

Modellieren: Szenen aus dem Unterricht

Henning KÖRNER, Oldenburg

„Da die exponentielle Regression am besten zu den Daten passt, muss es auch ein exponentielles Wachstum sein.“ (Tom, Klasse 10)

Abstract: Es werden Schülerbearbeitungen von Aufgaben mit Modellierungen analysiert. Zentrales Anliegen ist es, zu zeigen, wie konkretes Schülerhandeln fast zwangsläufig zu produktivem Erzeugen von Modellierungskompetenzen führen kann, wenn es Lehrkräften gelingt, diese entsprechend synthetisierend aufzunehmen und auszubauen. Es werden skizzenhaft grundlegende, notwendige Erfahrungen herausgearbeitet und benannt.

1. Einleitung

Modellieren als prozessorientierte Kompetenz ist in aller Munde und gehört zum unhintergehbaren Bestand aller Curricula. Häufig hört man allerdings einerseits, dass dies zu schwer sei für Schüler bzw. die notwendige Mathematik zu komplex, andererseits wird angemerkt, dass man das doch schon immer gemacht hat. Im ersten Fall muss deutlich gemacht werden, dass auch mit elementaren Inhalten Modellierungskompetenzen erzeugt werden können und dass es mehr um eine Einstellung und Haltung zu Mathematik und Welt geht als um einen mathematischen Inhalt, im zweiten Fall muss der Unterschied zwischen faktisch meist vorliegenden Einkleidungen und Anwendungen im Gegensatz zu Modellierungen verdeutlicht werden. Natürlich ist eine solche Kompetenz nicht auf einmal da, sondern muss, wie alle Kompetenzen, schrittweise entlang geeigneter Probleme und Aufgaben erzeugt werden. Was aber machen Schüler konkret mit solchen Modellierungsaufgaben? Welche Grundvorstellungen zu Mathematik und Welt haben sie in Klasse 7, welche sollen sie am Ende der Sek 1 bzw. Sek 2 haben? Welche Konsequenzen haben spezifische Aufgabenformate für die Unterrichtsgestaltung durch die Lehrkräfte?

Dieser Aufsatz verfolgt zwei Ziele. In einem diagnostischen Zugriff werden zunächst anhand konkreter Schülerbearbeitungen von Modellierungsaufgaben Zugangs- und Denkweisen analysiert, um daraus Konsequenzen für die Unterrichtsgestaltung zu erörtern. Dabei zeigt sich, dass in Schülerköpfen keine ‚tabula rasa‘ bezüglich des Modellierens ist, sondern immer schon Vorstellungen und Fehlvorstellungen dazu vorhanden sind, die durch Lehrkräfte nutzbar gemacht werden müssen. Die Analysen münden dann in Skizzen zu einer curricularen, spiralförmigen Thematisierung von Modellierungsaspekten im Unterricht der Sek 1 und Sek 2, indem eine Sequenz von zentralen Erfahrungen benannt wird, die einem spiralförmigen Aufbau einer Modellierungskompetenz zugrunde liegen können. Während nämlich die innermathematische Systematik einen spiralförmig curricularen Aufbau nahelegt (von einfachen zu komplexen Termen, von den linearen Funktionen über die quadratischen zu den transzendenten, von Kongruenz zu Ähnlichkeit), gibt es zu einer analogen Behandlung des Modellierens bisher nur wenig Konkretes. Kompetenzorientiert formuliert: Gibt es Kompetenzstufen des Modellierens, und wenn ja, wie sehen diese aus?

2. Befunde

Szene 1:

Aufgabe: Wie groß ist die Segelfläche?

Anmerkung: In der Mitte auf dem Schiff ist ein Mensch zu sehen, der als Orientierung bezüglich der Größenordnungen dienen soll.



Fast die Hälfte der Klasse beantwortet die Frage mit Sätzen wie „Da fehlen Angaben“, „Das kann man nicht beantworten“, „Man kann da nicht rechnen“. Entsprechend dieser Äußerungen werden von diesen Schülerinnen und Schülern auch keine Mathematisierungen vorgenommen.¹

Szene 2:

10 Wachsen einer Ameisenkolonie

Ein Biologe überlegt, wie eine Ameisenkolonie wachsen könnte. Er stellt zwei verschiedene Modellrechnungen an:

A		B	
Zeit (Monate)	Anzahl	Zeit (Monate)	Anzahl
0	100	0	100
1	200	1	200
2	300	2	400
3	400	3	800



- Setze die beiden Modellrechnungen für die nächsten drei Monate fort.
- Beschreibe in Worten den Zuwachs in jedem Monat gemäß dem Modell A und dem Modell B.
- Welches Modell könnte die Entwicklung einer Ameisenkolonie besser beschreiben? Diskutiert diese Frage in eurer Klasse. Vielleicht findet ihr ein Modell, das noch besser passt.

Quelle: Neue Wege 6 Niedersachsen, S. 177

Anmerkung: Alle Gruppen setzen die Tabellen richtig fort.²

Schülerbericht W:

b) Bei A: Pro Monat 100 Ameisen mehr.

Bei B: Bei jedem Monat verdoppelt sich die Anzahl.

c) Das Modell B könnte die Entwicklung einer Ameisenkolonie besser darstellen. Erklärung: Die Ameisenkönigin legt mehr Eier als wir Menschen Kinder bekommen. Außerdem habe ich selbst einmal einen Ameisenhaufen beobachtet, unter anderem auch, wie stark sie sich vermehrt haben und dafür wären 100 Ameisen mehr pro Monat zu wenig.

¹ Die Aufgabe war Grundlage der Arbeit [3].

² Die Schülerprotokolle sind aus eigenem Unterricht (Y,Z) und Unterricht einer Kollegin.

