

Verbindet man eine komplexe Zahl z mit den cartesischen Koordinaten x und y , also $z = x + iy$, mit dem Nullpunkt der komplexen Ebene durch eine gerade Linie, dann ist die Länge r dieser Linie der Betrag der komplexen Zahl: $r = |z|$. Denn an Abb. 2.1 kann direkt $r^2 = x^2 + y^2$ abgelesen werden. Bestimmt man nun noch den Winkel φ , um den die positive reelle Achse gegen den Uhrzeigersinn gedreht werden muss, um mit der Verbindungslinie von z zum Nullpunkt zur Deckung zu kommen, dann kann man offenbar bei gegebenem Paar (r, φ) auf eindeutige Weise zur Zahl z gelangen: Man hat nur die positive reelle Achse um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn zu drehen und auf ihr vom Nullpunkt aus die Strecke r abzutragen. Die Eindeutigkeit verlangt allerdings, dass höchstens eine volle Drehung der Achse zugelassen ist, etwa mit der Einschränkung $0 \leq \varphi < 2\pi$. Jedes Paar reeller Zahlen (r, φ) mit $r \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ beschreibt daher genau eine komplexe Zahl z . Diese *Polarkoordinaten* bestehen aus dem Betrag r der Zahl und dem *Polarwinkel* (oder kurz Polwinkel).

Die Polarkoordinaten einer komplexen Zahl haben zwar eine handfeste anschauliche Bedeutung, doch ist noch zu klären, wie man bei gegebenen x und y zu den Polarkoordinaten (r, φ) gelangt, und natürlich umgekehrt, wie bei gegebenen r und φ die cartesischen Koordinaten (x, y) berechnet werden können.

Zunächst der etwas einfachere Fall, dass die Polarkoordinaten (r, φ) gegeben sind, und zwar soll $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ gelten. Dann liegt z im ersten Quadranten, das entspricht genau der Darstellung in Abb. 2.2 oben links. Dort liest man die folgenden Beziehungen ab:

$$\sin(\varphi) = \frac{y}{r} \quad \cos(\varphi) = \frac{x}{r}$$

Hier ist natürlich $r > 0$ anzunehmen (zum Sonderfall $r = 0$ siehe unten). Damit sind die cartesischen Koordinaten der durch (r, φ) bestimmten komplexen Zahl auch schon bestimmt und ihr Wert ist gegeben durch

$$z = r \cos \varphi + ir \sin(\varphi) = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r e^{i\varphi}$$

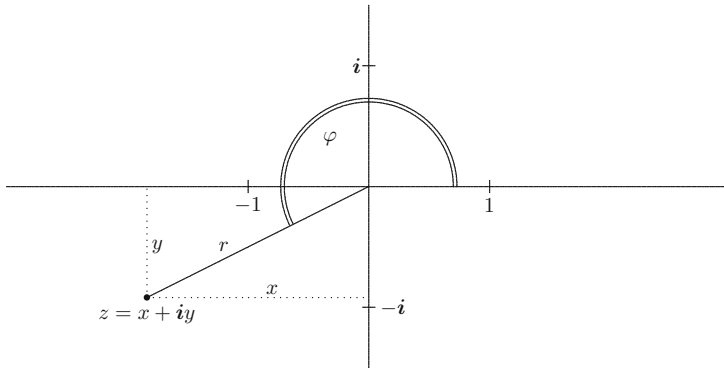


Abb. 2.1 Polarkoordinaten einer komplexen Zahl

Als nächstes wird die Situation behandelt, dass z im zweiten Quadranten gelegen ist, und zwar soll $\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \pi$ gelten (Abb. 2.2 rechts oben). Die Situation kann auf die im ersten Quadranten zurückgeführt werden, indem man den Ergänzungswinkel ϑ von φ bezüglich π betrachtet, also den durch $\varphi + \vartheta = \pi$ gegebenen Winkel. Dieser nimmt im ersten Quadranten die Stelle von φ ein, mit dem kleinen aber wichtigen Unterschied, dass nun $|x|$ die Gegenkathete ist:

$$\sin(\vartheta) = \frac{y}{r} \quad \cos(\vartheta) = \frac{|x|}{r}$$

Die gesuchten cartesischen Koordinaten gewinnt man daraus wie folgt:

$$\sin(\varphi) = \sin(\pi - \vartheta) = \sin(\vartheta) = \frac{y}{r} \quad \cos(\varphi) = \cos(\pi - \vartheta) = -\cos(\vartheta) = \frac{-|x|}{r} = \frac{x}{r}$$

Die Situationen im dritten und vierten Quadranten werden ganz ähnlich behandelt. Im dritten Quadranten (links unten in Abb. 2.2) bei $\pi \leq \varphi < \frac{3}{2}\pi$ verwendet man den Winkel $\vartheta = \varphi - \pi$ und benutzt $\sin(\pi + \vartheta) = -\sin(\vartheta)$ und $\cos(\pi + \vartheta) = -\cos(\vartheta)$, im vierten Quadranten ist der Winkel $\vartheta = 2\pi - \varphi$ mit $\sin(2\pi - \vartheta) = \sin(-\vartheta) = -\sin(\vartheta)$ und $\cos(2\pi - \vartheta) = \cos(-\vartheta) = \cos(\vartheta)$.

