f und g)

#### Arbeitshinweis:

Die pq-Formel funktioniert nur zur Suche der Nullstellen quadratischer Polynome. Um sie auf Ungleichungen anzuwenden, sucht man die beiden Nullstellen der Parabel und überlegt zusätzlich, ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist. Nach oben geöffnete Parabeln sind zwischen den Nullstellen negativ, außerhalb hingegen positiv. Nach unten geöffnete Parabeln verhalten sich umgekehrt.

Dies setzen wir nun um:

(e.)

1 P Nullstellen der Parabel  $\rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16-7} = 4 \pm 3 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ und } x_2 = 7$



Da das  $x^2$  mit positivem Faktor auftritt, ist die Parabel nach oben geöffnet. Sie ist also außerhalb der beiden Nullstellen positiv. Da die Gleichheit mit Null laut Aufgabenstellung ausgeschlossen ist, ist die Lösungsmenge  $\mathbb{L} = \{x \mid (x < 1) \vee (x > 7)\}$  1 P

(f.) Wir bringen die Ungleichung in die Normalform der pq-Formel und bestimmen dann die Nullstellen der Parabel:  $-3x^2 + 6x - 9 = -6 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1 \pm 0$  1 P

Die beiden Nullstellen fallen zusammen, also ist die Gleichheit genau für einen einzigen Punkt gegeben. Ein „größer“ ist unmöglich, weil die Parabel nach unten geöffnet ist:  $\mathbb{L} = \{1\}$  1 P







(g.) Die Nullstellen der Parabel liegen bei

$$-3x^2 + 6x = -9 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 \Rightarrow x_1 = -1 \text{ und } x_2 = 3 \quad 1 \text{ P}$$

Da der Faktor vor dem  $x^2$  negativ ist, ist die Parabel nach unten geöffnet. Die Punkte zwischen den beiden Nullstellen sind also größer oder gleich Null  $\Rightarrow \mathbb{L} = [-1; 3]$

(Angabe der Lösungsmenge in der Schreibweise eines Intervalls) 1 P

Unterstützende Anmerkung: Wer die Lösungen der Ungleichungen (bei den Aufgabenteilen (f.) und (g.)) nicht nachvollziehen kann, der stelle die Parabeln graphisch dar. Nach einer Betrachtung der Kurven sieht man die hier erläuterten Gedankengänge sofort ein.

Aufgabe 2.5 Ungleichungen mit Fallunterscheidungen						
	(a.)	(a.) 8 min.				Punkte
	(b.)	(b.) 12 min.	(a,b)			(a.) 6 P (b.) 7 P
	(c.)	25 min	(c.)			(c.) 14 P

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:

(a.)  $\frac{1}{2x+5} \geq -4$

(b.)  $\frac{1}{x+6} \geq \frac{1}{6x-3}$

(c.)  $\left| \frac{x}{3} - \frac{1}{5} \right| \leq \frac{1}{x+4}$

## ▼ Lösung zu 2.5

Da sich die Relationszeichen ( $<, \leq, >, \geq$ ) in Abhängigkeit von der Rechenoperation und von den Werten der Operanden drehen können, sind oftmals beim Umformen von Ungleichungen Fallunterscheidungen nötig.

(a.) Zum Lösen multiplizieren wir die Ungleichung mit  $2x+5$ , denn dadurch entsteht eine Ungleichung, die bis auf das Relationszeichen einer Geradengleichung entspricht. Allerdings ist zu beachten, dass sich bei dieser Multiplikation das Relationszeichen abhängig vom

Vorzeichen des Multiplikators dreht. Also liegt die Fallgrenze beim Nulldurchgang des Multiplikators, d.h. bei  $2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$ .

