

2 Stoffdidaktische Überlegungen zum Phänomen Zufall

In diesem Kapitel soll vorgestellt werden, welche mathematischen Inhalte Gegenstand der durchgeführten Untersuchung sind. Grundsätzlich wird für die Konzeptualisierung des Phänomens Zufall ein Ansatz gewählt, in den Überlegungen aus den zwei Teilgebieten der Stochastik einfließen: Überlegungen aus der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* werden mit *statistischen* Untersuchungen von Daten verknüpft. Die konsequente Verbindung dieser beiden Teildisziplinen ist eine der zentralen Forderungen, die an eine substanzielle Auseinandersetzung mit der Stochastik in der Sekundarstufe I und II gestellt werden (vgl. Schupp 1982; Biehler 1994; Hußmann 2003, S. 166 f.; AK Stochastik 2003). Im Folgenden wird zunächst die Beschäftigung mit Mustern und Variabilität in der schulischen Stochastik allgemein beleuchtet (Kapitel 3.1), bevor das empirische Gesetz der großen Zahlen und dessen mathematische Modellierung (Kapitel 3.2) erläutert und in Hinblick auf verschiedene theoretische und empirische Zugänge diskutiert wird (Kapitel 3.3).

2.1 Stochastik als Mathematik der Muster und Variabilität

Eine moderne Auffassung von Mathematik sieht den Begriff der *Muster* als zentral an:

„Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern. Der Mathematiker untersucht abstrakte ‚Muster‘ – Zahlenmuster, Formenmuster, Bewegungsmuster, Verhaltensmuster und so weiter. Solche Muster sind entweder wirkliche oder vorgestellte, sichtbare oder gedachte, statische oder dynamische, qualitative oder quantitative, auf Nutzen ausgerichtete oder bloß spielerischem Interesse entspringende“ (Devlin 1998, S. 3 f.; vgl. auch Wittmann und Müller 2008).

Für die vorliegende Arbeit sollen unter dem Begriff ‚Muster‘ alle Regelmäßigkeiten verstanden werden, die sich durch ein wiederkehrendes Erscheinen ihrer Elemente auszeichnen, sowie „die Merkmale (...), die einer sich wiederholbaren Sache *zugrunde liegen*. Muster kann also gleichzeitig der Grundbaustein sein (z.B. eine Denk-, Gestaltungs- oder Verhaltensweise, die zur Reproduktion bestimmt ist) und das nach gleichförmiger Wiederholung entstandene Ergebnis“ (Lüken 2012, S. 20; Hervorhebung im Original).

In der Stochastik werden diese Muster an Daten aus zufälligen Vorgängen herangetragen durch mathematische Modellierungen: Wahrscheinlichkeiten treffen beispielsweise eine Vorhersage für relative Häufigkeiten, die sich mehr oder weniger gut in erzeugten Versuchsausgängen identifizieren lassen. Dabei bleibt

ein ‚Rest‘ übrig, der sich nicht über die Modellierung erfassen lässt (vgl. Borovcnik 2005; Eichler und Vogel 2009, S. 168 f.).

Hier liegt der zentrale Unterschied zu Mustern aus kausalen Zusammenhängen: Muster in der Stochastik sind durchsetzt mit *Variabilität*: Bei Wiederholung eines zufälligen Vorgangs können auch unter exakt gleichen Bedingungen andere Ereignisse auftreten; es finden also Abweichungen und Störungen statt (vgl. Eichler und Vogel 2009, S. XII; Wild und Pfannkuch 1999, S. 235 ff.). Für die Variabilität im Einzelfall ist im Kontext von klassischen Experimenten zur Wahrscheinlichkeitsrechnung (also mit Zufallsgeräten wie Würfeln, Münzen oder Glücksrädern) keine andere Ursache tragfähig als der Einfluss des Zufalls (auch bezeichnet als ‚unerklärter Teil der Variabilität‘, vgl. Eichler und Vogel 2009, S. 137; Borovcnik 2005).