Oben war der Fall $r = 0$ ausgelassen worden. Nun gibt es zwar nur eine einzige komplexe Zahl z mit $|z| = 0$, nämlich $z = 0$, d. h. $r = 0$ führt direkt auf $z = 0$, das Problem ist jedoch, dass diese Zuordnung unabhängig von φ ist, jedes Koordinatenpaar $(0, \varphi)$ bestimmt $z = 0$. Eine solche Eindeutigkeitsverletzung kann bei einem Koordinatensystem selbstverständlich nicht zugelassen werden. Es treten damit in der Praxis allerdings überhaupt keine Probleme auf, man kann den Fall daher auf sich beruhen lassen.

Es sind nun noch zu gegebenen x und y die Polarkoordinaten r und φ zu bestimmen. Das ist bei r kein Problem, denn r ist der Betrag der komplexen Zahl $x + iy$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

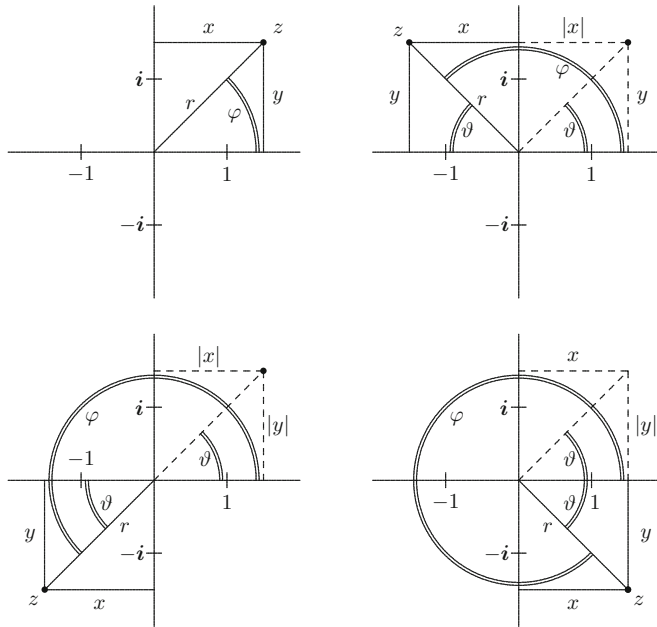


Abb. 2.2 Polarkoordinaten in der komplexen Ebene, $0 \leq \varphi < 2\pi$

Zur Berechnung von φ wird noch einmal Abb. 2.2 herangezogen. Um Fehler zu vermeiden sind sorgfältig sechs Fälle zu unterscheiden:

- $y = 0$: z liegt auf der reellen Zahlengeraden. Ist $x > 0$, dann ist keine Drehung der positiven reellen Achse nötig, um z zu erreichen, d. h. es ist $\varphi = 0$. Ist andererseits $x < 0$, dann ist eine Drehung um π (d. h. 180°) erforderlich: $\varphi = \pi$.
- $x = 0$: z liegt auf der imaginären Achse. Ist $y > 0$, dann ist eine Drehung der positiven reellen Achse um $\frac{\pi}{2}$ (d. h. 90°) nötig, um zu z zu gelangen: $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Bei $y < 0$ muss um 270° gegen den Uhrzeigersinn gedreht werden, folglich $\varphi = \frac{3}{2}\pi$.
- $x > 0 \wedge y > 0$: z liegt im Inneren des ersten Quadranten (Abb. 2.2 oben links), es ist daher $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Der gesuchte Winkel erfüllt natürlich

$$\tan(\varphi) = \frac{y}{x},$$

und wegen $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ kann der Hauptzweig der Umkehrfunktion von $\tan$ benutzt werden, um φ zu bestimmen:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$x < 0 \wedge y > 0$: z liegt im Inneren des zweiten Quadranten (Abb. 2.2 oben rechts), es ist daher $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$. Für den Gegenwinkel $\vartheta = \pi - \varphi$ gilt deshalb $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, d. h. er kann mit dem Hauptwert von $\arctan$ berechnet werden. Es ist dann

$$\varphi = \pi - \vartheta = \pi - \arctan\left(\frac{y}{|x|}\right)$$

$x < 0 \wedge y < 0$: z liegt im Inneren des dritten Quadranten (Abb. 2.2 unten links), es ist daher $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$. Für den Winkel $\vartheta = \varphi - \pi$ gilt deshalb $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ und es ist

$$\varphi = \pi + \vartheta = \pi + \arctan\left(\frac{|y|}{|x|}\right)$$

$x > 0 \wedge y < 0$: z liegt im Inneren des vierten Quadranten (Abb. 2.2 unten rechts), es ist $\frac{3}{2} < \varphi < 2\pi$. Für den Winkel $\vartheta = 2\pi - \varphi$ gilt $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ und φ errechnet sich zu

$$\varphi = 2\pi - \vartheta = 2\pi - \arctan\left(\frac{|y|}{x}\right)$$

Der auf die soeben beschriebene Weise berechnete Polarwinkel φ einer komplexen Zahl z wird im Buch mit $\Phi(z)$ bezeichnet. Ihr Betrag r ist zwar $|z|$, sollte aber auch als Polarkoordinate eine eigene Bezeichnung besitzen und wird hier als $\rho(z)$ geschrieben.

