

2 Der Grundgedanke der Methode der Finiten Elemente

Der Grundgedanke der FE-Methode sei an einem einfachen Fachwerk (Bild 2-1) erläutert. Für dieses seien die Verschiebungen der Knotenpunkte und die Normalkräfte unter Wirkung von statischen äußeren Lasten gesucht. Ein Element wird hier von einem Zug-Druckstab mit gelenkigen Enden gebildet. Sein elastomechanisches Verhalten ist gekennzeichnet durch die Beziehung zwischen den Kräften f_1 , f_2 und den Verschiebungen u_1 , u_2 an den Stabenden. Die Verschiebungen nennt man auch Freiheitsgrade (FHG) des Stabelementes. Wir bemerken ferner, dass die Freiheitsgrade in Richtung der Stabachse angetragen sind. Die Stabachse stellt das sogenannte lokale Koordinatensystem dar. Außerdem definieren wir ein globales xy -Koordinatensystem, das die Richtung der Freiheitsgrade für das Gesamtsystem angibt. In dem lokalen Koordinatensystem können nun die Kraft-Verschiebungsbeziehungen nach den elementaren Beziehungen der Mechanik aufgestellt werden. Wenn man den Stab am linken Ende festhält (d.h. $u_1 = 0$) und eine Kraft f_2 anbringt (Bild 2-1c), ergibt sich für die Verschiebung u_2

$$u_2 = \frac{f_2 \ell}{EA} \quad \text{oder} \quad f_2 = \frac{EA}{\ell} u_2 . \quad (1a)$$

Für die Lagerkraft erhält man aus Gleichgewichtsgründen

$$f_1 = -f_2 = -\frac{EA}{\ell} u_2 . \quad (1b)$$

Die gleichen Beziehungen kann man aufstellen, wenn das rechte Ende festgehalten wird ($u_2 = 0$) und eine Kraft f_1 aufgebracht wird. Man erhält dann $f_1 = \frac{EA}{\ell} u_1$ und

$f_2 = -\frac{EA}{\ell} u_1$. Die Kraft-Verschiebungsbeziehungen können in Matrixform geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} , \quad (2.1a)$$

oder

$$\mathbf{f} = \mathbf{k} \mathbf{u} . \quad (2.1b)$$

Die Matrix \mathbf{k} heißt Elementsteifigkeitsmatrix in lokalen Koordinaten. Matrizen und Vektoren werden im Folgenden immer durch fett geschriebene Buchstaben gekennzeichnet, um sie von gewöhnlichen Variablen zu unterscheiden. Ein Blick auf das Gesamttragwerk zeigt, dass die lokalen Elementkoordinaten für jedes Element eine andere Lage in bezug auf das globale Koordinatensystem haben können. Um den

Einfluss der Lage des Elements in dem Gesamttragwerk zu berücksichtigen, können die Kraft-Verschiebungsbeziehungen vom lokalen in das globale Koordinatensystem transformiert werden. Wir betrachten dazu das Bild 2-1d, in dem die allgemeine Lage des Stabes nach der Verformung, gekennzeichnet durch die vier Verschiebungsfreiheitsgrade $U_1 - U_4$, dargestellt ist. Die lokalen Knotenpunktverschiebungen lassen sich aus der Projektion dieser globalen Verschiebungskomponenten auf die Stabachse ablesen. Am oberen Knoten gilt die Beziehung

$$u_2 = U_3 \sin \alpha + U_4 \cos \alpha ,$$

am unteren entsprechend

$$u_1 = U_1 \sin \alpha + U_2 \cos \alpha .$$

Diese Gleichungen lassen sich in Matrixform darstellen:

$$\mathbf{u} = \mathbf{T} \mathbf{U} \quad (2.2a)$$

mit

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} . \quad (2.2b)$$

(Großbuchstaben kennzeichnen Größen in globalen Koordinaten, Kleinbuchstaben solche in lokalen Koordinaten.) Von einem Fachwerkstab wissen wir, dass er nur Kräfte in seiner Längsachse übertragen kann, so dass die lokalen Kräfte f_1 und f_2 direkt in die globalen Richtungen x und y zerlegt werden können. Man erhält dann aus Bild 2-1e

$$F_1 = f_1 \sin \alpha, \quad F_2 = f_1 \cos \alpha, \quad F_3 = f_2 \sin \alpha \quad \text{und} \quad F_4 = f_2 \cos \alpha .$$