Moore (1990) nutzt dieses Zusammenspiel von Mustern und Variabilität zur Definition von zufälligen Phänomenen:

„Phenomena having uncertain individual outcomes but a regular pattern of outcomes in many repetitions are called *random*. ‘Random’ is not a synonym for ‘haphazard’ but a description of a kind of order different from the deterministic one that is popularly associated with science and mathematics.” (S. 98, Hervorhebung im Original).

‚Zufall‘ ist demnach von ‚Willkür‘ abzugrenzen aufgrund der Identifizierbarkeit von vorhersagbaren Mustern auf lange Sicht, obwohl im Einzelfall ein Versuchsausgang nicht sicher vorhersagbar ist. Ohne diese Musterhaftigkeit würden Wahrscheinlichkeiten als mathematische Modellierungen der Muster ihren Sinn verlieren (vgl. Prediger 2008).

2.2 Das empirische Gesetz der großen Zahlen

Bei dem von Moore beschriebenen Phänomen der auf lange Sicht auftretenden Muster handelt es sich um eines der grundlegenden ‚Gesetze‘¹ der Stochastik, das als ‚empirisches Gesetz der großen Zahlen‘ bezeichnet wird. Damit wird beschrieben, dass sich relative Häufigkeiten eines zufälligen Vorgangs mit zunehmender Anzahl an Versuchswiederholungen um einen bestimmten Wert stabilisieren. Dieser Wert entspricht ungefähr der theoretisch bestimmbaren Wahrscheinlichkeit eines Zufallsversuchs, beim Wurf mit einem 20seitigen Würfel mit sieben roten Flächen also dem Wert 0,35 für das Ereignis ‚Rot‘ (bezeichnet als $P(A)$). Die folgende Abbildung 2.1 zeigt ein Verlaufsbild der kumulierten relativen Häufigkeiten bei einer wachsenden Anzahl n von Versuchswie-

¹ Dabei handelt es sich in der Stochastik nicht um Gesetze im naturwissenschaftlichen Sinne, wie im Folgenden diskutiert wird (vgl. Borovcnik 2008).

derholungen mit zunächst starken Schwankungen der relativen Häufigkeiten bei wenigen Wiederholungen, die dann immer weiter abnehmen.

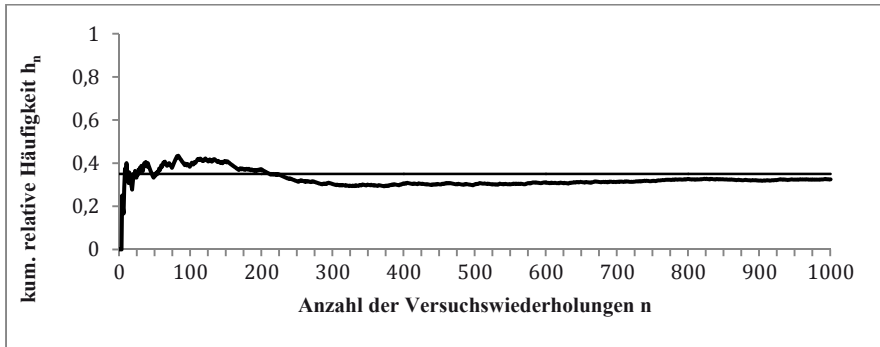


Abbildung 2.1 Ergebnisse einer Excel-simulierten Versuchsreihe bei einer objektiven Wahrscheinlichkeit $P(A) = 0,35$ (horizontale Linie); dargestellt sind die kumulierten relativen Häufigkeiten des Ereignisses A bei der jeweiligen Anzahl an Versuchswiederholungen (insgesamt 1000 Wiederholungen)

Während die Abnahme der Schwankungen der relativen Häufigkeiten gezeigt werden kann (vgl. Eichler und Vogel 2011, S. 110 f.), ist das ungefähre Annähern des theoretischen Wertes $P(A)$ eine Erfahrungstatsache oder ein Naturgesetz, das nicht mathematisch bewiesen werden kann. Dies lässt sich folgendermaßen über einen Widerspruch zeigen (vgl. Eichler und Vogel 2011, S. 104):