Schülerbericht X:

b) A: Die Anzahl der Ameisen steigt jeden Monat um 100 an.

B: Die Anzahl der Ameisen steigt jeden Monat um das Doppelte an.

c) Beispiel: Ein Ameisenhaufen ist groß und kann riesig werden.

Eine Ameise: 5 mm^3 , der Ameisenhaufen: 50 cm^3 ; $1000 \text{ mm}^3 = 1 \text{ cm}^3$

10000 Ameisen würden in den Ameisenbau passen. Da es im Ameisenbau aber auch Gänge gibt, ziehen wir noch einmal 5000 Ameisen ab. Es sind also noch 5000 Ameisen im Bau. Uns erscheint deswegen die Tabelle B wahrscheinlicher.

Schülerbericht Y:

In der Mathestunde am Dienstag haben wir in Gruppenarbeit eine Aufgabe über das Wachsen einer Ameisenkolonie berechnet.

Uns wurden zwei Modelle vorgegeben, bei Modell A wuchs die Ameisenpopulation monatlich um 100 Ameisen, bei Modell b verdoppelte sich die Anzahl monatlich.

Zuerst sollten wir die Modellrechnungen fortführen, dann diese beschreiben und als letztes mit unserer Gruppe darüber diskutieren, welches Modell besser auf eine Ameisenkolonie zutrifft oder ein anderes, besser passendes Modell finden. Wir sind zu dem Entschluss gekommen, dass das Modell A zwar realistischer, aber noch nicht ganz zutreffend ist, weil wir der Meinung sind, dass die Königin in einem Monat mehr als einhundert Eier legt.

Schülerbericht Z:

A: Bei diesem Modell kommen 100 Ameisen pro Monat hinzu!

B: Bei diesem Modell kommt pro Monat die doppelte Menge Ameisen hinzu als im vorigem Monat.

c) Modell „A“ passt am besten, da nur die Königin Eier legt. Sie legt jeden Monat ungefähr die gleiche Menge Eier. Tabelle „B“ würde passen, wenn jede Ameise, also auch eine normale, Eier legen würde.

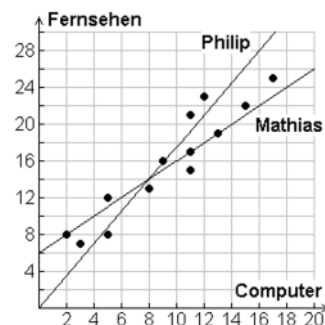
Trotzdem ist es unrealistisch, denn eine Ameisen Königin legt eigentlich um die 1000 Eier! Und außerdem legt sie nicht jeden Monat genau 100 Eier.

Szene 3:

Aufgabe:³

Die Grafik zeigt für 13 Schülerinnen und Schüler jeweils die Zeit (in Stunden), die mit dem Computer und vor dem Fernsehgerät pro Woche verbracht wird.

Philip und Mathias beschreiben den Zusammenhang zwischen Computerzeit und Fernsehzeit mit unterschiedlichen Geraden.



³ Die Aufgabe kommt vom Autor, die Schülerbemerkenungen aus einer Besuchsstunde bei einem Referendar.

Anne: *Die Geraden passen beide nicht, weil die ja irgendwann ins Unendliche gehen und am Tag gibt es aber nur 24 Stunden.*

Bernd: *In Mathe geht's nicht darum, ob etwas realistisch ist.*

Clara: *In Mathe gibt's aber immer ein reales Ergebnis, nicht irgendwas.*

Dennis: *Was bringt das aber, wenn das in Mathe nicht realistisch ist.*

Anne: *Es ist eben kein normales Diagramm, sondern ein Fernsehen-Computer-Diagramm, und das geht hier nicht.*

Die drei Szenen entstammen alle aus siebten Klassen. Sie zeigen in beeindruckender Weise, welche unterschiedlichen Vorstellungen, Ansichten, aber auch Fähigkeiten und Fertigkeiten bei Schülern dieser Klassenstufe bezüglich des Modellierens vorliegen. So gibt es einerseits größere Teilgruppen, für die Mathematik zwingend mit eindeutigen Rechnungen aus eindeutigen Voraussetzungen verbunden ist (Szene 1), während andererseits bei einigen auf lokaler Ebene auch schon sehr differenzierte Überlegungen im Spannungsfeld von Mathematik und Realität angestellt werden (Szene 2). Szene 3 zeigt, dass Schüler auch auf einer globalen Ebene durchaus in dieser Klassenstufe schon dezidierte Vorstellungen und Bilder von Mathematik und Realität besitzen und formulieren. Wie muss nun Unterricht aussehen, der basale Modellierungskompetenzen und zugehörige Grundvorstellungen erzeugt (Szene 1) bzw. die Vielfalt geäußerter Vorstellungen und Antworten produktiv in das weitere unterrichtliche Handeln integriert (Szene 2)? Was muss eine Lehrkraft über Modellieren und das Beziehungsgefüge von Welt und Mathematik wissen, um die Diskussion aus Szene 3 für alle Beteiligten fruchtbar zu machen? Zunächst müssen die Schülerbeiträge natürlich hinsichtlich ihres Potenzials erfasst werden (Diagnose), wobei hier von vorn herein klar ist, dass es durchweg weniger um richtig oder falsch, sondern mehr um „passend“ und „weniger passend“ geht, also Adäquatheit statt Richtigkeit. Dies unterscheidet Unterricht im Modellieren im Erstzugriff augenscheinlich vom Unterrichten innermathematischer Inhalte. Abschnitt 3 befasst sich an ausgewählten konkreten Beispielen aus dem Unterricht mit diesem Aspekt. Auf der Basis dieser Analysen und normativer Setzungen zum Modellbildungsprozess werden am Ende der Beispiele immer grundlegende zugehörige Erfahrungen benannt, die skizzenhaft Stufen einer Modellierungskompetenz darstellen sollen, wobei auch hier von vorn herein klar ist, dass solche Stufen nicht disjunkt und auch nicht hierarchisch im Sinne von „Stufe 1 als Voraussetzung von Stufe 2“ sein können.