Diese Gleichungen können ebenfalls in Matrixform zusammengefasst werden:

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \mathbf{f} . \quad (2.3)$$

Wir bemerken, dass diese Transformationsmatrix \mathbf{T}^T gerade die Transponierte der Matrix \mathbf{T} ist, die nach Gl. (2.2) die lokalen mit den globalen Verschiebungskomponenten verbindet. Wir benutzen die Gln. (2.2) und (2.3) nun dazu, die Kraft-Verschiebungsbeziehung zu transformieren. Zunächst setzen wir die Gl. (2.1) in (2.3) ein und erhalten

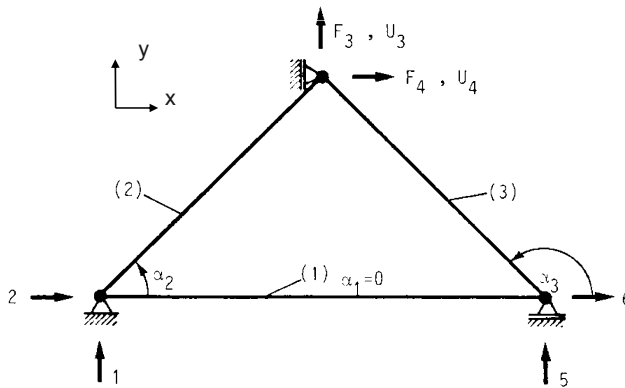
$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{u} .$$

In dieser Gleichung drücken wir \mathbf{u} durch die Gl. (2.2a) aus und erhalten

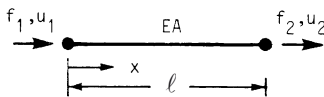
$$\mathbf{F}_{(e)} = \mathbf{K}_{(e)} \mathbf{U}_{(e)} \quad (2.4a)$$

mit

$$\mathbf{K}_{(e)} = (\mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T})_{(e)} . \quad (2.4b)$$

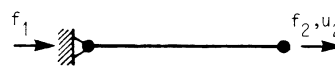
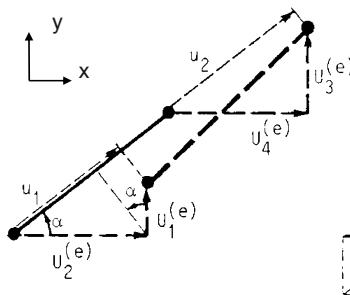
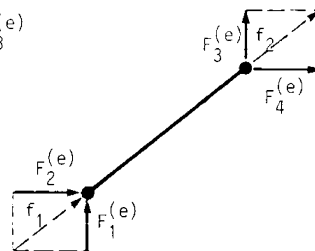


a) Gesamttragwerk in globalen Koordinaten



E = Elastizitätsmodul
 A = Querschnittsfläche

b) Finites Stabelement in lokalen Koordinaten

c) Freiheitsgrad $u_1 = 0$ d) globale Freiheitsgrade $U_i^{(e)}$ e) globale Knotenkräfte $F_i^{(e)}$ **Bild 2-1** Fachwerk als FE-Modell

Die Matrix $\mathbf{K}_{(e)}$ bezeichnet die Elementsteifigkeitsmatrix in globalen Koordinaten. Wir haben hier noch den Elementindex e eingeführt, um zu zeigen, dass diese Beziehungen für jedes Element im Tragwerk zwar formal gleich sind, die Koeffizienten der Matrix $\mathbf{K}_{(e)}$ jedoch abhängig sind von den mechanischen und geometrischen Elementeigenschaften.