Wenn sich die relativen Häufigkeiten $h_n(A)$ eines Ereignisses A um einen eindeutigen Grenzwert $P(A)$ stabilisieren, dann müsste gelten: Für jeden beliebigen Abstand (bezeichnet als ε) existiert eine Schranke n_0 , so dass alle $h_n(A)$ bei mehr als n_0 Versuchswiederholungen einen kleineren Abstand zu $P(A)$ haben als ε .

Also:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: |h_n(A) - P(A)| < \varepsilon \quad \forall n > n_0$$

Geht man nun davon aus, dass sich die relativen Häufigkeiten ab n_0 Wiederholungen stabilisiert haben, so kann man ein ε auswählen und die Aussage annehmen, dass der Abstand aller weiteren relativen Häufigkeiten $h_n(A)$, $n > n_0$ zum theoretischen Wert $P(A)$ immer kleiner als ε ist.

Tritt nun wiederholt in Folge das Ereignis A ein, so nimmt der Abstand $|h_n(A) - P(A)|$ zu und überschreitet den Wert ε .

Es handelt sich demnach nicht um einen analytischen Grenzwert; die relativen Häufigkeiten bei einer großen Anzahl an Versuchswiederholungen stellen nur einen *Schätzwert* dar, der gegebenenfalls im weiteren Verlauf der Experimente verworfen werden muss (vgl. Kütting 1994, S. 44).

Das empirische Gesetz der großen Zahlen vereint Muster und Variabilität über die Anzahl der Versuchswiederholungen: Je kleiner die Versuchsanzahlen sind, desto stärker variieren die relativen Häufigkeiten; je größer sie sind, desto besser ist ein Muster identifizierbar. Abbildung 2.2 stellt dieses Zusammenspiel dar; dabei sollen Regelmäßigkeiten und Abweichungen nicht als sich gegenseitig ausschließende Phänomene verstanden werden; stattdessen wird veranschaulicht, dass eine hohe Variabilität bei wenigen Wiederholungen eines zufälligen Vorgangs die Identifikation eines Musters erschwert, während bei vielen Wiederholungen das Muster trotz singulärer Abweichungen in den relativen Häufigkeiten gut erkennbar ist.



Abbildung 2.2 Beobachtbarkeit von Mustern und Variabilität in Abhängigkeit von der Zahl der Versuchswiederholungen

Das empirische Gesetz der großen Zahlen ist grundlegend, um mathematischen Wahrscheinlichkeitsaussagen Sinn zu verleihen: „[It] explains why one *can* adopt probabilistic conceptions in a successful way *although* random cannot be calculated for single outcomes. It explains the *sense* and the *preconditions*, but also the limits of probabilistic considerations“ (Prediger 2008, S. 16, Hervorhebungen im Original). Gemeint ist damit, dass obwohl einzelne Versuchsausgänge nicht sicher vorhersagbar sind, die Beobachtbarkeit von sich stabilisierenden Mustern ermöglicht jedoch, dass Vorhersagen aufgrund von Wahrscheinlichkeitsüberlegungen getroffen werden können. Daher handelt es sich bei der Unterscheidung der kurzen und langen Sicht um den zentralen *Kontext*, vor dem die Gültigkeit von Vorstellungen betrachtet werden muss. Bezogen auf die präskriptive Dimension des horizontalen Conceptual Change (vgl. Kapitel 1.2) bedeutet dies, dass Lernende befähigt werden müssen, Vorstellungen in Hinblick auf ihre Gültigkeit für die kurze oder lange Sicht zu aktivieren (vgl. Prediger 2005; Prediger 2008): Während die Annahme von Unvorhersagbarkeit tragfähig ist für die kurze Sicht (einzelne zufällige Vorgänge oder eine sehr geringe An-

zahl an Wiederholungen), ist die zuverlässige Vorhersagbarkeit beobachtbarer Muster tragfähig für die lange Sicht (viele Versuchswiederholungen).