3. Analysen von Unterricht

3.1 Die Segelfläche (Szene 1)

Hier soll nur Bezug genommen werden zu der Tatsache, dass fast die Hälfte der Lerngruppe diese Aufgabe gar nicht als vollständige Aufgabe für den Mathematikunterricht wahrgenommen und akzeptiert hat.⁴ Dies zeigt, wie wichtig es ist, dass Schüler frühzeitig erfahren, dass der Bezug zur Welt nur zu ‚unvollständigen‘ Aufgaben führen kann, deren Folge dann die Fundamentalerfahrung ist, dass z.B. Max und Lisa unterschiedliche Ergebnisse haben und beide trotzdem die Aufgabe ‚vollständig‘ richtig bearbeitet haben. Normativ formuliert sollte diese Erfahrung in

⁴ Genauere Analysen der Schülerbearbeitungen findet man in [3].

Klasse 7 vorliegen als erste Stufe einer Modellierungskompetenz. Aber das Umgekehrte gilt auch: Wenn Schüler auf die Frage, wie viele Zahnstocher man aus einem Baumstamm herstellen kann, mit „200 Zahnstocher“ antworten, dann kann dies durchaus ein Ergebnis korrekter Berechnungen sein, aber aufgrund von Modellierungsfehlern vollständig inadäquat und damit falsch.

Erfahrung 1: In Modellierungssituationen kann es einerseits viele richtige Ergebnisse geben, andererseits können richtige Ergebnisse falsch sein.

3.2 Wachsen einer Ameisenkolonie (Szene 2)

W: Abgesehen von dem mysteriösen ersten Satz zu c) ist der Rückgriff auf Alltagserfahrungen („*habe ich selbst einmal einen Ameisenhaufen beobachtet*“) eine typische problematische Modellierungstätigkeit. Wenn diese dann noch extrapoliert wird („*wie stark sie sich vermehrt haben*“) und darüberhinaus sehr grob quantifiziert wird, so dass die Entscheidung für ein Modell davon abhängig gemacht wird, dann ist dies zwar menschlich, aber im Sinne rationaler Entscheidungsfindungen im Zusammenhang mit Modellierungen wenig fruchtbar. Positiv hervorzuheben ist allerdings, dass hier die Realität direkt in den Blick genommen wird.

X: Ganz anders als W mathematisiert diese Gruppe sofort. Sie berechnet Näherungswerte über angenommene Volumina von Ameisen und Ameisenhaufen. Die innermathematischen Umrechnungen gelingen vollständig und zeigen sicheren Umgang mit Größen. Die angenommenen Größen werden allerdings ohne Reflexion gesetzt. So sind 50 cm^3 für einen Ameisenhaufen natürlich viel zu wenig, die Halbierung durch die Gänge wohl ebenso. Interessant ist, dass die Größenordnung des Ergebnisses dazu führt, dass die Gruppe Modell B wählt, obwohl ja leicht ersichtlich beide Modelle irgendwann zu 5000 Tieren führen. Hier liegen also reduktive Mathematisierungen mit teilweise allerdings inadäquaten Setzungen vor. Die Ergebnisse sind bezüglich der Annahmen konsistent, werden aber in keiner Weise validiert.

Schon bei einem Vergleich dieser beiden Berichte in einem Unterrichtsgespräch können sehr gut Mathematisierungsprinzipien, Probleme willkürlicher Setzungen, aber auch die Abhängigkeit von vorgängigen Setzungen, herausgearbeitet werden, ebenso natürlich die Notwendigkeit, die Ergebnisse an der Realität zu überprüfen. Unabhängig von Modellierungsaspekten ist ein Vergleich der beiden Beschreibungen des Änderungsverhaltens bei Modell B innermathematisch interessant. Hier zeigt sich, dass Schüler dieser Klassenstufe Prinzipien exponentiellen Wachstum durchaus auf unterschiedliche Weise erfassen können (Verdopplung gleichzeitig als „Änderung“ und „Änderung der Änderung“).

Y: Hier fällt zunächst auf, dass ein großer Teil des Berichts eigentlich nur die Aufgabenstellung paraphrasiert, ehe dann am Schluss recht abrupt ein abwägendes Urteil gefällt wird. Implizit scheint die Gruppe davon auszugehen, dass der Zuwachs konstant ist, aber größer als 100, es findet keine Mathematisierung statt.

Z: Die Entscheidung dieser Gruppe fußt auf einer Betrachtung der Realsituation („*da nur die Königin Eier legt*“), die qualitativ richtig mathematisiert wird, die Gruppe erfasst den ‚Wirkzusammenhang‘ des Wachstums der Ameisenpopulation und ordnet diesem das passende mathematische Modell zu. Darüberhinaus merkt sie noch an, unter welcher Bedingung Modell B adäquat wäre. In einem zweiten Schritt wird, allerdings durch Setzung, der Anfangswert korrigiert, ehe in einer weiteren Bemerkung die Genauigkeit der Tabellenwerte relativiert wird.

Die Gediegenheit von Z ist augenscheinlich. Hier werden alle Kriterien gelungener Modellierung erfüllt (Realitätsbezug, Validierung, Reduktivität). Es sind deutliche Qualitätsunterschiede zu Y erkennbar, die sich dann natürlich auch in Bewertungen widerspiegeln, falls diese gewünscht oder notwendig sind.