Damit wird eine Fallgrenze nötig, zur Trennung zweier Fälle: Fall 1:  $x < -\frac{5}{2}$

1 P und Fall 2:  $x > -\frac{5}{2}$

An der Fallgrenze  $x = -\frac{5}{2}$  selbst ist der Nenner auf der linken Seite der Ungleichung Null, d.h. die Ungleichung ist dort nicht definiert, der Wert kann also nicht Lösung sein. Damit lösen wir wie folgt auf:

Fall 1: Für  $x < -\frac{5}{2}$  gilt  $\frac{1}{2x+5} \geq -4 \quad | \cdot (2x+5) \text{ mit Drehung des Relationszeichens}$

$$\Rightarrow 1 \leq -4 \cdot (2x+5) = -8x - 20 \quad | +8x - 1$$

$$\Rightarrow 8x \leq -21 \quad | \cdot \frac{1}{8}$$

1 P  $\Rightarrow x \leq -\frac{21}{8}$

1 P Alle  $x \leq -\frac{21}{8}$  sind in Fall 1 enthalten, also ist der Beitrag zur Lösungsmenge  $\mathbb{L}_1 = ]-\infty; -\frac{21}{8}]$ .

Anmerkung zur Schreibweise von Intervallen: Ist die Grenze im Intervall enthalten, so zeigt die eckige Klammer zum Intervall hin; bei Grenzen hingegen, die nicht im Intervall enthalten sind, zeigt die eckige Klammer vom Intervall weg.

Fall 2: Für  $x > -\frac{5}{2}$  gilt  $\frac{1}{2x+5} \geq -4 \quad | \cdot (2x+5) \text{ Relationszeichen dreht nicht}$

$$\Rightarrow 1 \geq -4 \cdot (2x+5) = -8x - 20 \quad | +8x - 1$$

$$\Rightarrow 8x \geq -21 \quad | \cdot \frac{1}{8}$$

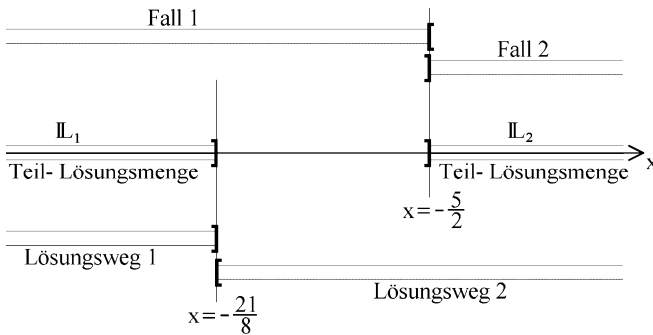
1 P  $\Rightarrow x \geq -\frac{21}{8}$

1 P Damit sind alle  $x$  aus Fall 2 Bestandteil der Lösungsmenge, also ist  $\mathbb{L}_2 = ]-\frac{5}{2}; +\infty[$

1 P Die Gesamt-Lösungsmenge lautet also  $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = ]-\infty; -\frac{21}{8}] \cup ]-\frac{5}{2}; +\infty[ = \mathbb{R} \setminus ]-\frac{21}{8}; -\frac{5}{2}]$

### Arbeitshinweis:

Um Übersicht bei der Bestimmung der richtigen Teil- und Gesamt-Lösungsmengen zu gewinnen, gibt es eine graphische Hilfsdarstellung, basierend auf einem Zahlenstrahl, die in Bild 2-5a dargestellt und im Anschluss daran kommentiert ist. Diese Art der Darstellung lässt sich bei allen Fallunterscheidungen nutzbringend einsetzen.

**Bild 2-5a**

Konstruktion zur übersichtlichen Bestimmung der Lösungsmenge nach erfolgter Fallunterscheidung.

Zuerst zeichnet man in der Mitte einen Zahlenstrahl mit der Markierung der Fallgrenzen und aller weiteren markanten Punkte, die sich im Laufe des Lösungsweges ergeben. Dann trägt man oberhalb des Zahlenstrahls die  $x$ -Werte der einzelnen Fälle mit den zugehörigen Intervallgrenzen ein, wobei die Grenzen durch eckige Klammern gekennzeichnet werden, mit denen man zwischen offenen, halboffenen und geschlossenen Intervallen unterscheiden kann. Schließlich trägt man unterhalb des Zahlenstrahls das Ergebnis des Auflöserns der Ungleichung für jeden einzelnen Fall ein. Die Teillösungsmenge jedes einzelnen Falles besteht dann aus genau denjenigen  $x$ -Werten, für die sich die Markierungen oberhalb und unterhalb des Zahlenstrahles überlappen. Die Teil-Lösungsmengen trägt man zu guter Letzt direkt am Zahlenstrahl ein. Deren Vereinigung ergibt die Gesamt-Lösungsmenge, wobei natürlich die Richtung der geöffneten und geschlossenen Intervallgrenzen zu berücksichtigen ist.