Zur Aneignung des empirischen Gesetzes der großen Zahlen durch Lernende können verschiedene Perspektiven genutzt werden, die im Folgenden charakterisiert werden.

2.3 Perspektiven auf das empirische Gesetz der großen Zahlen

Das Zusammenspiel aus Variabilität und Zufall bietet reichhaltige Möglichkeiten, verschiedene Untersuchungen anzustellen:

„Das empirische Gesetz der großen Zahlen und die darin zunächst empirisch anzutreffende Stabilisierung relativer Häufigkeiten ist eine Aufforderung, sich den dort zutage tretenden Besonderheiten zuzuwenden, zu versuchen, diese auszuarbeiten, und zu verstehen, unter welchen Bedingungen sich Stabilisierungen einstellen und wie diese mathematisch zu präzisieren und zu interpretieren sind.“ (Biehler und Steinbring 1982, S. 299).

Dabei ergeben sich verschiedene Möglichkeiten verschiedene Perspektiven auf die erzeugten Daten einzunehmen (vgl. Abb. 2.3).

Die Blickrichtungen verfolgen unterschiedliche Untersuchungsinteressen:

Bei der *dynamischen* Betrachtung einer wachsenden Anzahl von Versuchswiederholungen steht die Stabilisierung der kumulierten relativen Häufigkeiten als Schätzwert für eine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ auf lange Sicht im Vordergrund (vgl. Abb. 2.3). Freudenthal (1972) kritisiert jedoch, dass bei der alleinigen Einnahme dieser Perspektive die naturgemäße Variabilität und damit ein zentrales stochastisches Charakteristikum verloren geht. Ergänzend dazu kann die *statisch-komparative Sichtweise* eingenommen werden, bei der Serien von Versuchsreihen mit gleicher Anzahl an Wiederholungen betrachtet werden (vgl. Abb. 2.4). Hier steht die Frage nach der Schwankungsbreite der relativen Häufigkeiten in Abhängigkeit von einem festen n im Vordergrund (vgl. Borovcnik 1992, S. 107; Riemer 1991, S. 19). Die Abnahme der Schwankungen bei größeren n kann über das $1/\sqrt{n}$ -Gesetz modelliert werden (vgl. Kapitel 2.4.2).

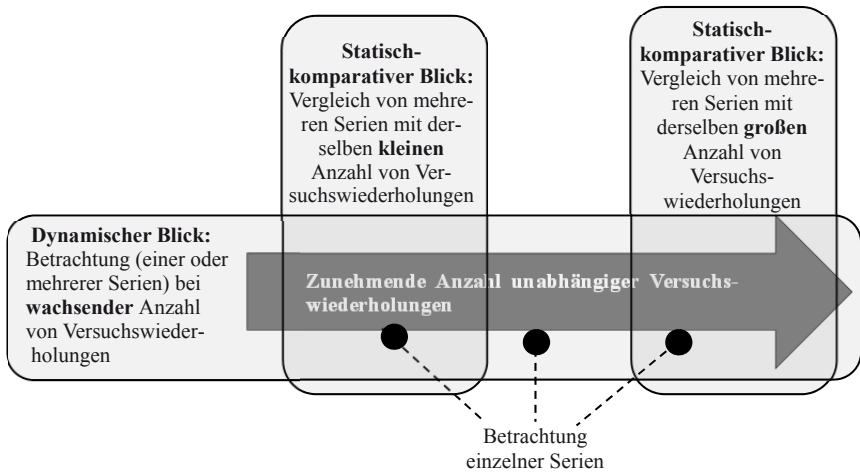
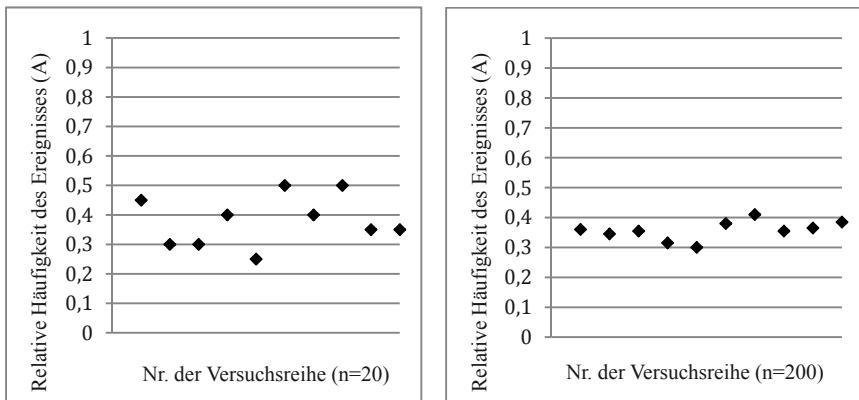


