

2 Begriffe im Kontext des Mathematiklernens – aus (entwicklungs-) psychologischer Perspektive

„Mathematical concepts are rooted in situations and problems.“
(Vergnaud 1988, 142)

Im vorangehenden Kapitel wurde dargelegt, worin vor dem Hintergrund der philosophischen Perspektive des semantischen Inferentialismus das Verstehen eines Begriffs besteht, und zwar im Verfügen über im Sprachspiel explizierte Festlegungsstrukturen. Im vorliegenden Kapitel wird der Zugang durch einen noch stärker (entwicklungs-) psychologischen Blickwinkel erweitert. Es sind im Wesentlichen drei Gesichtspunkte, die den Theoriehintergrund dieser Arbeit ergänzen bzw. modifizieren:

Zum einen wird das Ziel verfolgt, ausgehend von dem inferentiellen Zugang eine psychologische Perspektive auf die Entwicklung und Verwendung von Begriffen einzunehmen. Denn um individuelle und geteilte Begriffsentwicklung zu verstehen, bedarf es einer psychologischen Perspektive. Es steht nicht das Sprachspiel *selbst*, sondern die individuellen Begriffe von Schülerinnen im Fokus dieser Arbeit; diese werden über die im Sprachspiel explizierten Festlegungen und Inferenzen betrachtet. Die inferentialistische Perspektive wird adaptiert und unter psychologischem Blickwinkel gedeutet und weiterentwickelt, sodass sie zur Analyse von individuellen Begriffen im Denken und Handeln von Schülerinnen in Situationen dienen kann (vgl. Kap. 2.1).

Daneben wird das Ziel verfolgt, die Bedeutung von Situationen für individuelle Begriffe und ihre Entwicklung zu beleuchten. Es wird – ausgehend von einer mathematikdidaktisch und psychologisch gespeisten Perspektive auf das Begriffslernen, in der *Situationen* große Bedeutung beigemessen wird (vgl. Vergnaud 1996b, 218) – dargelegt, welche Bedeutung die Begriffe der *Situation* und der *Klasse von Situationen* für die Betrachtung individueller Begriffe und deren Entwicklung haben (vgl. Kap. 2.3).

Darüber hinaus wird das Ziel verfolgt, insbesondere die *Entwicklung* von Begriffen als die Entwicklung von Urteilen, Festlegungen und inferentiellen Relationen zu beleuchten. Ausgehend von entwicklungspsychologischen und mathematikdidaktischen Theorien wird dargelegt, wie individuelle Begriffe sich sowohl in kurzfristiger als auch in mittelfristiger Perspektive fortentwickeln können und welche Prozesse bei dieser Entwicklung von Bedeutung sind. Diese Gesichtspunkte sind in Kapitel 2.2 sowie in Kapitel 2.3 in Zusammenhang mit der Betrachtung von Situationen und Klassen von Situationen dargestellt.

Schließlich wird in Kapitel 2.4 u. a. diskutiert, was es heißt, über einen mathematischen Begriff zu verfügen.

Um den o. g. Zielen nachzugehen, wird maßgeblich die *Theorie der begrifflichen Felder*⁸ von Gérard Vergnaud genutzt und adaptiert. Diese Theorie ist anschlussfähig an die bisherigen Annahmen dieser Arbeit und setzt die o. g. Anliegen in Bezug zueinander.⁹ Im Folgenden wird zunächst die Grundidee der Theorie der begrifflichen Felder dargelegt, bevor ihre Anschlussfähigkeit an den inferentiellen Zugang skizziert wird.

Die Theorie der begrifflichen Felder

Bevor die der Theorie der begrifflichen Felder entspringenden Ideen für den theoretischen Rahmen dieser Arbeit adaptiert und hierin integriert werden, erfolgt zunächst eine Darstellung der wesentlichen Elemente der Theorie der begrifflichen Felder, welche für die vorliegende Arbeit von Bedeutung sind. Dazu werden im Folgenden zunächst das *Anliegen* und die *Ziele* der Theorie der begrifflichen Felder aufgeführt, bevor die Begriffe des *begrifflichen Feldes*, des *Schemas*, der *Operationalen Invarianten*, insbesondere der *Begriffe- und Theoreme-in-Aktion* wie auch des *Begriffs* skizziert werden. Diese Darstellung soll dazu dienen, in die Theorie der begrifflichen Felder *einzuführen* – eine *eingehendere* Auseinandersetzung mit den Ideen und den Begriffen Vergnauds und eine entsprechende Ausschärfung erfolgt in den sich anschließenden (Teil-)Kapiteln.