Dazu ein Beispiel. Zu bestimmen ist die Polarkoordinatenschreibweise $re^{i\varphi}$ von $z = 2 - 2i$. Als Betrag findet man $\rho(2 - 2i) = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$. Wegen $x = 2 > 0$ und $y = -2 < 0$ errechnet man ϑ als

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{|-2|}{2}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

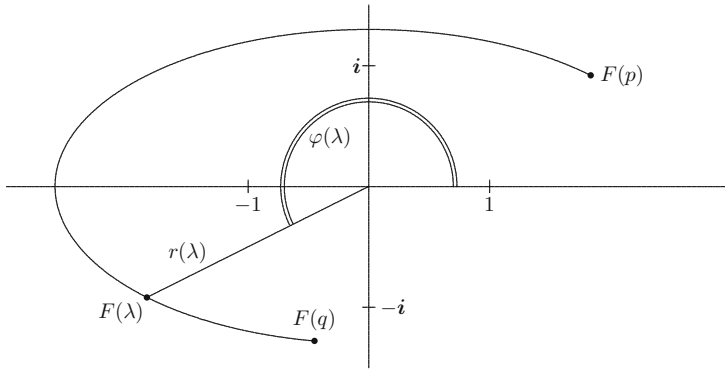
und daraus $\Phi(2 - 2i) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$. Es ist daher $2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}$.

In folgenden Kapiteln werden oft komplexwertige Funktionen mit einem reellen Argument betrachtet. Ein Beispiel ist die Frequenzantwort $\Theta_{\mathbf{S}}$ eines Systems $\mathbf{S}$. Allgemein sei $F : [p, q] \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf einem reellen Intervall $[p, q]$ definierte komplexwertige Funktion. Die Werte $F(\lambda)$ der Funktion durchlaufen dann eine Kurve in der komplexen Ebene, beginnend mit $F(p)$ und endend mit $F(q)$. Beispielsweise durchlaufen die Funktionswerte von

$$F(\lambda) = a \cos(\lambda) + b \sin(\lambda)i \quad p \leq \lambda \leq q$$

einen Ellipsenbogen wie in Abb. 2.3. Jeder Funktionswert $F(\lambda)$ besitzt als komplexe Zahl die Polarkoordinaten $r(\lambda)$ und $\varphi(\lambda)$, oder mit den Funktionen ρ und Φ geschrieben, $\rho(F(\lambda))$ und $\Phi(F(\lambda))$, die also Funktionen des Argumentes λ sind. In Abb. 2.3 ist das verdeutlicht: Die Verbindungslinie vom Nullpunkt zum Kurvenpunkt $F(\lambda)$ hat die Länge $r(\lambda)$ und diese Linie ist durch eine Drehung um $\varphi(\lambda)$ aus der positiven reellen Achse hervorgegangen. Führt man noch die Koordinatenfunktionen

$$\rho_F(\lambda) = \rho(F(\lambda)) \quad \Phi_F(\lambda) = \Phi(F(\lambda))$$

**Abb. 2.3** Polarkoordinaten einer komplexen Kurve

ein, dann lässt sich die von F erzeugte Kurve in der komplexen Ebene vollständig mit Polarkoordinatenfunktionen darstellen:

$$\lambda \mapsto \rho_F(\lambda) e^{i\Phi_F(\lambda)}$$

Die Polarkoordinatenfunktionen sind aussagekräftiger als die cartesischen Koordinaten x und y , welche nur die Projektionen der Kurvenpunkte auf die reelle und imaginäre Achse liefern. Sie sind auch als reellwertige Funktionen viel einfacher graphisch darzustellen als die Kurve in der komplexen Ebene selbst. Für den Ellipsenbogen aus Abb. 2.3 ist $\rho_F(\lambda)$ in Abb. 2.4 und $\Phi_F(\lambda)$ in Abb. 2.5 graphisch dargestellt. Mit etwas Übung kann man aus den Eigenschaften der beiden Koordinatenfunktionen (etwa: wo sind ihre Nullstellen, wo ihre Extremwerte, wo ihr Ort größter Steigung? usw.) auf Eigenschaften der Kurve selbst schließen. Beispielsweise sind in beiden Graphen die Parameter gekennzeichnet, bei welchen die Kurve die imaginäre Achse ($\lambda = \frac{\pi}{2}$) und die reelle Achse kreuzt ($\lambda = \pi$): Beim Betrag sind so die Extremwerte, beim Polarwinkel die Wendepunkte gekennzeichnet.