Abbildung 2.3 Verschiedene Betrachtungen zum empirischen Gesetz der großen Zahlen

Abbildung 2.4 Simulierte Ergebnisse (relative Häufigkeiten) von jeweils zehn unabhängigen Versuchsreihen, $P(A)=0,35$; links 20 Wiederholungen je Versuchsreihe, rechts 200 Wiederholungen je Versuchsreihe

Neben dem Vergleich von mehreren Serien mit gleicher oder wachsender Versuchsanzahl kann sich auch der Blick *auf einzelne Serien* bewähren: Für die dynamische Perspektive reicht vermutlich eine ausreichend lange Serie von Versuchswiederholungen aus, um das Zusammenspiel von Variabilität und Mus-

ter zu entdecken. Dabei muss dann noch die Idee entwickelt werden, dass eine zweite, ebenso lange Serie möglicherweise einen anderen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ erzeugt.

Aus statisch-komparativer Sicht zeigt sich der Wert einzelner Serien mehr im Abgleich mit einem bereits bekannten Muster: Inwiefern passt die in der Serie erzeugte relative oder absolute Häufigkeit zu der auf bisherigen Erfahrungen oder theoretischen Überlegungen basierenden Erwartung?

Die nachfolgende Tabelle 2.1 fasst die möglichen Einsichten hinsichtlich des eingenommenen Blickwinkels so zusammen, wie sie bereits in der Sekundarstufe I thematisiert werden können.

Tabelle 2.1 Mögliche Entdeckungen zum empirischen Gesetz der großen Zahlen

	Statisch vergleichender Blick <i>Vergleich von mehreren Serien mit derselben Anzahl von Versuchswiederholungen</i>	Dynamischer Blick <i>Vergleich von mehreren Serien mit derselben großen Anzahl von Versuchswiederholungen</i>
Einzelne Serien	Bei einer kleinen Anzahl an Versuchswiederholungen ist die Abweichung der beobachteten, relativen Häufigkeit von der theoretischen Wahrscheinlichkeit häufig groß. Bei einer großen Anzahl an Versuchswiederholungen ist die Abweichung der beobachteten, relativen Häufigkeit von der theoretischen Wahrscheinlichkeit häufig klein.	Je mehr Wiederholungen des Zufallsversuchs durchgeführt werden, desto weniger variieren die relativen Häufigkeiten.
Mehrere Serien	Bei einer kleinen Anzahl an Versuchswiederholungen ist die Streuung der relativen Häufigkeiten innerhalb einer Serie häufig groß. Bei einer großen Anzahl an Versuchswiederholungen ist die Streuung der relativen Häufigkeiten innerhalb einer Serie häufig klein.	Je mehr Wiederholungen des Zufallsversuchs durchgeführt werden, desto weniger schwanken die relativen Häufigkeiten. Verschiedene Serien können allerdings verschiedene Folgen von relativen Häufigkeiten erzeugen.