Eines der grundlegenden *Anliegen*, welches Vergnaud mit seiner Theorie verfolgt, besteht darin, das Lehren und Lernen – auch und vor allem im Fach Mathematik – weiter zu entwickeln. Dabei nimmt er einen im Wesentlichen konstruktivistischen Blickwinkel auf das Lernen ein: „Teachers cannot just ignore the fact that students’ conceptions are shaped by situations in ordinary life and by their initial understanding of new relationships. They must deal with this fact and know more about it. It is an absolute necessity for them to know what primitive conceptions look like, what errors and misunderstandings may follow, how these conceptions may change into wider and more sophisticated ones, through which situations, which explanations, which steps. It is essential for teachers to be aware that they cannot solve the problem of teaching by using more definitions, however good they may be; students’ conceptions can change

8 Vergnaud nennt seine Theorie in seinen Publikationen ‚*La théorie des champs conceptuels*‘ (Vergnaud 1996b) bzw. ‚*The theory of conceptual fields*‘ (Vergnaud 1996a) bzw. ‚*La teoría de los campos conceptuales*‘ (Vergnaud 2009a). Diese wird im Rahmen dieser Arbeit – in die deutsche Sprache übersetzt – als ‚Die Theorie der begrifflichen Felder‘ bezeichnet. Im Rahmen dieser Arbeit werden ebenso die Zitate aus dem Französischen und Spanischen zum Zwecke einer leichten Lesbarkeit der Arbeit in die deutsche Sprache übersetzt.

9 vgl. dazu Abschnitt ‚Anschlussfähigkeit an den semantischen Inferentialismus‘, s. u.

only if they conflict with situations they fail to handle. So it is essential for teachers to envisage and master the set of situations likely to oblige and help students to accommodate their views and procedures to new relationships [...] and new types of data [...]. This is the only way to make students analyse things more deeply and revise or widen their conceptions” (Vergnaud 1982a, 33). Die hier dargestellten Anliegen verfolgt Vergnaud durch die Entwicklung seiner Theorie. Dabei verfolgt er das **Ziel**, mit seiner Theorie einen theoretischen Hintergrund für die Betrachtung ‚kognitiver Kompetenzen‘ sowie auch deren Entwicklung zu schaffen: „The theory of conceptual fields aims to provide, with a few concepts and a few principles, a fruitful and comprehensive framework for studying complex cognitive competences and activities, and their development through experience and learning“ (Vergnaud 1996a, 219). Seine Theorie entwickelt er für die Betrachtung der kognitiven Entwicklung verschiedener Gegenstandsbereiche: „Die erste Frage, an die sich die Theorie der begrifflichen Felder richtet, ist die der kognitiven Entwicklung des Kindes und des Jugendlichen, welche sich sowohl im schulischen Lernen als auch im Alltag ereignet“ (Vergnaud 2009a, 15, Übers. M. S.). Dazu zählt Vergnaud unter anderem jene Lernprozesse beim *Mathematiklernen*, z. B. in den Gegenstandsbereichen der Symmetrie, der additiven Strukturen oder der elementaren Algebra, oder auch z. B. jene Lernprozesse beim Lernen in Naturwissenschaften (vgl. Vergnaud 2009a).