In den vier Berichten treten vielfältige Modellierungsaktivitäten der Schüler auf, die jeweils unterschiedliche Aspekte in unterschiedlicher Tiefe in den Blick nehmen. Wenn es dann noch unterschiedliche Voten gibt (W,X für Modell B, Y, Z für A), dann sind produktive Unterrichtsgespräche, in denen die verschiedenen Phasen und Eigenschaften des Modellbildungsprozesses angesprochen und festgehalten werden, vorprogrammiert. Es sind damit keine großen Unterrichtsprojekte notwendig, um produktives Modellieren und dessen Thematisierung im Unterricht zu initiieren, es reichen einzelne, allerdings entsprechend offen formulierte und Anlass für Reflexionen gebende Aufgaben aus. Methodisch von zentraler Bedeutung ist dann einerseits, dass die Schüler genügend Zeit und Raum für die Exploration eigener Vorstellungen und Antworten bekommen, die sie dann in Berichten und Präsentationen der Klasse mitteilen. Andererseits erzwingen die unterschiedlichen Beiträge eine Reflexion im Plenum, für die wohl ein Unterrichtsgespräch mit gegenseitigem Austausch, Rechtfertigungen und Modifikationen von Meinungen die geeignete Methode ist. Hier muss die Lehrkraft dann sicher auch zielführend steuern und nicht nur begleitend moderieren, damit es zu einem entsprechenden Aufbau von Modellierungskompetenzen kommt. Dies muss natürlich so geschehen, dass die Schülerbeiträge immer Ausgangspunkte für Sicherungen und Dokumentationen des Modellierens sind. Ein so gestalteter Unterricht macht Modellieren zur Sache der Schüler und nicht zu einem von außen an die Lerngruppe herangetragenen Inhalt.

3.3 Wassererwärmung

Problem:⁵

Wie lange benötigt ein Wasserkocher, um Wasser von Zimmertemperatur auf 75 °C zu erwärmen? Leider steht nur ein Thermometer zur Verfügung, das bis 50 °C messen kann.

Im Unterrichtsgespräch planen die Schüler ein Experiment. Sie beschließen, dass sie immer dann die Zeit ablesen wollen, wenn die Temperatur um 5 °C gestiegen ist, sie geben also die Schrittweite der Temperaturen vor und nicht die Zeitpunkte der Messungen, wie es gewöhnlich geschieht.

Es ergibt sich folgende
Messreihe:

t in s	0	24	43	61	77	98	119
T in °C	21	25	30	35	40	45	50

In Gruppenarbeit soll nun das Problem gelöst werden. Die Schüler kennen lineare Funktionen aus Anwendungen (Tarifaufgaben etc.) und innermathematischen Zusammenhängen, können Steigungen und Änderungsraten bestimmen und lineare Gleichungen lösen, modellieren aber das erste Mal einen Datensatz. Hier einige Arbeiten:

⁵ Das Problem ist in einer Besuchsstunde von einem Referendar behandelt worden.

A:

		+25	+18	+18	+16	+21	+21
+	0	25	43	61	77	98	119
°C	21	25	30	35	40	45	50
		+4	+5	+5	+5	+5	+5

Mittelwert: 19,834

 $f(t) = 19,834 \times t + 21$ ist der Term

Rechnung: $\frac{19,834 \times t + 21 = 75}{19,834 = 54 : 19,834}$
 $x = 2,76$

Nach $2,76 \cdot (196 \text{ Sekunden})$ beträgt die Wassertemp. 75°C

B:

Wann erreicht der Wasserkocher 75°C ?

		+25	+18	+18	+16	+21	+21
+	0	25	43	61	77	98	119
°C	21	25	30	35	40	45	50
		+4	+5	+5	+5	+5	+5

Wir haben einen Mittelwert für die Zeit erstellt: 17

Wir haben einen Funktionsterm erstellt:

$$f(x) = 17 \cdot x + 21$$

Wir machen eine Umformung:

$$17x + 21 = 75 \quad | -21$$

$$17x = 54 \quad | :17$$

$$x = 3,2$$

Wir setzen 3,2 in den Term ein:

$$f(x) = 17 \cdot 3,2 + 21 = 75,4$$

Pro 17 Sekunden steigt die Gradzahl um 3,2 Grad, bis die Temperatur $75,4^\circ\text{C}$ erreicht.

C:

		+25	+18	+16	+16	+21	+21
+	0	25	43	61	77	98	119
°C	21	25	30	35	40	45	50
		+4	+5	+5	+5	+5	+5

Mittelwert: 0,245

$$f(x) = 0,245 \times x + 21$$

$$f(75) = 0,245 \cdot 75 + 21 = \underline{\underline{39,375 \text{ sec.}}}$$

von den Geburtstagskindern Theresa & Henriette
& Gina, Leonie und Celina.

D:

		+25	+18	+18	+16	+21	+21	+18	+16	+21	+21
+	0	25	43	61	77	98	119	137	153	174	195
°C	21	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
		+4	+5	+5	+5	+5	+5	+5	+5	+5	+5

Nach dem Muster:

-2 dann +5 dann 2 mal +5 dann +5 Wert dann
wieder einmal -2

Alle Gruppen benutzen Geraden, es gibt aber nicht zwei gleiche Ergebnisse. Dass hier nur Geraden im Blick sind, ist auf dieser Stufe verständlich, weil den Schülern nur lineare Funktionen zur Verfügung stehen, weil die Darstellung der Daten dies nahelegt und weil es die Erstbegegnung mit einem solchen Fragentyp ist.

In allen Versionen treten Fehler auf, die aber alle hochproduktiv für die Anbahnung und Erzeugung von Sensibilität bezüglich der Modellierungstätigkeiten sind. In ihnen äußern sich Argumentationstypen, wie sie auch in professionelleren Zusammenhängen auftreten.