Neben den bisher beschriebenen Erfahrungen, die auch in der Sekundarstufe I aus Experimenten entwickelbar sind, existieren auch mathematische Modellierungen zu den beschriebenen Phänomenen. Diese sollen zur fachlichen Klärung im Folgenden kurz vorgestellt werden und dienen als Hintergrund für die Be-

schreibung des mathematischen Gehalts des Lehr- und Lernarrangements, das in Kapitel 4 vorgestellt wird.

2.4 Mathematische Modellierungen für das Phänomen Zufall

2.4.1 Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen als Modellierung von Mustern

Das Bernoulli'sche Gesetz der großen Zahlen klärt mathematisch den Zusammenhang zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit (vgl. Borovcnik 1992, S. 104) und stellt somit das „Modell-Analogon zum empirischen Gesetz der großen Zahlen (...) dar“ (Büchter und Henn 2005, S. 347).

Das Ereignis A eines zufälligen Vorgangs besitze die Wahrscheinlichkeit $P(A)$. Nun betrachtet man die n -malige, unabhängige Durchführung dieses Experiments. Die Zufallsvariable \bar{X}_n beschreibe die relative Häufigkeit des Eintretens des Ereignisses A in der Serie von n unabhängigen Wiederholungen. Dann gilt: Die Wahrscheinlichkeit, dass \bar{X}_n von der objektiven Wahrscheinlichkeit $P(A)$ um höchstens einen beliebig kleinen, positiven Wert ε abweicht, konvergiert gegen 1 (vgl. Büchter und Henn 2005, S. 347 f.).

Satz 2.1:

$$\forall \varepsilon > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - P(A)| \leq \varepsilon) = 1$$

Anschaulich beschrieben könnte man einen Schlauch von der Breite eines beliebig kleinen Wertes ε um den Wert p legen; mit einer Wahrscheinlichkeit, die gegen 1 geht, wird die relative Häufigkeit h_n in diesen Schlauch hinein laufen für eine wachsende Anzahl n an unabhängigen Versuchswiederholungen (vgl. Büchter und Henn 2005, S. 175).

Das Bernoulli'sche Gesetz der großen Zahlen garantiert jedoch nicht, dass die relative Häufigkeit bei wachsender Anzahl an Versuchswiederholungen nicht wieder aus dem ε -Schlauch hinaus läuft; Es ist eine Aussage darüber, dass die *Wahrscheinlichkeit*, dass die relative Häufigkeit in dieser Epsilon-Umgebung bleibt, gegen 1 konvergiert (vgl. Engel 1973, S. 100; Büchter und Henn 2005, S. 175). Daher spricht man hier von einer ‚stochastischen Konvergenz‘.

2.4.2 Wurzel-n-Gesetze als Modellierung der Variabilität

Neben der mathematischen Aussage über die stochastische Konvergenz der relativen Häufigkeiten lassen sich auch Überlegungen über die zu erwartende Streuung der absoluten und relativen Häufigkeiten in Abhängigkeit von der Zahl der Versuchswiederholungen anstellen:

Für die Standardabweichung $\sigma(X)$ einer binomialverteilten² Zufallsvariablen (also die durchschnittlich zu erwartende Abweichung vom Erwartungswert) gilt der Satz:

$$\sigma(X) := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Bei einer Erhöhung der Versuchsanzahl um einen Faktor m erhöht sich also auch die Standardabweichung um den Faktor \sqrt{m} . Dies bedeutet, dass bei zunehmender Anzahl von Versuchswiederholungen die Schwankungen der absoluten Häufigkeiten zunehmen und jede Schranke überschreiten (vgl. Büchter und Henn 2005, S. 177; bezeichnet als \sqrt{n} – Gesetz).

Betrachtet man die hinsichtlich der Versuchsanzahl normierte Standardabweichung

$\frac{\sigma}{n} = \frac{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}{n} = \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}$, so ergibt sich, dass sich diese um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{m}}$ verringert, wenn n mit dem Faktor m multipliziert wird. Die Zufallsschwankungen der relativen Häufigkeiten nehmen also ab, je größer n wird (bezeichnet als $1/\sqrt{n}$ – Gesetz).