Die kognitive Entwicklung, die in der Theorie der begrifflichen Felder in den Blick genommen wird, wird dabei verstanden „as a network of conceptual fields being developed over a long period of time“ (Vergnaud 1996a, 225): „It [...] [is] fruitful for education to consider a synthesis of psychogenesis and learning. One way to construct such a synthesis is to consider that knowledge is organized in ‘conceptual fields,’ the mastery of which develops over a long period of time through *experience*, *maturation*, and *learning*. By conceptual field, I mean an informal and heterogeneous set of problems, situations, concepts, relationships, structures, contents, and operations of thought, connected to one another and likely to be interwoven during the process of acquisition” (Vergnaud 1982b, 39f., Einf. M.S, Hervorh. im Orig.). Das Betrachten von ‚**begrifflichen Feldern**‘, in welchen Wissen organisiert ist und welche sich im Lernprozess ausbilden, ist zentrales – und aus diesem Grunde auch namensgebendes – Element von Vergnauds Theorie.

Wesentlich für den Umgang mit Situationen und für die Lernprozesse, in denen sich begriffliche Felder ausbilden, sind **Schemata**: „Schemes are at the heart of cognition, and at the heart of the assimilation-accommodation process” (Vergnaud 1997, 27). Für eine Annäherung an die Idee des Schemas kann das Beispiel des Zählens betrachtet werden: „Counting a set is a scheme, a functional and organized sequence of rule-governed actions, a dynamic totality whose efficiency requires both sensori-motor skills and cognitive competences: cardi-

nal, exhaustion, no re-petition. [...] Many different schemes are involved in the solving of the different subclasses of additive and subtractive problems: they consist either of finding the adequate operation and the adequate data, or using a counting procedure that simulates the structure of the problem, or transforming adequately the structure of a problem into another one” (Vergnaud 1987, 47f.). Schemata ermöglichen es den Lernenden, mit verschiedenen Situationen umzugehen (Vergnaud 1996a, 222). Während Schemata für bestimmte Klassen von Situationen gelten und von den Schülerinnen in diesen Klassen von Situationen herangezogen werden, sind sie gleichzeitig das Herzstück von Adaptationsprozessen (vgl. Vergnaud 1996c, 118): Schemata können an die Gegebenheiten neuer Situationen angepasst werden.

Für den Gebrauch von Schemata in Situationen sind vor allem **Operationale Invarianten** von Bedeutung: „Operational invariants [help] to categorize information and infer from it [...] relevant goals and behavior” (Vergnaud 1996c, 114, Einf. M. S.). *Operationale Invarianten*, über welche die Schülerin verfügt, sind ausschlaggebend dafür, erstens, welche Aspekte in Situationen von der Schülerin erfasst und ausgewählt werden, d. h. auf welche Aspekte fokussiert wird, und zweitens, wie mit diesen Informationen umgegangen wird (vgl. Vergnaud 1996a, 237). „Operational invariants [...] constitute the core of an individual’s conceptual or preconceptual representation of the world, however implicit these invariants may be” (Vergnaud 1996a, 224). Sie helfen der Schülerin, mit Situationen umzugehen (vgl. Vergnaud 1997, 6), und betreffen maßgeblich den Gebrauch von Schemata und von Begriffen in Situationen. Die operationalen Invarianten bestehen aus zwei zu unterscheidenden Arten: den **Begriffe-in-Aktion** und den **Theoremen-in-Aktion**. Die Begriffe-in-Aktion haben die Funktion, in Situationen die gegebenen Informationen auszuwählen, aufzunehmen und zu kategorisieren (Vergnaud 1996a, 237): „*Concepts-in-action* are categories (objects, properties, relationships, transformations, processes, etc.) that enable the subject to cut the real world into distinct elements and aspects, and pick up the most adequate selection of information according to the situation and scheme involved” (ebd., 225, Hervorh. im Orig.). Theoreme-in-Aktion haben die Funktion, mögliche Schlüsse aus den gegebenen Informationen zu ziehen, mit den Informationen umzugehen (ebd., 237): „*A theorem-in-action* is a proposition that is held to be true by the individual subject for a certain range of the situation variables” (ebd., 225, Hervorh. im Orig.). Während Theoreme-in-Aktion wahr oder falsch sein können, sind Begriffe-in-Aktion lediglich mehr oder weniger relevant (ebd.).