A, B und C erfassen, dass keine lineare Funktion genau passt und benutzen dann naheliegenderweise Mittelwerte. In A und B tritt dabei derselbe Fehler in unterschiedlicher Ausformung auf, es werden die absoluten Änderungen der Zeit betrachtet statt der relativen Änderungen von Temperatur zu Zeitraum. Die Dokumentationen zeigen, dass keine Gruppe über eine Betrachtung von Einheiten ihren

Ansatz und ihre Lösung kontrolliert. Die unterschiedlichen Mittelwerte sind Folge der Auslassung von „0“ in A, vermutlich Folge der typischen Fehlvorstellung „Wo nichts ist, braucht es auch nicht mitgezählt zu werden.“ Die Funktionsgleichungen werden dann in beiden Gruppen folgerichtig aufgestellt und auch die zu lösende Gleichung richtig aufgestellt und gelöst. Deutlich zeigt sich hier eine Sicherheit im innermathematischen Bereich. Der Ansatzfehler führt allerdings zu kontextbezogen unsinnigen Ergebnissen, und hier wird es jetzt spannend. Beide Gruppen spüren wohl, dass ihr Ergebnis nicht passt, ziehen aber nicht den eigentlich naheliegenden Schluss, dass dann wohl ein Ansatz- oder Rechenfehler vorliegen muss, sondern versuchen, ihre Lösung so hinzubiegen, dass eine erfolgreiche Validierung stattfindet. Sie sind sich der Notwendigkeit des Rückbezuges zur Realität wohl bewusst, statt Fehlersuche wählen sie aber spezifische kreative Rettungsversuche. Dies ist menschlich, allzu menschlich, verletzt aber Rationalitätskriterien für das Modellieren. A interpretiert die 2,76 einfach um als Minuten und schon passt es ganz gut zur impliziten Erwartung (abgesehen davon, dass 0,76 Minuten nicht 76 Sekunden sind), B macht zunächst eine innermathematische Probe, die aber gar nicht als solche genannt wird, wundert sich nicht über die Rundungsfolgen und interpretiert die Gleichung geschickt, aber willkürlich, so um, dass der Realitätsbezug passend erscheint (eine Überprüfung hätte allerdings gezeigt, dass nach dieser Interpretation nach 119 Sekunden das Wasser erst 43,4 °C warm sein würde). C ist quasi das Komplement zu A und B. Hier wird die mittlere Änderungsrate der Temperatur korrekt bestimmt und transparent dargestellt. Beim Aufstellen der Gleichung geschieht allerdings ein Fehler, es werden x-Wert und y-Wert vertauscht (die Temperatur 75 °C wird für die Zeit x eingesetzt). Die Reaktion der Gruppe auf das daraus resultierende, kontextbezogen sinnlose Ergebnis (nach 40 Sekunden beträgt die Temperatur knapp 30 °C), ist aber gänzlich anders als die Reaktion von A und B. Die Gruppe validiert überhaupt nicht, stellt keinen Rückbezug zur Realität her, im Gegenteil, durch doppeltes Unterstreichen soll das Ergebnis wohl noch verstärkend bestätigt werden. D schaut mit einem ganz anderen Blick auf die Tabelle. Hier wird versucht ein ‚inneres‘ Muster der Temperaturänderungen zu finden. Die Darstellung bleibt dabei schwer durchschaubar, vermutlich werden die Änderungen der Änderungen betrachtet und dort eine Gesetzmäßigkeit gesucht.

Die Bearbeitungen zeigen wieder deutlich, wie wichtig es ist, Schülern bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben Raum für eigene Dokumentationen zu geben. Diese ermöglichen es zunächst, dass die Lehrkraft Einblick in die Vorstellungs- und Gedankenwelt der Schüler bekommt, so dass Diagnosen möglich werden, die dann für zukünftiges Handeln ausgewertet werden können. Daneben zeigen die Ausführungen der Schüler aber auch wieder, wie zwingend notwendig eine synthetisierende, ordnende Diskussion und Zusammenfassung der Ergebnisse mit weiterführenden Dokumentationen durch die Lehrkraft ist; Handlungsorientierung impliziert zwingend Reflexionsorientierung. Förderlich für den Aufbau erwünschter Dispositionen zum Modellieren kann dabei zunächst ein Austausch der Gruppen untereinander sein, wo offensichtliche Widersprüche zu Reflexionen und Positionierungen führen. Die Ausführungen von A, B und C können anschließend unmittelbar zur Veranschaulichung und Dokumentation von Prinzipien der Validierung, also des Rückbezugs zur Realität, benutzt werden. Ein Vergleich mit der Modellierung durch D weist dann schon propädeutisch auf Unterschiede von beschreibender Modellierung und Suche nach Wirkzusammenhängen (hier Muster in der Folge der Temperaturwerte) hin. Während A und B auf das ‚Hinbiegen‘ hingewiesen werden müssen, muss C zunächst überhaupt erst einmal die Notwendigkeit des Rückbezuges zur Realität erlernen.

Erfahrung 2: Mathematische Modelle ermöglichen die ‚Berechnung‘ von Prognosen, machen aber den Rückbezug zur Wirklichkeit notwendig, ein „Passendmachen“ der Rechenergebnisse ist ein Modellierungsfehler.

3.4 Eisverkauf

Aufgabe (Klasse 7, Unterricht mit CAS):⁶

Carlos verkauft Eistüten der Marke „Doretto“ im Nelson Mandela Bay Stadion. Bisher gab es im neuen Stadion nur ein paar Ligaspiele der South Africa League, bei denen das Stadion nie ausverkauft war. Carlos hat sich eifrig mitgeschrieben, wie viele Eistüten er jeweils verkauft hat. Beim Spiel Deutschland gegen Serbien ist das Stadion zum ersten Mal ausverkauft (46.000 Zuschauer). Er überlegt nun, wie viele Eistüten er bereit halten sollte. Helft ihm und erstellt eine Prognose!