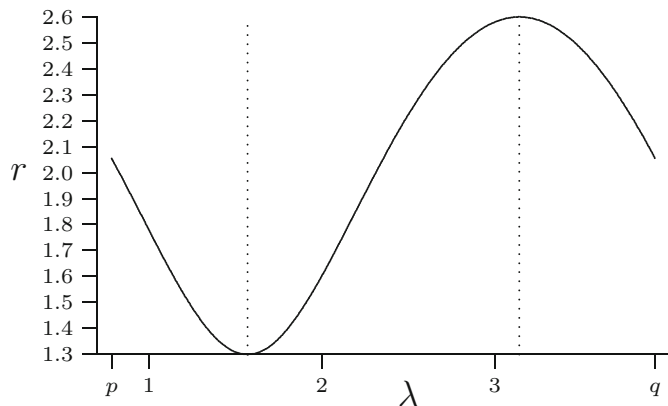
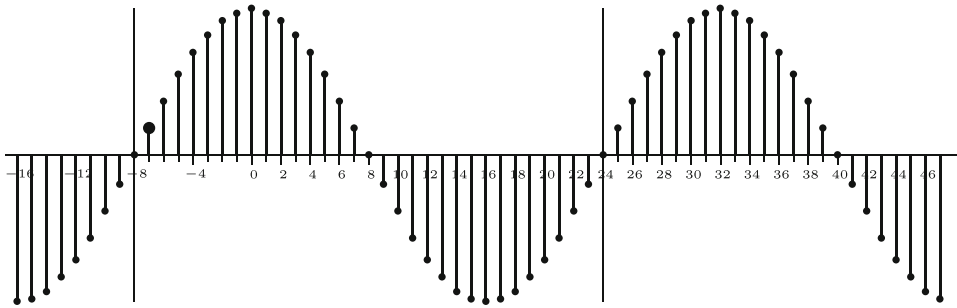
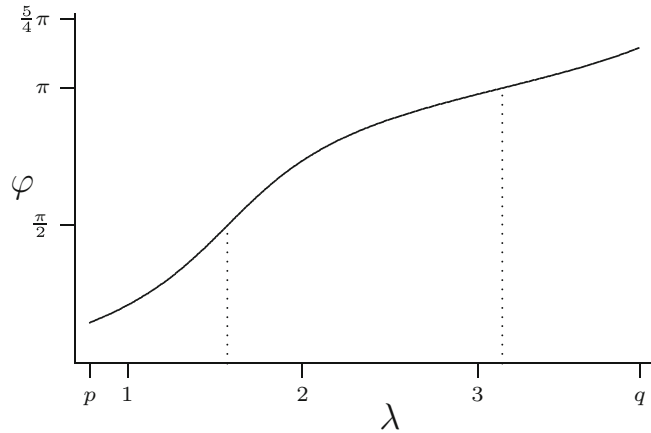
Abb. 2.4 $\rho_F(\lambda)$ 

Abb. 2.5 $\Phi_F(\lambda)$ **Abb. 2.6** $\cos(n\xi)$, $\xi = \pi/16$

Die Darstellungen von Betrag und Polarwinkel der Punkte einer Kurve in der komplexen Ebene spielen bei der Konstruktion und Beurteilung von digitalen Filtern eine große Rolle. Die Darstellung des Polarwinkels stimmt jedoch meist nicht mit der hier gezeigten überein. Der Grund ist eine etwas andere Definition der Polarkoordinaten, für die es zwar auch Gründe gibt, die aber zur Folge hat, dass an sich stetige Funktionen Unstetigkeitsstellen (d. h. Sprünge) aufweisen.

Diese andere Definition der Polarkoordinaten kann etwa wie folgt plausibel gemacht werden. Man betrachtet die diskrete periodische Funktion in Abb. 2.6. Die beiden vertikalen Striche markieren die Breite einer ganzen Einzelwelle der Periode $P = 32$. Die spezielle Einzelwelle, die zum Zeitpunkt $n = -8$ beginnt, ist durch Hervorheben ihres Funktionswertes bei $n = -7$ gekennzeichnet. Nun wird der gesamte Wellenzug um 38 Positionen nach rechts verschoben, mit dem in Abb. 2.7 gezeigten Ergebnis. Man beachte, dass ohne die Kennzeichnung einer speziellen Einzelwelle nur eine Rechtsverschiebung um 6 Positionen feststellbar ist. Das ist ein Charakteristikum periodischer Funktionen mit der Periode P , dass nur Verschiebungen modulo P effektiv bemerkt werden können (hier $38 \bmod 32 = 6$).