Der Idee der Operationalen Invarianten kommt dabei in Vergnauds Theorie eine besondere Bedeutung zu: Denn gerade im „Vorhandensein von *Invarianten*“ (Piaget in Bringuier 2004, 75, Hervorh. M. S.), wie Vergnaud sie mit den *Operationalen Invarianten* beschreibt, liegt „das psychologische Kennzeichen“ (ebd.) von kognitiven Strukturen. Invarianten gewährleisten das situationsüber-

greifende Bestehen kognitiver Strukturen: „Invarianz bedeutet Erhaltung“ (ebd.). Im invarianten Gebrauch sieht Vergnaud eines der wesentlichen Charakteristika *Operationaler Invarianten*. Sie „lenken auf der Seite des Individuums das Wiedererkennen der einschlägigen Elemente der Situation“ (Moreira 2009, 33, Übers. M. S.) und gewährleisten, dass Schülerinnen kognitive Strukturen in unterschiedlichen Situationen aktivieren und gebrauchen können. Es wird davon ausgegangen, dass sowohl Begriffe-in-Aktion als auch Theoreme-in-Aktion invariant über Situationen hinweg sein können und dass gerade in dieser Eigenschaft ihr Nutzen und ihr Charakter liegt.

Neben ihrer Bedeutung für Schemata sind Operationale Invarianten auch für die Konzeptualisierung von **Begriffen** von Bedeutung. Letztere soll im Folgenden kurz dargestellt werden. Vergnaud (1996a, 1996b, 1997) betrachtet einen Begriff als ein Tripel aus drei Mengen:¹⁰

- S: „Die Menge der Situationen, die den Begriff brauchbar und bedeutsam machen“ (Vergnaud 1997, 6). Die Menge der Situationen bezeichnet er auch als „die Referenz“ (Vergnaud 1996b, 212).
- I: „Die Menge der operationalen Invarianten, die von den Einzelnen gebraucht werden können, um mit diesen Situationen umzugehen“ (Vergnaud 1997, 6), die auch in Schemata enthalten sind (vgl. Vergnaud 1996a, 238) und die Vergnaud auch „das Bezeichnete“ nennt (Vergnaud 1996b, 212).
- S: „Die Menge der sprachlichen und nicht-sprachlichen Formen, die es erlauben, den Begriff, seine Eigenschaften, die Situationen und die Vorgehensweisen symbolisch darzustellen“ (Vergnaud 1996b, 212, Einf. M. S.). Zu ihnen gehören gemäß Vergnaud u. a. die Sprache, symbolische Repräsentationen, Gesten, grafische Darstellungen, Diagramme, Graphen, Algebra (vgl. Vergnaud 1996a, 238; 1997, 6) und er nennt diese auch „das Bezeichnende“ (Vergnaud 1996b, 212).

Vergnaud geht davon aus, dass das Verstehen eines (mathematischen) Begriffs gerade im Verfügen über diese drei Mengen (der Situationen, der Operationalen Invarianten und der symbolischen Repräsentanten) besteht, dass weiterhin für die Analyse individueller Begriffe diese drei Aspekte immer berücksichtigt werden müssen und er betont, dass nicht nur die Operationalen Invarianten, sondern ebenso auch die Situationen und symbolischen Repräsentanten Bestandteile individueller Begriffe sind. Neben Situationen und Operationalen Invarianten als Elemente eines Begriffs stellt er als damit als weiteren Teil, der

10 Die Zitate sind an dieser Stelle zum Zwecke der Lesbarkeit *allesamt* (auch aus dem Englischen) ins Deutsche übersetzt, da sie im Original in verschiedenen Sprachen erfolgen.

Begriffe konstituiert, die Menge der *symbolischen Repräsentanten*. Dies ist anschlussfähig an viele mathematikdidaktische Theorien: David Tall (2004) misst den symbolischen Darstellungsformen für mathematische Begriffe sogar eine derartige Bedeutung bei, dass er diesen eine eigene „Welt“ zuschreibt: „the world of symbols that we use for calculation and manipulation in arithmetic, algebra, calculus and so on. These begin with actions (such as pointing and counting) that are encapsulated as concepts by using symbol[s] that allow us to switch effortlessly from processes to do mathematics to concepts to think about“ (Tall 2004, 285, teilw. hervorgeh. im Orig.). Der Umgang mit symbolischen Darstellungsformen hat gerade deshalb eine solche Bedeutung für mathematische Begriffe, als diese nicht an sich darstellbar sind und externe Repräsentationen zu ihrer Darstellung erfordern. Der Gebrauch von Symbolen – „the powerful use of symbolism in mathematics“ (Watson & Tall 2002, 369) – ist ebenso wie weitere Darstellungsformen in Form von Skizzen, Darstellungen an der Zahlengeraden, schriftsprachlichen Darstellungen etc. gerade für *mathematische* Begriffe essentiell.