Führt man die Matrizenprodukte in der Gl. (2.4b) aus, so erhält man mit den Abkürzungen $c = \cos\alpha$ und $s = \sin\alpha$:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}_{(e)} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} s^2 & sc & -s^2 & -sc \\ & c^2 & -sc & -c^2 \\ & & s^2 & sc \\ \text{sym.} & & & c^2 \end{bmatrix}_{(e)} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}_{(e)} \quad (2.4c)$$

Im Sonderfall des horizontal gelegenen Stabes (Bild 2-2) mit $\alpha = 0$ und $\cos\alpha = 1$ erhält man aus der zweiten Zeile von Gl. (2.4c) wegen $U_1 = U_3 = U_4 = 0$ die bekannte Kraft-Verschiebungsbeziehung

$$F_2 = \frac{EA}{\ell} U_2 \quad .$$

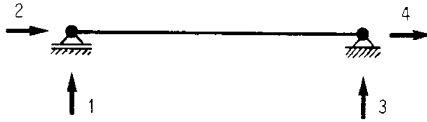


Bild 2-2 Sonderfall $\alpha = 0$ beim Zug-/Druckstab

Das Gesamttragwerk wird aus drei derartigen Elementen gebildet, die formal alle durch die gleiche Beziehung (2.4) beschrieben werden können. Für jedes Element wird natürlich seine durch α_e ($e = 1,2,3$) beschriebene Lage und seine Dehnsteifigkeit $(EA/\ell)_e$ eingesetzt. Die Kraft-Verschiebungsbeziehung für das gesamte Tragwerk muss formal die gleiche Form wie Gl. (2.4a) haben, nur dass die Anzahl der Knotenkräfte und Verschiebungen jetzt größer ist (im Beispiel sind es sechs). Wir schreiben die Gl. (2.4a) für das Gesamttragwerk ohne Index e :

→ B

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \underset{\substack{\downarrow \\ A}}{\begin{matrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{matrix}} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ & & & & K_{55} & K_{56} \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}, \quad (2.5a)$$

oder in Indexschreibweise

$$F_A = \sum_B K_{AB} U_B, \quad (2.5b)$$

(A, B = 1, 2, ..., N = Anzahl der globalen Freiheitsgrade)

oder in symbolischer Schreibweise

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{U}}. \quad (2.5c)$$

Zur Beantwortung der Frage, wo sich die Koeffizienten $K_{ij}^{(e)}$ der Elementmatrizen in den Koeffizienten K_{AB} der sogenannten Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} wiederfinden, wird die Numerierung der lokalen Freiheitsgrade ($i, j = 1$ bis 4) in den Bildern 2-1d, e mit der Numerierung der Freiheitsgrade am Gesamttragwerk in Bild 2-1a ($A, B = 1$ bis 6) verglichen. Für das Beispiel erhält man folgende "Übereinstimmungstabelle" (Koinzidenztabelle).

Tabelle 2-1 Koinzidenztabelle

Element Nr.	(1)				(2)				(3)			
Element FHG i =	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Globale FHG A =	1	2	5	6	1	2	3	4	5	6	3	4

Am einfachsten ist das Einordnen für das Element Nr. (2), da die Nummerierung am Gesamttragwerk mit der des Elementes übereinstimmt. Man braucht also die Elementmatrix $\mathbf{K}_{(2)}$ nur in das linke obere Quadrat der Gesamtsteifigkeitsmatrix zu übertragen. Allgemein muss man nur die Koeffizienten der Elementmatrizen an die Positionen der Gesamtmatrix setzen, die sich aus obiger Tabelle 2-1 ergeben. Für das Element Nr. (1) ergibt sich z.B. daraus das Indexschema der Tabelle 2-2.