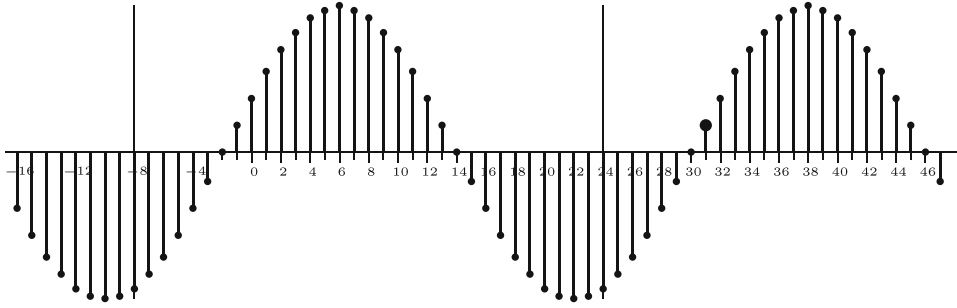


Abb. 2.7 $\cos(n\xi - \frac{38}{16}\pi)$, $\xi = \pi/16$

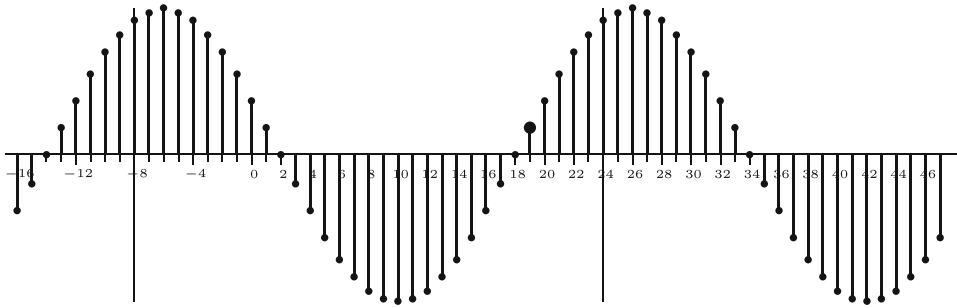


Abb. 2.8 $\cos(n\xi - \frac{26}{16}\pi)$, $\xi = \pi/16$

Die Richtung der Verschiebung hat sich nicht verändert. Jetzt wird aber der ursprüngliche Wellenzug aus Abb. 2.6 um 26 Positionen nach rechts verschoben, mit dem Ergebnis in Abb. 2.8. Ohne die Markierung kann man hier nur eine Bewegung des ganzen Wellenzuges um sechs Positionen nach **links** feststellen. Hier geschieht doch offensichtlich folgendes: Eine Verschiebung nach rechts um $m > 0$ Positionen ergibt eine sichtbare Verschiebung um $k = m \bmod P$ Positionen, und zwar eine Verschiebung nach rechts, falls k in die linke Hälfte der Periode fällt, und eine Verschiebung nach links, falls k in die rechte Hälfte der Periode fällt. Da erscheint es ganz natürlich, eine negative halbe Periode einzuführen und diese mit der Linksverschiebung zu assoziieren. Beachtet man nun noch, dass z. B. in der Elektrotechnik die Sinusfunktion gern mit einer Zeigerrotation erklärt wird, dann ist auf harmonische Weise noch dazu eine Verbindung zu den Polarkoordinaten geschaffen. In Abb. 2.9 ist der Zusammenhang von Sinusfunktion, Zeigerrotation und Polarwinkel dargestellt. Der positive Sinusbogen wird mit einer Rotation gegen den Uhrzeiger erzeugt, mit positivem Winkel, der negative Sinusbogen durch Rotation mit dem Uhrzeiger, mit negativem Winkel. Aus dem Intervall $0 \leq \varphi < 2\pi$ des Polarwinkels wird also nicht einfach das Intervall $-\pi \leq \varphi < \pi$, der Polarwinkel startet für den positiven und den negativen Teil bei $\varphi = 0$. Das bedeutet natürlich, dass der Polarwinkel nicht mehr mit Abb. 2.2 berechnet werden kann, man muss vielmehr Abb. 2.10 heranziehen. Der auf diese Weise berechnete