Was die Theorie der begrifflichen Felder darüber hinaus auszeichnet, ist ihr Anliegen, nicht nur entwicklungspsychologische Aspekte bereitzustellen, sondern darüber hinaus auch das Lernen *bestimmter Gegenstandsbereiche* zu betrachten (vgl. Vergnaud 2009a, 15). Vergnaud gibt verschiedene Beispiele der begrifflichen Felder, die sich auf bestimmte Wissensinhalte beziehen. Er nennt u. a. die Beispiele der Arithmetik (z. B. Vergnaud 1985, 1996c), insbesondere des Zählens (z. B. Vergnaud 1992, 1996c), der additiven Strukturen (z. B. Vergnaud 1982b, 1992, 1996c, 1997) und der multiplikativen Strukturen (z. B. Vergnaud 1988, 1992, 1996a, 1997), sowie darüber hinaus die Brüche und rationalen Zahlen (z. B. Vergnaud 1983, 1988), die elementare Algebra (z. B. Vergnaud 1992, 1996c, 1997), die Proportionalität (z. B. Vergnaud 1998a), das Volumen (z. B. Vergnaud 1983) und die Symmetrie (z. B. Vergnaud 1997). Daneben führt er auch Beispiele aus anderen Disziplinen an, wie bspw. das Textverständnis (z. B. Vergnaud 1996c), verschiedene Beispiele aus der Physik, aus der Biologie, sowie die Moralerziehung, Geschichte, Geographie, Musik (vgl. Vergnaud 1996c, 1996b). Die Theorie wurde entwickelt, um auch speziell das Lernen *mathematischer Inhalte* betrachten und strukturieren zu können. In verschiedenen Untersuchungen (vgl. z. B. Escudero, Moreira & Caballero 2009, Flores, Caballero & Moreira 2008, Lin & Yang 2002, Krey & Moreira 2009) zeigte sich, dass die Theorie der begrifflichen Felder einen theoretischen Rahmen bereithält, der sich für eine Beschreibung und Analyse der Entwicklung beim mathematischen und naturwissenschaftlichen Lernen, insbesondere der Entwicklung von Begriffen, eignet.

Um einen ersten Einblick in die Theorie der begrifflichen Felder zu geben, wurden bis hierher – u. a. mit *begrifflichen Feldern*, *Schemata*, *Operationalen Invarianten*, und *Begriffen* – wesentliche Ideen und Begrifflichkeiten Vergnauds

eingeführt. Im Folgenden werden diese Ideen sukzessiv aufgegriffen und für den theoretischen Rahmen dieser Arbeit adaptiert. Im Zuge dessen werden die Ideen noch eingehender beleuchtet und ausdifferenziert.

Anschlussfähigkeit an den semantischen Inferentialismus

Die Hintergrundtheorie dieser Arbeit wird in Anlehnung an die Ideen Vergnauds weiterentwickelt. Im Gegensatz zu Brandoms inferentieller Semantik ist die Theorie der begrifflichen Felder jedoch keine philosophische, sondern eine vielmehr mathematikdidaktische, welche entwicklungspsychologisch-lerntheoretische Bezüge herstellt (vgl. Vergnaud 1982b, 39). Sie wird im Rahmen dieser Arbeit maßgeblich gebraucht, um die inferentielle Perspektive für die Analyse mathematischer Lernprozesse nutzbar zu machen. Dass eine Verbindung der Theorien Brandoms und Vergnauds möglich ist, wurde bereits in Hußmann und Schacht (2009) und Schacht (2012) herausgearbeitet. Die Verknüpfung dieser beiden Perspektiven wird im vorliegenden Kapitel dargelegt, indem die Ideen Vergnauds sukzessiv in die im vorangehenden Kapitel erläuterten theoretischen Annahmen integriert werden. An dieser Stelle werden vorab einige Gesichtspunkte skizziert, die eine Vereinbarkeit der theoretischen Ansätze veranschaulichen.