Anmerkung: Das Antragen des Nullpunktes am Zahlenstrahl ist nicht zwangsweise notwendig. Je nach Situation kann es hilfreich sein oder auch stören.

### Arbeitshinweis:

Übrigens kann man die hier vorgestellte Konstruktion auch begleitend während des Löserns der Aufgabe anfertigen, wobei man jeden einzelnen Schritt genau in dem Moment einträgt, in dem er berechnet wird. Genau dies ist die Vorgehensweise, die Anfängern hilft, Aufgaben mit Fallunterscheidungen sicher zu bewerkstelligen.

(b.) Das in Aufgabenteil (a.) beschriebene Lösungsschema gelangt jetzt mit knappem Kommentar zur Anwendung.

Da zweierlei Nenner zu verarbeiten sind, wird mit beiden multipliziert, also mit  $(x+6) \cdot (6x-3)$ . Die geringste Zahl von Fällen erhält man, wenn man unterscheidet zwischen  $(x+6) \cdot (6x-3) > 0$  und  $(x+6) \cdot (6x-3) < 0$ . Da man dabei aber zwei Fallgrenzen braucht, nehmen wir einen Fall mehr auf und nehmen drei Fälle in Kauf, was für die Übersichtlichkeit der Lösungswege förderlich ist: Fallgrenze 1 bei  $(x+6) = 0 \Rightarrow x = -6$

und Fallgrenze 2 bei  $(6x-3) = 0 \Rightarrow x = +\frac{1}{2}$

1 P

Die entsprechenden Fälle sind unter anderem in Bild 2-5b eingetragen. Eine Maßstäblichkeit der Darstellung der  $x$ -Achse ist nicht notwendig und hier auch nicht erfüllt. Die beiden

Fallgrenzen selbst werden keinem der Fälle zugeschlagen, da dort die Nenner zu Null werden. Diese Werte können also ohnehin nicht in der Lösungsmenge enthalten sein.

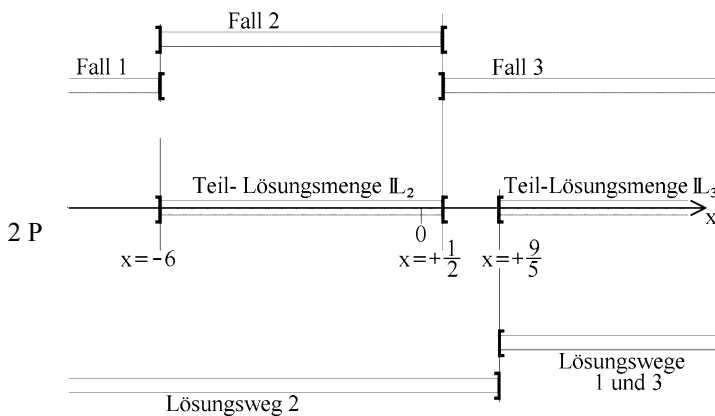
Nebenbemerkung:

Wollte man, wie eingangs erwähnt, mit nur zwei Fällen arbeiten, so würde man die Fälle Nr. 1 und Nr. 3 zu einem Fall zusammenfassen, und schreiben

$$(x+6) \cdot (6x-3) > 0 \rightarrow \text{Fall Nr. 1 und Fall Nr. 3}$$

$$(x+6) \cdot (6x-3) < 0 \rightarrow \text{Fall Nr. 2}$$

Tatsächlich werden wir bei unserem (vereinfachten) Lösungsweg feststellen, dass sich die Fälle Nr. 1 und Nr. 3 in analoger Weise lösen.