Abb. 2.9 Sinuskurve durch Zeigerrotation

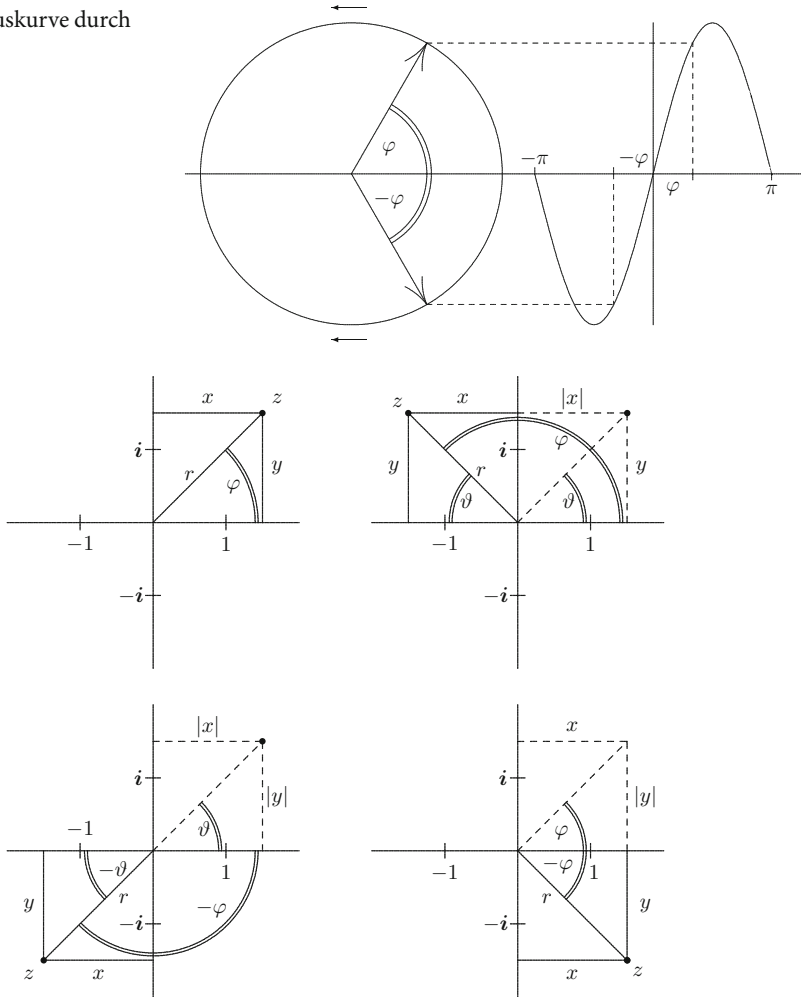


Abb. 2.10 Polarkoordinaten in der komplexen Ebene, $0 \leq \varphi < \pi$ und $-\pi \leq \varphi < 0$

Polarwinkel einer komplexen Zahl z wird mit $\widehat{\Phi}(z)$ bezeichnet. Offensichtlich gilt

$$\widehat{\Phi}(x + yi) = \Phi(x + yi) \quad \text{für } y \geq 0$$

d. h. im ersten und zweiten Quadranten ändert sich nichts. Die in vielen Programmiersprachen vorhandene Funktion ATAN2 zur Berechnung des Polarwinkels einer komplexen Zahl z implementiert $\widehat{\Phi}$.

Welche Auswirkungen die Anwendung von $\widehat{\Phi}$ hat kann an Abb. 2.3 studiert werden. Verfolgt man den Verlauf der Kurve, so stellt man fest, dass $\varphi(\lambda)$ plötzlich von π auf $-\pi$ springt, wenn die Kurve die negative reelle Achse kreuzt. Das ergibt sich aus einem Vergleich von

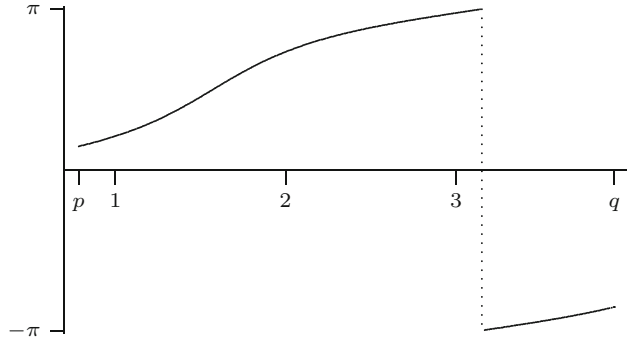
Abb. 2.11 $\widehat{\Phi}(\lambda)$ 

Abb. 2.3 oben rechts mit unten links. Es wird also ein Sprung, eine Unstetigkeitsstelle der Koordinatenfunktion erzeugt. Diese Unstetigkeitsstelle ist ein Artefakt der Berechnung des Polarwinkels mit $\widehat{\Phi}$, der „echte“ Winkel, um den die positive reelle Achse gedreht wird, führt natürlich keinen Sprung von π nach $-\pi$ aus, wenn die negative reelle Achse erreicht wird, er verändert sich stetig.

Eine solche künstlich erzeugte Unstetigkeit einer Koordinatenfunktion kann unerwünschte Folgen haben, besonders wenn das Verhalten von ATAN2 nicht bekannt ist und nur das mit der Funktion berechnete Endergebnis vorliegt. Ein Beispiel gibt Abb. 2.11, das zeigt, wie sich die Koordinatenfunktion aus Abb. 2.5 ändert wenn $\widehat{\Phi}$ statt Φ eingesetzt wird.