Die Theorie Vergnauds entspringt der französischen Schule der Mathematikdidaktik, in der das Handeln von Schülerinnen als wesentliches Moment im Aufbau mathematischen Wissens erachtet wird. Wissen von Schülerinnen wird immer als ‚en-acte‘ bzw. ‚in-action‘ betrachtet, ist immer mit dem Handeln der Schülerinnen verbunden, und es lässt sich nach den Annahmen der französischen Schule nicht vom Denken der Schülerinnen trennen: „The French school of mathematical didactics stresses the essential interrelationship of action and conceptualisation together with the centrality of the problem” (Noss & Hoyles 1996, 19). In diese ordnet sich Vergnauds Theorie der begrifflichen Felder ein: „Vergnaud [...] has gone so far as to define the meaning of a mathematical concept as in part derived from the set of problems to which it provides a means of solution” (ebd.). Vergnaud hebt in seiner Theorie das *Handeln* der Schülerinnen *in Situationen* als zentral für die Bildung mathematischer Begriffe hervor: Dies stellt einen viablen Anknüpfungspunkt an die Überlegungen aus inferentialistischer Perspektive dar. Denn obwohl in inferentieller Perspektive vorrangig die Sprechakte selbst – und weniger die nicht-sprachlichen Handlungen – im Fokus des Interesses stehen, sind beide theoretischen Ansätze darauf ausgerichtet, das Begriffliche im Handeln in einer situativen Praxis zu betrachten.

Ein weiterer wesentlicher Aspekt, der die Theorie der begrifflichen Felder mit den bisherigen Überlegungen verbindet, liegt in den *Strukturen*, in denen nach Vergnaud Wissen bzw. Begriffe existieren. Er betont, dass Begriffe nie isoliert stehen, sondern immer in Netzen strukturiert sind und hebt u. a. die

Bedeutung von *Theoremen-in-Aktion* als Propositionen bzw. Aussagen, die individuell für wahr gehalten werden, hervor (vgl. Vergnaud 1996a, 225). Diese sind in gewisser Hinsicht anschlussfähig an Urteile bzw. Behauptungen im inferentiellen Zugang (vgl. Kap. 2.1.2). Diese und weitere Anknüpfungspunkte werden im weiteren Verlauf des Kapitels an entsprechender Stelle dargestellt.

Dass Anknüpfungspunkte zwischen der entwicklungspsychologischen Lerntheorie Vergnauds und der inferentiellen Semantik existieren, steht in Zusammenhang mit ihren teils gemeinsamen philosophischen Anleihen. Mit dem Zugang, sowohl das Denken als auch das Handeln in Urteilen zu betrachten, nimmt *Brandom* in seiner Theorie eine wesentliche Idee *Kants* auf. Auch *Vergnaud* bezieht sich auf Kant, indem er die Idee des Schemas von Piaget aufgreift, welche dieser wiederum von Kant übernommen hatte (vgl. Vergnaud 1992, 301). *Kants* Entwicklung eines Schema-Begriffs geht mit Annahmen über Urteile und Begriffe einher – wird das Schema doch als „Function der Urtheilskraft“ (Kant 1999, 305) bzw. „Bedingung der Urtheilskraft“ (ebd.) betrachtet; die Annahmen, die Kant über Urteile trifft, haben Einfluss auf den Schema-Begriff bei Piaget und auch bei Vergnaud. Vergnaud selbst führt seine erkenntnistheoretischen Anleihen – im Gegensatz zu den psychologischen – nicht umfänglich aus; sie sind jedoch in vielen Aspekten seiner Theorie erkennbar (z. B. „Die Gliederung dieser Prozesse ist begrifflich, und nicht logisch“ (Vergnaud 2009a, 16, Übers. M. S.).