Tabelle 2-2 Indexschema für Element (1)

	El. FHG ↓	j = 1 ↓ B = 1	2 ↓ 2	3 ↓ 5	4 ↓ 6
El. FHG →	Glob. FHG				
i = 1 → A = 1		$K_{11} \rightarrow \tilde{K}_{11}$	$K_{12} \rightarrow \tilde{K}_{12}$	$K_{13} \rightarrow \tilde{K}_{15}$	$K_{14} \rightarrow \tilde{K}_{16}$
2 → 2		$K_{21} \rightarrow \tilde{K}_{21}$	$K_{22} \rightarrow \tilde{K}_{22}$	$K_{23} \rightarrow \tilde{K}_{25}$	$K_{24} \rightarrow \tilde{K}_{26}$
3 → 5		$K_{31} \rightarrow \tilde{K}_{51}$	$K_{32} \rightarrow \tilde{K}_{52}$	$K_{33} \rightarrow \tilde{K}_{55}$	$K_{34} \rightarrow \tilde{K}_{56}$
4 → 6		$K_{41} \rightarrow \tilde{K}_{61}$	$K_{42} \rightarrow \tilde{K}_{62}$	$K_{43} \rightarrow \tilde{K}_{65}$	$K_{44} \rightarrow \tilde{K}_{66}$

Allgemein gilt für jedes Element (e):

$$\tilde{\mathbf{K}}_{AB}^{(e)} = \mathbf{K}_{ij}^{(e)}. \quad (2.6a)$$

(A, B = 1, 2, ..., N = Anzahl der globalen FHG des Tragwerks; i, j = 1, 2, ..., N_e = Anzahl der FHG des e-ten Elementes)

Hier bezeichnet $\tilde{\mathbf{K}}_{(e)}$ die globale Elementsteifigkeitsmatrix in der Indexnummerierung des Gesamttragwerks. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} setzt sich aus den Beiträgen der einzelnen Elemente in der Form

$$K_{AB} = \sum_e \tilde{K}_{AB}^{(e)} \quad (2.6b)$$

(A, B = 1, 2, ..., N; e = 1, 2, ..., N_e)

zusammen. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix für das Fachwerk nach Bild 2-1a ist in der Gl. (2.6c) dargestellt. Zur besseren Unterscheidung der Elemente sind die Elementindizes e in Klammern gesetzt.

$$K = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(1)} + K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(2)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} \\ & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} \\ & & K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(2)} + K_{34}^{(3)} & K_{31}^{(3)} & K_{32}^{(3)} \\ & & & K_{44}^{(2)} + K_{44}^{(3)} & K_{41}^{(3)} & K_{42}^{(3)} \\ \text{sym} & & & & K_{33}^{(1)} + K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(1)} + K_{34}^{(3)} \\ & & & & & K_{44}^{(1)} + K_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.6c)$$

Bisher hatten wir den Einbau der Elementmatrizen in die Gesamtsteifigkeitsmatrix rein anschaulich gedeutet. Im Folgenden wollen wir den Zusammenbauvorgang mechanisch deuten und mathematisch formulieren. Wir betrachten dazu das Gesamtwerk in zerlegter Darstellung ("Explosionszeichnung") (Bild 2-3).