**Bild 2-5b**

Konstruktion zur übersichtlichen Bestimmung der Lösung. Den Lesern wird angeraten, diese Konstruktion begleitend beim Lösen der Aufgabe Schritt für Schritt anzufertigen.

Die einzelnen (drei) Fälle lösen wir nun wie folgt auf:

Fall 1: Für  $x < -6$  ist  $(x+6) < 0$  und  $(6x-3) < 0$ , somit also  $(x+6) \cdot (6x-3) > 0$

Deshalb lässt die Multiplikation mit  $(x+6) \cdot (6x-3)$  das Vorzeichen unverändert stehen. Wir lösen also wie folgt auf:

$$\frac{1}{x+6} \geq \frac{1}{6x-3} \quad | \cdot (x+6) \cdot (6x-3) \text{ ohne Drehung des Relationszeichens}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+6) \cdot (6x-3)}{x+6} \geq \frac{(x+6) \cdot (6x-3)}{6x-3} \Rightarrow 6x-3 \geq x+6 \quad | -x+3$$

$$\Rightarrow 5x \geq 9 \quad | \cdot \frac{1}{5}$$

$$1 \text{ P} \Rightarrow x \geq \frac{9}{5}$$

Da im Fall 1 keiner dieser  $x$ -Werte enthalten ist, ist der Beitrag zur Lösungsmenge  $L_1 = \emptyset$ .

Fall 2: Für  $-6 < x < +\frac{1}{2}$  ist  $(x+6) > 0$  und  $(6x-3) < 0$ , somit also  $(x+6) \cdot (6x-3) < 0$

Deshalb dreht die Multiplikation mit  $(x+6) \cdot (6x-3)$  das Vorzeichen um, d.h. die Auflösung der Ungleichung verläuft wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+6} &\geq \frac{1}{6x-3} && | \cdot (x+6) \cdot (6x-3) \quad \text{mit Drehung des Relationszeichens} \\ \Rightarrow \frac{(x+6) \cdot (6x-3)}{x+6} &\leq \frac{(x+6) \cdot (6x-3)}{6x-3} && \Rightarrow 6x-3 \leq x+6 && | -x+3 \\ \Rightarrow 5x &\leq 9 && \Rightarrow x \leq \frac{9}{5} && 1 \text{ P} \end{aligned}$$

Da alle  $x$ -Werten von Fall 2 kleiner oder gleich  $\frac{9}{5}$  sind, ist der Beitrag dieses Falls zur Lösungsmenge:  $\mathbb{L}_2 = ]-6; +\frac{1}{2}[$ .

Fall 3: Für  $x > +\frac{1}{2}$  ist  $(x+6) > 0$  und  $(6x-3) > 0$ , somit also  $(x+6) \cdot (6x-3) > 0$

Deshalb lässt die Multiplikation mit  $(x+6) \cdot (6x-3)$  das Vorzeichen unverändert stehen, so dass die Auflösung der Ungleichung dem Weg von Fall 1 sehr ähnelt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+6} &\geq \frac{1}{6x-3} && | \cdot (x+6) \cdot (6x-3) \quad \text{ohne Drehung des Relationszeichens} \\ \Rightarrow \frac{(x+6) \cdot (6x-3)}{x+6} &\geq \frac{(x+6) \cdot (6x-3)}{6x-3} && \Rightarrow 6x-3 \geq x+6 \Rightarrow 5x \geq 9 \Rightarrow x \geq \frac{9}{5} && 1 \text{ P} \end{aligned}$$

Da mit Fall 3 alle  $x > +\frac{1}{2}$  betrachtet wurden, sind alle  $x \geq \frac{9}{5}$  auch Lösung der Ungleichung.

Der Beitrag von Fall 3 zur Lösungsmenge lautet also  $\mathbb{L}_3 = [\frac{9}{5}; +\infty[$ .