2.1 Inferentielle Netze

Im Folgenden wird die Hintergrundtheorie dieser Arbeit, im Speziellen das Konzept der Festlegungsstrukturen, unter psychologischem Blickwinkel weiterentwickelt. In diesem Zusammenhang bietet vor allem das Konzept der *operationalen Invarianten* (s. o.) als wesentlicher Pfeiler der Theorie der begrifflichen Felder (vgl. Vergnaud 1996b, 207) eine geeignete Basis zur Erweiterung der inferentialistischen Annahmen. „Operational invariants underlying behaviour are the essential source of concepts“ (Vergnaud 1997, 13).

In der Theorie der begrifflichen Felder tragen die operationalen Invarianten gezielt den Zusatz Begriffe- bzw. Theoreme-in-Aktion, da „weder ein Begriff-in-Aktion ganz genau ein Begriff ist, noch ein Theorem-in-Aktion ein Theorem. In der Wissenschaft sind Begriffe und Theoreme explizit und man kann über ihre Relevanz und Wahrheit diskutieren. Dies ist nicht notwendigerweise der Fall für operationale Invarianten. Explizite Begriffe und Theoreme stellen nur den sichtbaren Teil des Eisbergs der Begriffsbildung dar: ohne den verborgenen Teil, der durch die operationalen Invarianten konstituiert ist, wäre dieser sichtbare Teil nichts“ (Vergnaud 1996b, 211, Übers. M. S.). In den Annahmen über die verschiedenen Status bzgl. der Explizitheit, die operationale Invarianten einnehmen können, lassen sich *Parallelen* zu den Annahmen *Brandoms* ziehen.

Während Brandom (Brandom 2001a, 28) festhält: „Das, was ausgedrückt wird, tritt in zweierlei Gestalt auf: als das Implizite (lediglich potentiell Ausdrückbares) und als das Explizite (das tatsächlich Ausgedrückte)“ (vgl. Kap. 1.3), stellt Vergnaud (Vergnaud 1988, 141) dar: „Students’ knowledge may be explicit, in the sense that they can express it in a symbolic form (natural language, [...] etc.). Their knowledge may also be implicit, in the sense that they can use it in action, by choosing adequate operations, without being able to express the reasons for this adequacy“. Operationale Invarianten in Form von Begriffen-in-Aktion und Theoremen-in-Aktion können – genau wie Urteile – sowohl den Status der Implizitheit als auch der Explizitheit haben (vgl. Zazkis & Liljedahl 2002, 100). Sie sind hinsichtlich ihres Status bzgl. der Explizitheit nicht festgelegt: „Theorems-in-action are ‚held to be true propositions’, even though they may be totally implicit, partially true, or even false“ (Vergnaud 1997, 14). Vergnaud gibt ihnen aufgrund der Annahme, dass sie vorwiegend implizit bleiben, die Bezeichnung Theoreme- und Begriffe-*in-Aktion* (Vergnaud 1992, 302) und geht davon aus, dass Operationale Invarianten ihren Status ändern, wenn sie expliziert werden: “The cognitive status of operational invariants is not the same when they are expressed: they are more easily identified and they are somehow shared by the community. They become cultural“ (Vergnaud 1996c, 118). Sie werden der Diskussion zur Verfügung gestellt (vgl. Vergnaud 1998b, 231, vgl. auch Moreira 2002, 12). In sprachphilosophischer Perspektive wird entsprechend davon ausgegangen, dass Urteile in Form von Behauptungen expliziert werden, welche in der sozialen Sprachpraxis einen deontischen Status einnehmen. Vergnaud stellt darüber hinaus – ebenso wie Brandom (vgl. Kap. 1.3) – fest, dass das Explizieren schwierig sei, merkt aber aus lerntheoretischer Perspektive an, dass es für den Lernprozess lohnens- und erstrebenswert sei, denn „explicit concepts and theorems enable students to objectify their knowledge and discuss its appropriateness and validity“ (Vergnaud 1997, 28).