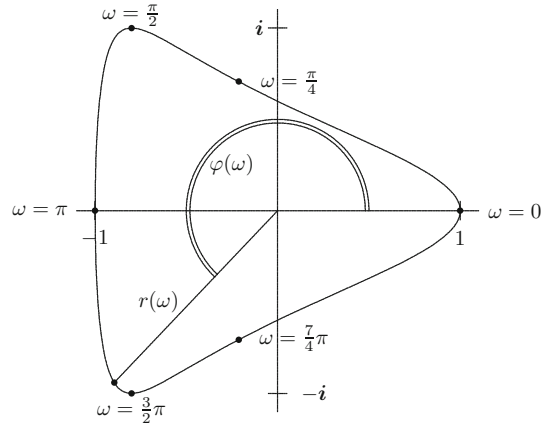
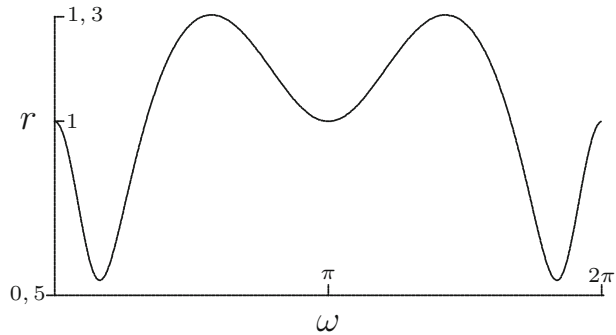
Es folgt nun noch ein der Praxis der digitalen Filter entnommenes Beispiel. Die Frequenzantwort eines digitalen Filters ist eine komplexwertige Funktion eines reellen Parameters. Die Frequenzantwort eines bestimmten Filters ist die Funktion

$$A(\omega) = \frac{5e^{i\omega} - e^{i2\omega} + e^{-i2\omega} - 4}{5 - 2e^{i\omega} - 2e^{-i\omega}} \quad 0 \leq \omega < 2\pi$$

Die von der Funktion in der komplexen Ebene erzeugte Kurve ist in Abb. 2.12 dargestellt. Die Kurvenpunkte, die bei den Parameterwerten $\omega = \frac{\pi}{4}$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, π , $\omega = \frac{3}{2}\pi$ und $\omega = \frac{7}{4}\pi$ erreicht werden, sind markiert. Es ist auch noch einmal angedeutet, dass der Betrag r und der Polarwinkel φ Funktionen des Parameters ω sind. Diese Koordinatenfunktionen, also ρ_A und Φ_A , lassen sich leicht berechnen, wenn A in cartesischen Koordinaten ausgedrückt wird:

$$A(\omega) = \frac{5 \cos(\omega) - 4}{5 - 4 \cos(\omega)} + \sin(\omega)i$$

Der sich ergebende Betrag ist in Abb. 2.13, der Polarwinkel in Abb. 2.14 gezeichnet. Die Funktionsverläufe lassen sich beim Durchgang durch die von A erzeugte Kurve gut nachvollziehen. Der Frequenzantwort wird meistens das Argumentintervall $-\pi \leq \omega < \pi$ zugrunde gelegt, doch sind Frequenzantworten periodisch mit der Periode 2π , das hier gewählte Intervall ist daher zulässig. Es ist aber auch empfehlenswert, denn man vermeidet damit eine artifizielle Sprungstelle im Definitionsbereich von Φ_A . Wird nämlich die Kurve

Abb. 2.12 $A(\omega)$ **Abb. 2.13** $\rho_A(\omega)$ 

in Abb. 2.12 von $-\pi$ hin zu π durchlaufen, dann beginnt der Polarwinkel bei $\varphi = \pi$, steigt auf zu $\varphi = 2\pi$ und macht dann einen Sprung nach $\varphi = 0$, um wieder zu $\varphi = \pi$ aufzusteigen.

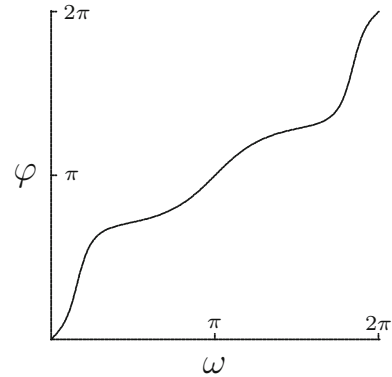
Weil der Polarwinkel einer komplexen Zahl $z = x + iy$ im Wesentlichen als Funktion des Quotienten der Koordinaten berechnet werden kann,

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

kann man (falsch) schließen, dass die Multiplikation von z mit einer reellen Zahl $a \neq 0$ keinen Einfluss auf den Polarwinkel von z hat, denn beide Koordinaten werden mit a multipliziert, weshalb a bei der Division weggekürzt wird. Wie oben aber ausführlich dargelegt wird, ist der Polarwinkel nicht nur eine Funktion des Koordinatenquotienten, sondern auch abhängig von dem Quadranten, in dem sich z befindet. Tatsächlich erfährt z bei der Multiplikation mit einer negativen reellen Zahl eine Rotation um 180° . Wegen $e^{i\pi} = -1$ ist nämlich für $z = re^{i\varphi}$ in Polarkoordinaten

$$are^{i\varphi} = |a|e^{i\pi}re^{i\varphi} = |a|re^{i(\varphi+\pi) \bmod 2\pi}$$

Der Polarwinkel von z ist also $\varphi + \pi$, falls $\varphi + \pi < 2\pi$ und $\varphi + \pi - 2\pi$ falls $\varphi + \pi \geq 2\pi$.