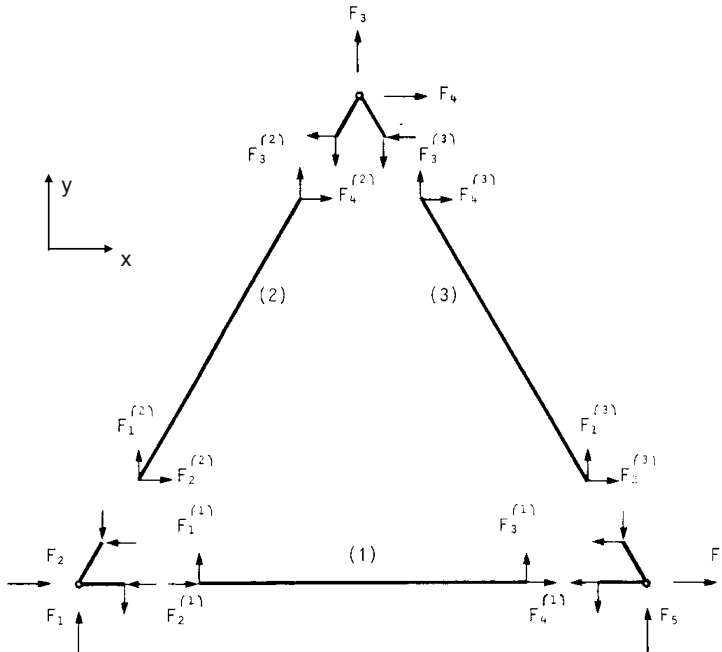


Bild 2-3 Zerlegung des Gesamttragwerks in Elemente

Die Knotenpunkte sind hier durch Schnitte herausgetrennt, wobei als Schnittgrößen die Stabendkräfte in globalen Koordinaten auftreten. Wir bilden nun das Gleichgewicht der Kräfte ($\sum x = 0$, $\sum y = 0$) an jedem Knoten. Man erhält dann folgende Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= F_1^{(2)} + F_1^{(1)} , \\
 F_2 &= F_2^{(1)} + F_2^{(2)} , \\
 F_3 &= F_3^{(2)} + F_3^{(3)} , \\
 F_4 &= F_4^{(2)} + F_4^{(3)} , \\
 F_5 &= F_1^{(3)} + F_3^{(1)} , \\
 F_6 &= F_4^{(1)} + F_2^{(3)} .
 \end{aligned} \tag{2.7a}$$

Wenn wir alle Elementknotenkräfte $F_i^{(e)}$ ($i = 1 - 4$; $e = 1, 2, 3$) in einem Vektor zusammenfassen, so kann man die Gl. (2.7a) in Matrixform ausdrücken:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} (e=1) & (e=2) & (e=3) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} \\ F_4^{(1)} \\ F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \\ F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \\ F_3^{(3)} \\ F_4^{(3)} \end{bmatrix} . \tag{2.7b}$$

Partitioniert man noch die entstehenden Matrizen elementweise, so kann die Gl. (2.7b) symbolisch durch die Summe folgender Matrizenprodukte beschrieben werden:

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{T}}_{(1)}^T \mathbf{F}_{(1)} + \tilde{\mathbf{T}}_{(2)}^T \mathbf{F}_{(2)} + \tilde{\mathbf{T}}_{(3)}^T \mathbf{F}_{(3)} = \sum_{e=1}^3 \tilde{\mathbf{T}}_{(e)}^T \mathbf{F}_{(e)} . \tag{2.7c}$$

Die Gl. (2.7c) besagt, dass sich die globalen Knotenkräfte \mathbf{F} aus der Summe der Elementknoten zusammensetzen. Wir drücken nun die Elementknotenkräfte $\mathbf{F}_{(e)}$ in die Gl. (2.7c) durch die Elementknotenverschiebungen $\mathbf{U}_{(e)}$ nach Gl. (2.4a) aus. Man erhält dann:

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^3 \tilde{\mathbf{T}}_{(e)}^T \mathbf{K}_{(e)} \mathbf{U}_{(e)} . \tag{2.8}$$

Als nächstes stellen wir den Zusammenhang zwischen dem Elementverschiebungsvektor $\mathbf{U}_{(e)}$ und dem Gesamtverschiebungsvektor \mathbf{U} her. Für das Element Nr. (1) erhält man aus der Identität der Elementverschiebungen mit den globalen Verschiebungen an den Knoten folgende Beziehung:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}_{(1)} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}, \quad (2.9a)$$