Auch wenn sich hinsichtlich der Betrachtungen der Explizitheit von Urteilen und Operationalen Invarianten die aufgeführten Parallelen zwischen den Annahmen Brandoms und Vergnauds ziehen lassen, so steht in den beiden theoretischen Blickwinkeln Unterschiedliches im Zentrum der Betrachtungen: Während in sprachphilosophischer Perspektive ein Fokus auf die Sprachpraxis und die in ihr vorgebrachten, expliziten Festlegungen liegt, betrachtet Vergnaud die Operationalen Invarianten, welche in explizierter Form lediglich die ‚*Spitze des Eisbergs*‘ (vgl. Vergnaud 1996b, 211, Moreira 2002, 12) darstellen und ebenso implizit sein können.

Mit der Sichtweise Vergnauds wandelt sich die Perspektive, die im Rahmen dieser Arbeit auf individuelle Begriffe eingenommen wird: In Anlehnung an Vergnauds Idee der Operationalen Invarianten werden *inferentielle Netze* in den Blick genommen, die – im Unterschied zu Festlegungsstrukturen – nicht nur aus *explizierten* Festlegungen und Inferenzen bestehen, sondern auch aus jenem

großen Teil des Eisbergs, der *nicht* sichtbar ist: den Urteilen unabhängig von ihrem Status der Explizitheit. Damit wird der Begriff der Festlegungsstrukturen modifiziert und an eine psychologisch orientierte Sichtweise adaptiert. Sprachspiele stellen dabei die epistemologische Basis dar, da die in ihnen vorgebrachten Festlegungen und inferentiellen Relationen für eine Analyse der Strukturen von Urteilen von Schülerinnen grundlegend sind.

Während aus inferentieller Perspektive *Festlegungsstrukturen* als Strukturen aus Festlegungen und Inferenzen im Blickpunkt standen (vgl. Kap. 1.11), stehen im Folgenden *inferentielle Netze* im Fokus der Betrachtung:

*Inferentielle Netze von Schülerinnen sind individuelle Strukturen aus Urteilen, die durch inferentielle Relationen zwischen Urteilen gegliedert sind. Das Verständnis eines **Begriffs** zeigt sich in den individuell verfügbaren inferentiellen Netzen.*

Im Folgenden wird der theoretische Rahmen in Anlehnung daran ausdifferenziert.

2.2 Die Entwicklung inferentieller Netze – in lokaler Perspektive

Nachdem vorangehend das Verständnis eines Begriffs als das Verfügen über inferentielle Netze konzeptualisiert wurde, wird nachfolgend der Begriff ‚*Begriffsbildung*‘ bestimmt. Da die Begriffsbildung wesentlich die Entwicklung von Begriffen betrifft, sind hierfür die getroffenen Annahmen zum Verständnis eines Begriffs grundlegend. Da das Verständnis eines Begriffs als das Verfügen über inferentielle Netze dargestellt wurde, wird in Anlehnung an Schacht (2012, 43) festgehalten:

***Begriffsbildung** lässt sich beschreiben als die Entwicklung der inferentiellen Netze, in denen der Begriff eine Rolle spielt.*

Die Festlegung Schachts, Begriffsbildung *sei* jene Entwicklung der inferentiellen Netze (vgl. ebd.) wird in der vorliegenden Arbeit relativiert, da nicht ausgeschlossen werden kann, dass über die Entwicklung von inferentiellen Netzen hinaus weitere Aspekte beim Begriffsbildungsprozess Einfluss nehmen, oder dass es auch weitere Elemente gibt, die sich im Zuge eines Begriffsbildungsprozesses entwickeln – wie etwa eine Fähigkeit, Darstellungsformen zu wechseln (vgl. Duval 2006, 107).

Im Folgenden wird Begriffsbildung zunächst in lokaler Perspektive – als Entwicklung einzelner Elemente inferentieller Netze – theoretisch beleuchtet. Eine Entwicklung in globaler Perspektive, welche Auswirkungen auf die Ge-



<http://www.springer.com/978-3-658-04374-2>

Auf dem Weg zum Begriff der negativen Zahl
Empirische Studie zur Ordnungsrelation für ganze
Zahlen aus inferentieller Perspektive

Schindler, M.

2014, XI, 351 S., Softcover

ISBN: 978-3-658-04374-2