Ligaspiel	1	2	3	4	5	6	7	8
Zuschauer im Stadion	7.000	13.000	15.000	21.000	23.000	31.000	32.000	37.000
Verkaufte „Doretto“	3.500	6.500	5.100	7.800	5.400	8.000	9.900	9.700

Die Schüler benutzen folgende Verfahren zur Lösung der Aufgabe:

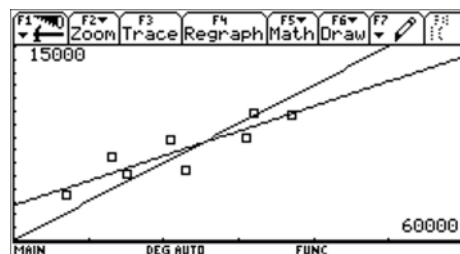
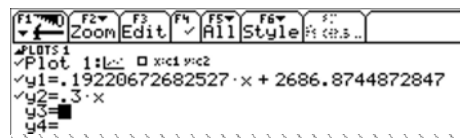
(1) Gerade durch den ersten und den letzten Punkt

(2) Gerade, die „mitten durch“ die Punktwolke verläuft

(3) Ursprungsgeraden, teilweise mit einem Messwert, teilweise nach Augenmaß

(4) Geraden $y = mx + b$ mit $b > 0$

(5) Regressionsgerade mit CAS



Während der Diskussion der Ergebnisse fallen folgende Bemerkungen:

(A) Die lineare Regression ist Mittelwert für viele verschiedene Werte.

(B) Wenn man den Durchschnitt pro Zuschauer benutzt, ist das genauer.

(C) CAS ist genauer, es verzeichnet sich nicht.

(D) Man kann ja nicht wissen, wie viele ein Eis kaufen.

(E) Wenn Graph zu Fuß, dann weiß man ja nicht, welchen, ist auch ungenau, CAS kann das genauer.

(F) CAS ist eigentlich falsch, denn die Gerade muss ja durch (0/0) gehen, aber CAS weiß das nicht.

⁶ Das Problem ist von einem Referendar in einer Lehrprobe behandelt worden.

(G) Ist ja eigentlich auch psychologisch, weil bei Sonnenwetter mehr gekauft wird als bei Regen.

Dass die Schüler hier einen linearen Zusammenhang ansetzen, ist auf dem Hintergrund des unterrichtlichen Kontextes und der Altersstufe angemessen und naheliegend. Unmittelbar klar ist den Schülern, dass es nicht eine einzige richtige Gerade gibt, die Verfahren, eine geeignete zu finden, sind durchaus vielfältig und kreativ, es werden auch unterschiedliche Typen benutzt (Proportionalität, linear), das CAS dient als heuristisches Werkzeug. Solche vielfältigen Modellierungen erzwingen dann wieder einen reflektierende Vergleich und eine bündelnde Diskussion. Nebenbei bemerkt: Wer hier zu früh die ‚Keule‘ Regressionsfunktion mit GTR aus dem Köcher holt, vertut Chancen produktiven Modellierens, im Gegenteil, er generiert eventuell sogar die Fehlvorstellung, dass es zwar nicht genau eine Gerade gibt, aber genau eine am besten passende, also doch ein eindeutiges Ergebnis. Die hier aufgetretenen Bemerkungen (A) - (G) bieten wieder einen wunderbaren Bodensatz und Ausgangspunkt für die Erzeugung und den Ausbau differenzierter Grundvorstellungen zum Modellieren:

Welcher Mittelwert ist in (A) gemeint? Welche Modellierung steht hinter (B)? Es sind vermutlich die Quotienten („Doretto/Zuschauer“), also wird hier Proportionalität unterstellt. (F) hilft hier weiter und unterstützt. (C), (E) und (F) erzwingen eine Auseinandersetzung über Modellierungsannahmen und Möglichkeiten und Grenzen eines CAS. Die Gediegenheit von (F) sollte der Lerngruppe bewusst gemacht werden. Während in (B) Ansätze von Modellieren des Wirkzusammenhanges erahnbar sind, wird in (F) die Realsituation konstitutiv für die Modellierung mit einbezogen. Obwohl nach dem Kriterium der „Nähe zu den Messpunkten“ die Regressionsfunktion das beste Modell zu sein scheint, muss es hier aus Gründen der adäquateren inhaltlichen Passung zur Realsituation zugunsten des Modells der Proportionalität eigentlich fallen gelassen werden. Der stillschweigenden Akzeptanz eines mathematischen Modells mit Prognosemöglichkeit stehen grundsätzliche Skepsis und Annahmen der Grenzen mathematischer Modellierung ((C) und (G)) gegenüber. Die Suche nach einer Lösung führt nicht zur Einigung auf eine bestimmte, es muss mit verschiedenen Modellen weiter gearbeitet werden. Führt man nun mit den unterschiedlichen Modellen Prognosen für die absetzbare Menge an „Doretto“ durch, erfahren Schüler ein weiteres wichtiges Grundprinzip von Modellierung: Unterschiedliche Prognosen sind nicht unbedingt Folgen von Unwissenheit sondern der Tatsache geschuldet, dass zu ein und derselben Realsituation eben unterschiedliche Modelle passen können. Will man die Güte von Prognosen einschätzen, müssen also eigentlich immer die zugrunde liegenden Modellierungen genannt werden.

Erfahrung 3: Wenn die ‚schmutzige‘ Welt im Spiel ist, passen meist unterschiedliche Modelle mit entsprechend differierenden Prognosen. Gute Passung zu den Messpunkten ist nicht alleiniges Kriterium, es sollten durch die Realsituation gegebene Nebenbedingungen berücksichtigt werden. Es gibt Gütekriterien für Modelle.