Abb. 2.14 $\Phi_A(\omega)$ 

Die Frequenzantwort $\omega \mapsto A(\omega)$ eines Filters ist eine periodische komplexe Funktion mit der Periode 2π . Die Aussage, dass die von der Funktion erzeugte Kurve in der komplexen Ebene deshalb geschlossen sei, ist allerdings nur eingeschränkt wahr, denn sie gilt nur, wenn die Kurve beschränkt ist, d. h. wenn es einen Kreis um den Nullpunkt gibt, der die Kurve ganz enthält. Ein Beispiel dafür ist die Kurve der folgenden Funktion (siehe Abb. 2.15):

$$U(\omega) = \frac{1 - e^{-i4\omega}}{1 + 2e^{-i\omega} + e^{-i2\omega}} \quad -\pi < \omega < \pi$$

Diese Funktion ist an den Grenzen des Parameterintervalls gar nicht definiert, sondern hat dort die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. Man überzeugt sich aber leicht davon, dass

$$\lim_{\omega \rightarrow -\pi} |U(\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \pi} |U(\omega)| = \infty$$

gilt, also $U(\omega) \rightarrow \infty$ für $\omega \rightarrow -\pi$ und $\omega \rightarrow \pi$. Allerdings strebt die Funktion an den Intervallgrenzen auf verschiedene Weise gegen ∞ :

$$\lim_{\omega \rightarrow -\pi} \Re(U(\omega)) = -\infty \quad \lim_{\omega \rightarrow \pi} \Re(U(\omega)) = \infty$$

Anschaulich kann man daher sagen, dass die Funktion aus dem Unendlichen kommt und wieder dorthin verschwindet, also in diesem Sinn doch eine geschlossene Kurve ist! Beim Übergang zur stereographischen Projektion $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (oder zum kompakten Abschluss¹) wird diese Aussage auch formal wahr:

$$U(-\pi) = \infty = U(\pi)$$

Nicht beschränkte Frequenzantworten spielen in der Praxis natürlich keine Rolle, auch wenn sie große Steilheiten bei geringem rechnerischen Einsatz versprechen. Sie können

¹ Siehe dazu etwa [Dett].

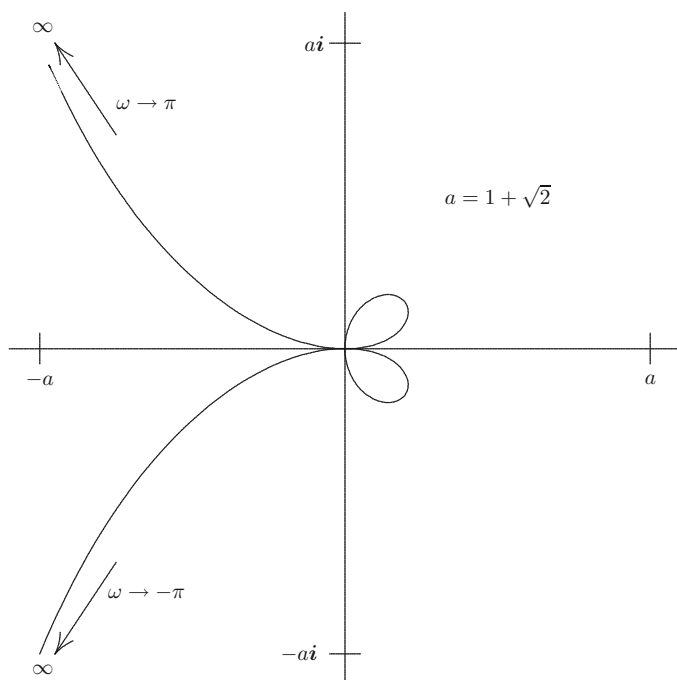


Abb. 2.15 $\omega \mapsto U(\omega)$, $-\pi < \omega < \pi$

sich aber beim Design von Filtern ungewollt einstellen. So ergibt sich die Funktion U aus der folgenden Systemfunktion zur Konstruktion eines Hochpasses:

$$\frac{1 - z^{-4}}{(1 + z^{-1})^2}$$

Diese Funktion besitzt einen Pol bei $z = -1$, der für die Unbeschränktheit der Frequenzantwort verantwortlich ist.

Digitale Filter

Theorie und Praxis mit AVR-Mikrocontrollern

Schmidt, H.; Schwabl-Schmidt, M.

2014, IX, 391 S. 237 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-03522-8