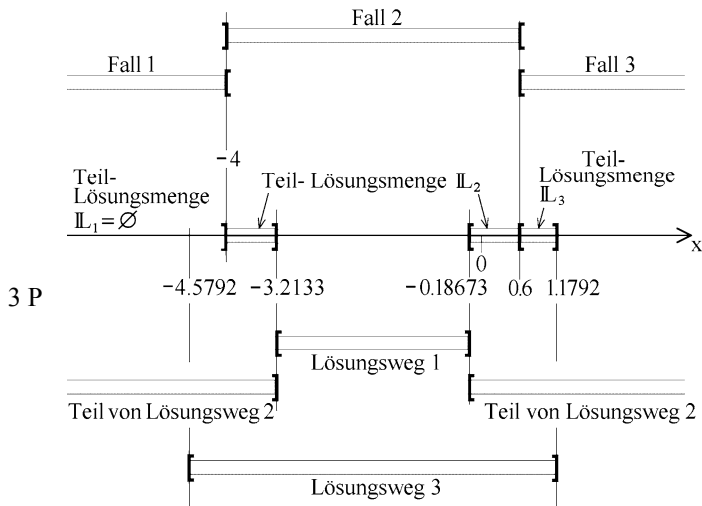
Die Gesamt-Lösungsmenge als Vereinigung der Teil-Lösungsmengen lautet dann:

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = ]-6; +\frac{1}{2}[ \cup [\frac{9}{5}; +\infty[ \quad 1 \text{ P}$$

(c.) Bei diesem Beispiel werden zwei Rechenoperationen nötig, die Fallunterscheidungen erfordern:

- Das Auflösen des Betrages bringt eine Fallgrenze bei  $\frac{x}{3} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$
- Die Multiplikation mit dem Nenner bringt eine Fallgrenze bei  $x+4=0 \Rightarrow x=-4$  1 P

Damit ergeben sich die drei in Bild 2-5c markierten Fälle. Man beachte, dass die Grenze bei  $x = \frac{3}{5}$  der Vollständigkeit halber in einem der Fälle enthalten sein muss, da dort keine Definitionslücke der Ungleichung besteht. Die Grenze bei  $x = -4$  hingegen ist in keinem der Fälle enthalten, denn dort ist die Ungleichung nicht definiert, weil ein Nenner zu Null wird.

**Bild 2-5c**

Fallunterscheidung und Lösung von Aufgabe 2.5, Teil (c.).

Wir untersuchen nun die drei Fälle.

Fall 1: Für  $x < -4$  gilt

$$\left| \frac{x}{3} - \frac{1}{5} \right| \leq \frac{1}{x+4} \quad \left| \text{Ersetzen des Betrages durch ein Minuszeichen} \right.$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{5}\right) \leq \frac{1}{x+4} \quad \left| \text{Multiplikation mit dem Nenner dreht das Relationszeichen} \right.$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{5}\right) \cdot (x+4) \geq 1 \quad \left| \text{Es folgt das Ausmultiplizieren und Sortieren} \right.$$

$$1 \text{ P} \Rightarrow -\frac{x^2}{3} + \left(\frac{1}{5} - \frac{4}{3}\right) \cdot x + \frac{4}{5} \geq 1 \Rightarrow x^2 + \frac{17}{5}x + \frac{3}{5} \leq 0$$

Die Parabel hat zwei reelle Nullstellen bei

$$1 \text{ P} \quad x_{1/2} = -\frac{17}{10} \pm \sqrt{\left(\frac{17}{10}\right)^2 + \frac{3}{5}} = -1.7 \pm \sqrt{2.29} \Rightarrow x_1^{TR} \approx -0.18673 \text{ und } x_2^{TR} \approx -3.2133$$

Da die Parabel nach oben geöffnet ist, ist die Forderung „kleiner oder gleich Null“ erfüllt für  $x \in [-3.5682; -0.16815]$ . Diese  $x$  liegen allesamt außerhalb des untersuchten Bereichs von

1 P Fall 1, also ist die Teil-Lösungsmenge  $\mathbb{L}_1 = \emptyset$  (vgl. auch Bild 2-5c).

Fall 2: Für  $-4 < x < \frac{3}{5}$  gilt

$$\left| \frac{x}{3} - \frac{1}{5} \right| \leq \frac{1}{x+4} \quad \left| \text{Ersetzen des Betrages durch ein Minuszeichen} \right.$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{5}\right) \leq \frac{1}{x+4} \quad \left| \text{Bei Multiplikation mit dem Nenner bleibt das Relationszeichen} \right.$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{5}\right) \cdot (x+4) \leq 1 \Rightarrow -\frac{x^2}{3} + \left(\frac{1}{5} - \frac{4}{3}\right) \cdot x + \frac{4}{5} \leq 1 \Rightarrow x^2 + \frac{17}{5}x + \frac{3}{5} \geq 0 \quad 1 \text{ P}$$