abgekürzt

$$\mathbf{U}_{(1)} = \tilde{\mathbf{T}}_{(1)} \mathbf{U}. \quad (2.9b)$$

Wie der Vergleich mit der Gl. (2.7b) zeigt, ist die Matrix $\tilde{\mathbf{T}}_{(1)}$ gerade die Transponierte von $\tilde{\mathbf{T}}_{(1)}^T$. In einem späteren Kapitel wird gezeigt, dass dies kein Zufall ist, sondern mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen hergeleitet werden kann. Allgemein gilt also für das Element (e)

$$\mathbf{U}_{(e)} = \tilde{\mathbf{T}}_{(e)} \mathbf{U}. \quad (2.9c)$$

Diese Beziehung wird in die Gl. (2.8) eingesetzt und man erhält

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{U}} \quad (2.10a)$$

mit

$$\mathbf{K} = \sum_e (\tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{T}})_{(e)} = \sum_e \tilde{\mathbf{K}}_{(e)}. \quad (2.10b)$$

Die Gl. (2.10b) ist die mathematische Vorschrift für den Zusammenbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} aus den Elementmatrizen $\mathbf{K}_{(e)}$. Die Matrizen $\tilde{\mathbf{T}}_{(e)}$ heißen Koinzidenzmatrizen. Die durch das Matrizenprodukt in Gl. (2.10b) ausgedrückte Transformation $\tilde{\mathbf{K}}_{(e)} = (\tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{T}})_{(e)}$ heißt Koinzidenztransformation. Die Koinzidenzmatrizen $\tilde{\mathbf{T}}_{(e)}$ bestehen nur aus Einsen und Nullen. Dies hat zur Folge, dass die Koinzidenztransformation nichts anderes als ein Einsortieren der Elementmatrizen in die Gesamtmatrix bewirkt. Wir können dies durch Ausmultiplizieren des Matrizenprodukts in der Gl. (2.10b) zeigen. Das Produkt für das Element Nr. (1), $\tilde{\mathbf{K}}_{(1)} = (\tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{T}})_{(1)}$, lautet

$$\tilde{\mathbf{K}}_{(1)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & & & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} \\ \hline & K_{22}^{(1)} & & & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} \\ \hline & & & & & K_{44}^{(1)} \end{array} \right] \end{matrix} \quad (2.10c)$$

Dieses Ergebnis ist das gleiche wie das in dem Indexschema der Tabelle 2-2 und in der Gesamtsteifigkeitsmatrix (2.6c) angegebene. Das Indexschema stellt rechentechnisch eine erhebliche Vereinfachung gegenüber der formalen Koinzidenztransformation nach Gl. (2.10b) dar, die man sich selbstverständlich auch bei der Programmierung zunutze macht. Im nächsten Schritt werden die Randbedingungen eingeführt.

Wir wollen den allgemeinen Fall betrachten, dass an allen Lagern Verschiebungen vorgegeben seien (im Grenzfall also auch zu Null). Wir können dann den Verschiebungsvektor in zwei Klassen einteilen:

Klasse a: unbekannte Verschiebungen U_3 und U_6
angeordnet im Vektor \mathbf{U}_a ,

Klasse b: bekannte Verschiebungen U_1 , U_2 , U_4 und U_5
angeordnet im Vektor \mathbf{U}_b .

Die Kräfte teilen wir auf in:

Klasse a: bekannte Kräfte F_3 und F_6 angeordnet in Vektor \mathbf{F}_a . Man bemerke, dass sich unbekannte Verschiebungen und bekannte Kräfte in der Klasse a befinden, da ja nur an den Stellen, an denen eine Verschiebung unbehindert ist, äußere Kräfte vorgegeben werden können,

Klasse b: unbekannte Kräfte (Lagerreaktionen) F_1 , F_2 , F_4 und F_5 angeordnet im Vektor \mathbf{F}_b .

