

2.1 Orthogonale Systeme von Polynomen

Von den Vektoren im $\mathbb{R}^3$ gehen wir über zu einem allgemeinen Vektorraum $\mathbb{V}$ mit dem Skalarenkörper $\mathbb{R}$. Die Elemente des Vektorraums bezeichnet man als Vektoren, wenn die Rechenregeln aus dem $\mathbb{R}^3$ weiter gelten. Vektoren können addiert werden. Es gibt einen Nullvektor und einen inversen Vektor bezüglich der Addition. Vektoren können mit Skalaren multipliziert werden. Addition und Multiplikation mit Skalaren unterliegen den folgenden Regeln.

Definition: Vektorraum

Für Vektoren $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ und Skalare α, β gilt:

$$\begin{aligned}\underline{x} + \underline{y} &= \underline{y} + \underline{x}, \\ (\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} &= \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z}), \\ \underline{x} + \underline{0} &= \underline{x}, \\ \underline{x} + (-\underline{x}) &= \underline{0}, \\ (\alpha + \beta) \underline{x} &= \alpha \underline{x} + \beta \underline{x}, \\ \alpha (\underline{x} + \underline{y}) &= \alpha \underline{x} + \alpha \underline{y}, \\ \alpha (\beta \underline{x}) &= (\alpha \beta) \underline{x} = \alpha \beta \underline{x}.\end{aligned}$$

Beispiel 2.1

Die stetigen Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stellen einen Vektorraum dar. Funktionen können addiert und mit Skalaren multipliziert werden. Sind f und g stetig, dann ist auch $\alpha f + \beta g$ stetig. Wir haben die Nullfunktion $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$, und die Regeln eines Vektorraums werden erfüllt.

Beispiel 2.2

Die Polynome höchstens n -ten Grades $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) stellen einen Vektorraum dar.

Ein beliebiges Polynom:

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j x^j$$

wird erzeugt von den Polynomen $1, x, \dots, x^n$. Für den Raum der Polynome höchstens n -ten Grades schreiben wir

$$\langle 1, x, x^2, \dots, x^n \rangle.$$

Die Polynome $1, x, \dots, x^n$ sind linear unabhängig. Gilt $\sum_{j=0}^n \alpha_j x^j = 0$ für alle x , so folgt $\alpha_j = 0$ für $j = 0, 1, \dots, n$.

Ein Skalarprodukt ordnet je zwei Vektoren $\underline{x}$ und $\underline{y}$ eine Zahl $(\underline{x}, \underline{y})$ aus $\mathbb{R}$ zu. Skalarprodukte besitzen folgende Eigenschaften.

Definition: Skalarprodukt

Für Vektoren $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ und Skalare α gilt:

$$\begin{aligned} (\underline{x}, \underline{x}) &\geq 0, \quad (\underline{x}, \underline{x}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}, \\ (\underline{x}, \underline{y}) &= (\underline{y}, \underline{x}), \\ (\underline{x} + \underline{y}, \underline{z}) &= (\underline{x}, \underline{z}) + (\underline{y}, \underline{z}), \\ (\alpha \underline{x}, \underline{y}) &= \alpha (\underline{x}, \underline{y}). \end{aligned}$$

Im $\mathbb{R}^3$ ergibt sich das Skalarprodukt geometrisch:

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \|\underline{x}\| \|\underline{y}\| \cos(\varphi),$$

bzw.

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} \sqrt{\underline{y} \cdot \underline{y}} \cos(\varphi).$$

Hieraus folgt sich die Abschätzung:

$$|\underline{x} \cdot \underline{y}| \leq \|\underline{x}\| \|\underline{y}\| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} \sqrt{\underline{y} \cdot \underline{y}}.$$

Diese Ungleichung kann in beliebige Vektorräume mit Skalarprodukt übertragen werden.

Satz: Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

In einem Vektorraum mit Skalarprodukt gilt für alle Vektoren $\underline{x}, \underline{y}$, die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$|(\underline{x}, \underline{y})| \leq \sqrt{(\underline{x}, \underline{x})} \sqrt{(\underline{y}, \underline{y})}.$$

Wie im $\mathbb{R}^3$ können wir in einem Vektorraum mit einem Skalarprodukt die Länge eines Vektors

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{(\underline{x}, \underline{x})}$$

und den Abstand zweier Vektoren

$$\|\underline{x} - \underline{y}\| = \sqrt{(\underline{x} - \underline{y}, \underline{x} - \underline{y})}$$

eingeführen.

Satz: Länge von Vektoren

Die Länge besitzt folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \|\alpha \underline{x}\| &= |\alpha| \|\underline{x}\|, \\ \|\underline{x} + \underline{y}\| &\leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|. \end{aligned}$$

(Dreiecksungleichung).

Wegen $(\alpha \underline{x}, \underline{y}) = (\underline{x}, \alpha \underline{y}) = \alpha (\underline{x}, \underline{y})$ verschwindet das Skalarprodukt wieder, wenn einer der beteiligten Vektoren der Nullvektor ist. Gilt $\underline{x} \neq \underline{0}$ und $\underline{y} \neq \underline{0}$ und $(\underline{x}, \underline{y}) = 0$, dann bezeichnen wir die Vektoren als orthogonal. Zwei Vektoren $\underline{x}, \underline{y}$ eines allgemeinen Vektorraums $\mathbb{V}$ stehen senkrecht aufeinander (sind orthogonal), wenn ihr Skalarprodukt verschwindet: $(\underline{x}, \underline{y}) = 0$.