Die Nullstellen der Parabel kennen wir bereits aus Fall 1:  $x_1 \overset{TR}{\approx} -0.18673$  und  $x_2 \overset{TR}{\approx} -3.2133$  1 P

Da aber die Forderung der Ungleichung „größer oder gleich Null“ lautet, und die Parabel nach oben geöffnet ist, suchen wird in Fall 2 nach den Punkten außerhalb der beiden Nullstellen. Dies sind alle  $x \in \mathbb{R} \setminus ]-3.2133; -0.18673[$ . Prüft man nun, welche dieser  $x$ -Werte in Fall 2 untersucht wurden, so erhält man einen unzusammenhängenden Bereich, bestehend aus zwei Teilintervallen, deren Ausmaß man am leichtesten am Zahlenstrahl von Bild 2-5c erkennt:  $\mathbb{L}_2 = \{x \mid (-4 < x \leq -3.2133) \vee (-0.18673 \leq x < 0.6)\}$  1 P

Fall 3: Für  $x \geq \frac{3}{5}$  gilt

$$\left| \frac{x}{3} - \frac{1}{5} \right| \leq \frac{1}{x+4} \quad \text{[Der Betrag kann ersatzlos weggelassen werden]}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} - \frac{1}{5} \leq \frac{1}{x+4} \quad \text{[Bei Multiplikation mit dem Nenner bleibt das Relationsszeichen]}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{5}\right) \cdot (x+4) \leq 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{4}{3}\right) \cdot x - \frac{4}{5} \leq 1 \Rightarrow x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{27}{5} \leq 0 \quad 1 \text{ P}$$

Die beiden reellen Nullstellen der Parabel liegen bei

$$x_{1/2} = -\frac{17}{10} \pm \sqrt{\left(\frac{17}{10}\right)^2 + \frac{27}{5}} = -1.7 \pm \sqrt{8.29} \Rightarrow x_1 \overset{TR}{\approx} -4.5792 \text{ und } x_2 \overset{TR}{\approx} +1.1792 \quad 1 \text{ P}$$

Da die Parabel nach oben geöffnet ist, ist die Bedingung „kleiner oder gleich Null“ zwischen den beiden Nullstellen erfüllt, also für  $x \in [-4.5792; +1.1792]$ . Die sich daraus ergebende Teilmengung sieht man am leichtesten wieder in Bild 1-5c:  $\mathbb{L}_3 = [+0.6; +1.1792]$  1 P

Damit ergibt sich die Gesamt-Lösungsmenge der Ungleichung  $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3$  als

$$\mathbb{L} = ]-4; -3.2133] \cup [-0.18673; +0.6[ \cup [+0.6; +1.1792] = ]-4; -3.2133] \cup [-0.18673; +1.1792]$$

Anmerkung: Ein ganzer Teil der Rechenwege ist mit der Ungenauigkeit der Rundungen eines Taschenrechners formuliert. Dieser Nachteil wurde hier aus didaktischen Gründen in Kauf genommen, da man bei der exakten Formulierung mit Wurzeln die Kleiner-Größer-Relationen zwischen den Zahlen nur sehr mühsam erkennt. Natürlich kann man das Endergebnis auch exakt schreiben als  $\mathbb{L} = ](-4); (-1.7 - \sqrt{8.29})] \cup [(-1.7 + \sqrt{8.29}); (-1.7 + \sqrt{8.29})]$ . 1 P

Prüfungstrainer Mathematik  
Klausur- und Übungsaufgaben mit vollständigen  
Musterlösungen  
Turtur, C.W.  
2014, XX, 587 S. 267 Abb., Softcover  
ISBN: 978-3-658-03198-5