Diese Überlegungen lassen sich wie das empirische Gesetz der großen Zahlen auch experimentell untersuchen (vgl. Eichler und Vogel 2011, S. 163; Riemer 1991).

Das mathematische Durchdringen des Bernoulli'schen Gesetzes der großen Zahlen geht über die Inhalte der Sekundarstufe I hinaus. Das empirische Gesetz der großen Zahlen hingegen kann als Erfahrungstatsache eine wichtige Grundlage beim Aufbau tragfähiger, stochastischer Vorstellungen darstellen (vgl. Kapitel 3). Dazu können verschiedene Perspektiven auf die Effekte des Gesetzes eingenommen werden, die im Folgenden erläutert werden.

2 In Hinblick auf die empirische Untersuchung werden hier nur binomialverteilte Zufallsvariablen betrachtet.

2.4.3 Zusammenspiel empirischer und theoretischer Zugänge zum Phänomen Zufall

Bereits in den vorhergehenden Erläuterungen zum empirischen Gesetz der großen Zahlen wurde deutlich, dass eine Verschränkung zwischen empirischen (also auf der Durchführung von zufälligen Vorgängen basierenden) und theoretischen (also auf Überlegung basierenden) Zugängen zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten stattfinden kann zur Erarbeitung der Stochastik in der Schule. Abbildung 2.5 stellt diesen Zusammenhang zwischen der durch einen theoretischen Ansatz bestimmbarer Wahrscheinlichkeit und den in einem empirischen Zugang beobachtbaren (relativen) Häufigkeiten dar.

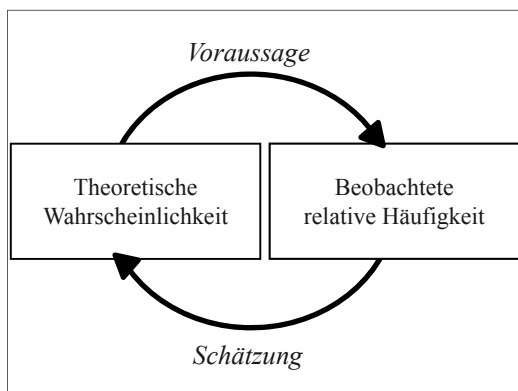


Abbildung 2.5 Zusammenspiel von Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit
(vgl. Borovcnik 1992, S. 111; Riemer 1985, S. 26 f.)

Unter einem theoretischen Zugang wird die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ohne Durchführung von Experimenten verstanden: „[Theoretical probability] is obtained by the fraction of outcomes favourable to this event in the sample space; this makes use of an implicit assumption of equal likelihood of all single outcomes of the sample space. It is an a priori probability before any trials are made” (Borovcnik et al. 1991, S. 41).

Wenn bei einem Zufallsexperiment mit endlicher Ergebnismenge Ω alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind, dann wird die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ für das Ereignis A also berechnet durch

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Elemente von } A}{\text{Anzahl der Elemente von } \Omega}$$

Diese Wahrscheinlichkeit wird als Laplace-Wahrscheinlichkeit bezeichnet (vgl. Büchter und Henn 2005, S. 167 f.). Zu einer so bestimmten Wahrscheinlichkeit gibt es keine sinnvollen Alternativen; sie besitzt also nur in Bezug auf diese Grundannahme hypothetischen Charakter (vgl. Riemer 1991, S. 17).

Neben der Laplace-Wahrscheinlichkeit werden in der vorliegenden Arbeit auch Überlegungen zu Wahrscheinlichkeiten zum Beispiel aufgrund von Sym-

Muster und Variabilität erkunden
Konstruktionsprozesse kontextspezifischer
Vorstellungen zum Phänomen Zufall

Schnell, S.

2014, XII, 351 S. 52 Abb., 4 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-03804-5