Wir können jetzt die Gl. (2.5a) noch einmal hinschreiben, wobei wir nun aber die Kräfte und Verschiebungen entsprechend der Klasseneinteilung sortiert haben. Symbolisch geschrieben erhält man:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{F}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} = \mathbf{K}_{ab}^T & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_b \end{bmatrix}, \quad (2.11a)$$

ausgeschrieben:

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{F}_b \end{array} \begin{bmatrix} F_3 \\ F_6 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{33} & K_{36} & K_{31} & K_{32} & K_{34} & K_{35} \\ & K_{66} & K_{61} & K_{62} & K_{64} & K_{65} \\ & & K_{11} & K_{12} & K_{14} & K_{15} \\ & & & K_{22} & K_{24} & K_{25} \\ & & & & K_{44} & K_{45} \\ & & & & & K_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ U_6 \\ \bar{U}_1 \\ U_2 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{U}_a \\ \\ \\ \mathbf{U}_b \end{array} . \quad (2.11b)$$

3 6 1 2 4 5

sym.

Man sieht, dass sich die Koeffizienten der Untermatrizen \mathbf{K}_{aa} - \mathbf{K}_{bb} durch Umsortieren der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} in Gl. (2.5a) ergeben. Nach diesem Sortierungsvorgang können wir die beiden in Gl. (2.11a) enthaltenen Matrixgleichungen nach den unbekannten Vektoren auflösen. Aus der ersten Zeile erhalten wir

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{K}_{aa} \mathbf{U}_a + \mathbf{K}_{ab} \mathbf{U}_b . \quad (2.11c)$$

Aufgelöst nach \mathbf{U}_a liefert

$$\mathbf{U}_a = (\mathbf{K}_{aa})^{-1} (\mathbf{F}_a - \mathbf{K}_{ab} \mathbf{U}_b) . \quad (2.12a)$$

Im Sonderfall starrer Lager ($\mathbf{U}_b = 0$) wird

$$\mathbf{U}_a = (\mathbf{K}_{aa})^{-1} \mathbf{F}_a . \quad (2.12b)$$

Alle statischen FEM-Probleme führen am Ende auf ein derartiges lineares Gleichungssystem zur Berechnung der unbekannten Verschiebungsgrößen \mathbf{U}_a . In der Praxis können dabei viele tausend Unbekannte auftreten. Hieraus ergibt sich die Bedeutung der rechentechnischen Verfahren zur Auflösung derartiger Gleichungssysteme auf dem Computer. Nachdem die Verschiebungen \mathbf{U}_a aus Gl. (2.12) berechnet wurden, können als nächstes die unbekannten Kraftgrößen \mathbf{F}_b aus der zweiten Zeile von Gl. (2.11a) bestimmt werden. Man erhält

$$\mathbf{F}_b = (\mathbf{K}_{ab})^T \mathbf{U}_a + \mathbf{K}_{bb} \mathbf{U}_b . \quad (2.13)$$

Zur Berechnung der Stabkräfte gehen wir zurück auf die Elementebene. Die Gl. (2.1) liefert uns die Stabkräfte an den Stabenden in Richtung der Stabachse:

$$\mathbf{f}_{(e)} = \mathbf{k}_{(e)} \mathbf{u}_{(e)} . \quad (2.1b)$$

Mit Hilfe der Gln. (2.2) drücken wir zunächst den lokalen Verschiebungsvektor $\mathbf{u}_{(e)}$ durch den globalen Vektor $\mathbf{U}_{(e)}$ aus. Es ergibt sich:

$$\mathbf{f}_{(e)} = \mathbf{k}_{(e)} \mathbf{T}_{(e)} \mathbf{U}_{(e)} . \quad (2.14a)$$

Der Verschiebungsvektor $\mathbf{U}_{(e)}$ wird nun mit Hilfe der Gl. (2.9c) durch den Gesamtverschiebungsvektor \mathbf{U} ausgedrückt. Dies liefert dann den Zusammenhang zwischen den Normalkräften im Stab (e) und dem nach der Lösung des Gesamtgleichungssystems (2.12) bekannten Gesamtverschiebungsvektor \mathbf{U} :

Finite Elemente in der Statik und Dynamik

Link, M.

2014, XI, 354 S. 133 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-03556-3