3.4 Eine Schulbuchaufgabe und eine Übungsaufgabe

71 Tragkraft von Drahtseilen

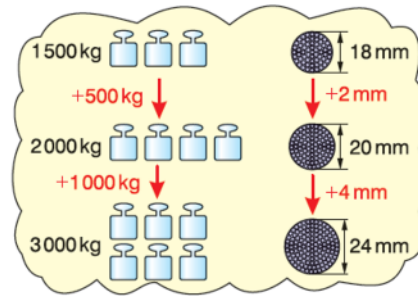
Ein Seil mit 18 mm Durchmesser kann mit 1 500 kg belastet werden, bei 20 mm dürfen es schon 2 000 kg sein. Nun soll eine Last von 3 Tonnen gehoben werden. Hein, der Vorarbeiter, rechnet.

- a) Welche Annahme steckt hinter der Überlegung von Hein? Was hat diese mit einer linearen Funktion zu tun?
b) Einem Handbuch entstammt die folgende Tabelle:

Durchmesser des Drahtseils	12 mm	14 mm	18 mm	20 mm	28 mm
maximale Belastbarkeit	820 kg	1 000 kg	1 500 kg	2 000 kg	8 000 kg

Zeichne einen Graphen zur Tabelle. Was sagst du nun zu Heins Rechnung?

Versuche mit der Tabelle oder dem Graphen die für eine Last von 3 t nötige Seilstärke zu ermitteln.



Quelle: NEUE WEGE 7 NDS, S. 157

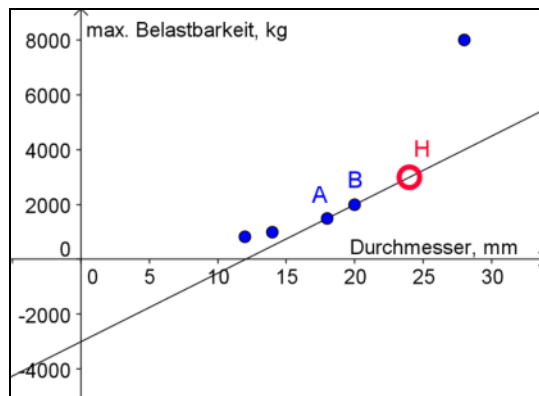
Ein Gespräch zwischen zwei Schülerinnen:

S1: Hein hat richtig gerechnet.

S2: Aber es passt nicht zum Graphen und der Tabelle.

S1: Die Daten sind aber richtig.

S2: Mit Daten kann man nicht richtig rechnen. Die Daten sind mathematisch falsch.



Schöner lässt sich das Problem des Beziehungsgefüges von Realität und Modell wohl kaum ‚modellieren‘! Schüler(Fehl-)vorstellungen werden zum Ausgangspunkt für die Erzeugung von Sensibilität in Modellierungsfragen und Anbahnung von entsprechenden Kompetenzen. Hat sich das Modell nach der Realität zu richten oder die Realität nach dem Modell?⁷

Dass solche (Fehl-)vorstellungen auch bei Lehrkräften auftreten können, zeigt folgende Übungsaufgabe (nicht von einem Referendar):

Aus einem Tank fließt pro Stunde eine Flüssigkeit mit der Abflussrate $f(t)$ Liter pro Stunde ab. Messungen ergaben folgende Werte:

Zeit in h	0	1	2	3	4
Abflussrate in l	4,3	ca. 4,1	3,7	ca. 3,0	1,9

Die Abflussrate kann näherungsweise mit einer quadratischen Funktion beschrieben werden. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion.

⁷ Dass dies erkenntnistheoretisch komplexer ist als vordergründig vermutbar, wird spätestens mit Kants Diktum „Der Verstand schreibt der Natur die Gesetze vor.“ deutlich.

Für die Folgerechnungen benutzen Sie bitte die Funktion $f(t) = -0,15t^2 + 4,3$.

Man wundert sich über das „ca.“ in der Tabelle. Warum bei zwei Messwerten? Was ist mit den anderen? Wenn man weiterliest, wird die eigentlich nicht für möglich gehaltene Vermutung zur Gewissheit: Die Tabellenwerte sind die Funktionswerte von $f(t)$ und die sind für $t = 0$, $t = 2$ und $t = 4$ exakt und für $t = 1$ und $t = 3$ gerundet!

3.4 Das m&m-Experiment

Ein Spiel:

- (1) Vier m&m werden auf den Tisch 'gewürfelt'.
 - (2) Zu jedem m&m mit obenliegendem m wird ein m&m dazugelegt.
 - (3) Alle m&m zusammen werden wieder auf den Tisch 'gewürfelt'.
 - (4) Siehe (2)
- Wie lange kann man mit 5.000 m&m spielen?
 - Wie viele m&m braucht man, damit das Spiel 30 Würfe lang dauert?

Eine ausführliche Darstellung von Unterrichtsgängen findet man in [1] und [2]. Hier sollen nur typische Modellierungen von Schülern angegeben werden, wie sie in mehrmaligen Durchführungen des Spiels im Unterricht aufgetreten sind. Diese dienen als Ausgangspunkt für eine Erörterung der unterrichtlichen Konsequenzen bezüglich des Ausbaus von Grundvorstellungen und Erfahrungen zum Modellieren.

- (1) Beschreibung der Messpunkte mit Parabeln, manchmal auch kubischen Funktionen.
- (2) „immer ungefähr die Hälfte dazu“ $\rightarrow x_{n+1} = x_n + 0,5 \cdot x_n$.
- (3) „immer ungefähr die Hälfte dazu“ $\rightarrow f(x) = 4 \cdot 1,5^x$.
- (4) Proportionalität von Anzahl der Würfe und Anzahl der m&m auf dem Tisch.

(1) - (4) treten meist nicht alle zusammen in einer Lerngruppe auf, auch ist die Verteilung der einzelnen Modelle innerhalb der Gruppen unterschiedlich. Damit gewinnt die anschließende Diskussion um das Finden eines ‚besten‘ Modells wieder an Bedeutung. So gab es Lerngruppen, in denen sehr dominant (1) in allen Variationen auftrat und (2) und (3) erst spät in den Blick kamen (vgl. [1]), in anderen Lerngruppen gab es eine fast gleichverteilte Benutzung von (1) und (2) bzw. (3), es gab aber auch eine Lerngruppe, in der kaum (1) auftrat, dafür überraschenderweise aber zweimal (4), so dass hier zwischen (3) und (4) diskutiert wurde. Wichtig für die Unterrichtsgestaltung ist nun wieder, dass hier behutsam die Positionen vorge tragen und verglichen werden und nicht zu früh in Schiedsmanier vom Lehrer in Richtung (2) bzw. (3) gelenkt wird. Natürlich wird man (4) schnell ‚widerlegen‘ können (schon $0|4$ ist ausreichendes Argument), aber warum ist es denn kein quadratischer Zusammenhang? In der Tat kann es durchaus sein, und ist auch aufgetreten, dass die realen Messwerte besser zu einer Parabel passen, als zu $4 \cdot 1,5^x$. Warum sollte man sich für die Exponentialfunktion entscheiden? Wenn es dann noch aus einer Schülerin herausplatzt „Das kann nicht sein“, als sie berechnete, dass mit dem Exponentialmodell 767.000 m&m, also ca. 3070 Tüten, notwendig wären, um dreißigmal zu spielen, wendete sich schon mal das Blatt und einige halten wieder das quadratische Modell für passender, bei dem man nur ca. 1.800 m&m für dreißig Durchgänge benötigt. Wieder ein schönes Beispiel dafür, dass Alltagsdenken und -vorstellungen zum Korrektiv für vorher für passend gehaltene Modelle benutzt wer-

den, oder anders: Wenn die Konsequenzen eines Modells einem ‚suspekt‘ erscheinen, lässt man lieber das Modell fallen als seine Vorstellungswelt zu modifizieren.

Hier muss dann die Berücksichtigung innerer Wirkzusammenhänge explizit angesprochen werden: Die dem Spiel innewohnenden Wirkmechanismen (hier: Spielregeln) sind es, die das exponentielle Modell („immer die Hälfte dazu“) auszeichnen. Wenn Schüler dann stolz berichten, dass $4 \cdot 1,48^x$ bei ihnen noch besser als $4 \cdot 1,5^x$ zu den selbst erzeugten Daten passt, dann haben sie in beschreibender Weise das ‚allgemeine‘ Modell noch mal verbessert, aber was ist mit dem Datensatz der Nachbargruppe? Warum wird man wohl doch bei $4 \cdot 1,5^x$ bleiben? Ist das Modell generell besser?

Bei solch einem Ringen zwischen beschreibender Modellierung und Modellierung von Wirkzusammenhängen erleben Schüler exemplarisch in einer spielerischen Einkleidung immer wieder auftretende analoge Auseinandersetzungen in den Wissenschaften. So ist die Epizyklen-theorie zur Planetenbewegung im wesentlichen eine beschreibende Modellierung, immer neue Kreise mussten konstruiert werden, um beobachtete Abweichungen vom Modell zu korrigieren, um also eine bessere Annäherung zu schaffen. Mit Galilei, Kepler und im vorläufigen Abschluss dann mit Newton wurden an die Stelle von Beschreibungen, Modellierungen innerer Wirkzusammenhänge durch DGLn gegeben, die in der Anfangsphase tatsächlich zu schlechterer Datenpassung, als sie die Epizyklen-theorie lieferte, führte⁸. Entscheidend ist aber letztendlich die Art der Modellierung gewesen, die zum Siegeszug der Newton’schen Physik führte.

Erfahrung 4: Es gibt unterschiedliche Qualitäten der Modellierung. Gelingt es, innere Wirkmechanismen zu erfassen, ist dies besser als eine alleinige Beschreibung. Ein Modell kann besser sein, obwohl es schlechter zu den Daten passt als ein Konkurrent. Nicht erwartete oder auch erhoffte Konsequenzen eines Modells für die Realität sind kein Falsifikator.

Wenn Schülerinnen und Schüler in der Sek 1 die Erfahrungen 1-4 in mehreren Situationen gemacht haben, besitzen sie sicherlich am Ende der Sek 1 eine hinreichende Kompetenz im Modellieren, die dann in der Sek 2, mindestens exemplarisch, ausgebaut werden kann.

Literatur

- [1] Körner, H. (2003): Modellbildung mit Exponentialfunktionen, ISTRON 8, S. 155-177.
- [2] Körner, H. (2008): Das m&m-Experiment, TI Nachrichten 2/2008, S. 23-27.
- [3] Renken, A. (2012): Von der Realität zum Modell - Wie mathematisieren Schülerinnen und Schüler einer siebten Klasse des Gymnasiums?, Schriftliche Hausarbeit am Studienseminar Oldenburg für das Lehramt an Gymnasien.

Anschrift des Autors:

Henning Körner, Graf-Anton-Günther-Schule Oldenburg / Studienseminar Oldenburg / Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

E-Mail: henning.koerner@uni-oldenburg.de

⁸ Pointiert: Wenn die Kritik der katholischen Kirche sich auf Datenpassung bezog, war sie zunächst im Recht.

Neue Materialien für einen realitätsbezogenen
Mathematikunterricht 1

ISTRON-Schriftenreihe

Henn, H.-W.; Meyer, J. (Hrsg.)

2014, X, 158 S. 116 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-03627-0