Wir betrachten den Raum der auf einem Intervall stetigen Funktionen und führen Skalarprodukte ein.

Satz: Belegungsfunktion und Skalarprodukt

Sei $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Funktion p besitze höchstens isolierte Nullstellen, und es gelte $p(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Zur Belegungsfunktion p wird ein Skalarprodukt auf dem Raum der auf $[a, b]$ stetigen, reellwertigen Funktionen erklärt durch:

$$(f, g) = \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx.$$

Offenbar liegt ein Skalarprodukt vor. Mit der Stetigkeit und den Voraussetzungen an p ergibt sich zunächst

$$\int_a^b p(x) (f(x))^2 dx = 0 \iff p(x) (f(x))^2 = 0 \text{ für alle } x$$

und damit $f(x) = 0$ für alle x , also:

$$(f, f) = 0 \iff f(x) = 0, x \in [a, b].$$

Die Bilinearität des Skalarprodukts bekommen wir aus der Linearität des Integrals.

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung besagt nun:

$$\left| \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b p(x) (f(x))^2 dx} \sqrt{\int_a^b p(x) (g(x))^2 dx}.$$

Wir gehen vom Raum der stetigen Funktionen auf den Raum der Polynome über. Als Belegungsfunktionen lassen wir auch Funktionen zu, die lediglich im offenen Intervall (a, b) stetig sind. Schließlich geben wir noch die Voraussetzung des beschränkten Intervalls auf. Wenn wir uneigentlich integrieren, müssen wir die Existenz der folgenden Integrale nachweisen:

$$\int_a^b p(x) x^{2k} dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert dann

$$\left| \int_a^b p(x) x^k x^k dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b p(x) x^{2k} dx} \sqrt{\int_a^b p(x) x^{2k} dx}.$$

Damit ist die Existenz der Integrale $\int_a^b p(x) f(x) g(x) dx$ für alle Polynome f gesichert.

Systeme von Vektoren, die paarweise senkrecht aufeinander stehen, bezeichnet man als Orthogonalsysteme. Besteht ein Orthogonalsystem aus lauter Einheitsvektoren, dann spricht man von einem Orthonormalsystem. Man kann in jedem Vektorraum Orthonormalsysteme herstellen, indem man von linear unabhängigen Vektoren ausgeht und der Reihe nach Projektionsvektoren bildet. Wir schildern kurz das Orthonormalisierungsverfahren von Hilbert-Schmidt. Man beginnt mit dem Basisvektor $\underline{b}_1$ und normiert ihn zu $\underline{e}_1$. Dann berechnet man die Projektion des zweiten Basisvektors in den von $\underline{e}_1$ aufgespannten Unterraum $\mathbb{U}_1$. Der Differenzvektor steht senkrecht auf $\mathbb{U}_1$ und wird normiert zu $\underline{e}_2$. Nun berechnet man die Projektion des dritten Basisvektors in den von $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ aufgespannten Unterraum $\mathbb{U}_2$. Der Differenzvektor steht wieder senkrecht auf $\mathbb{U}_2$ und wird normiert zu $\underline{e}_3$. Setzt man das Verfahren fort, so ergibt sich schließlich ein Orthonormalsystem.

Nach Konstruktion des Orthonormalsystems folgt:

$$\langle \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k \rangle = \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k \rangle \text{ für alle } k = 1, \dots, n.$$

Hieraus ergibt sich $(\underline{e}_k, \underline{b}_l) = 0$ für alle $l = 1, \dots, k-1, k = 2, \dots, n$. Ist $\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_k$ ein Orthogonalsystem mit der Eigenschaft: $\langle \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k \rangle = \langle \underline{q}_1, \dots, \underline{q}_k \rangle$ für alle $k = 1, \dots, n$, dann gilt:

$$\underline{q}_k = \alpha_k \underline{e}_k \text{ für alle } k = 1, \dots, n,$$

mit $\alpha_k \neq 0$. Man bekommt dies sofort aus der Eigenschaft:

$$(\underline{q}_k, \underline{b}_l) = 0 \text{ für alle } l = 1, \dots, k-1, k = 2, \dots, n.$$

Satz: Orthonormalisierungsverfahren von Hilbert-Schmidt

Sei $\mathbb{V}$ ein Vektorraum. Sei $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ ein System linear unabhängiger Vektoren, die den Unterraum $\mathbb{U}$ erzeugen:

$$\mathbb{U} = \langle \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n \rangle.$$

Wir berechnen Vektoren $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ nach dem folgenden Verfahren:

$$\begin{aligned} \underline{e}_1 &= \frac{1}{\|\underline{b}_1\|} \underline{b}_1, \\ \tilde{\underline{b}}_{l+1} &= \underline{b}_{l+1} - \sum_{k=1}^l (\underline{b}_{l+1}, \underline{e}_k) \underline{e}_k, \\ \underline{e}_{l+1} &= \frac{1}{\|\tilde{\underline{b}}_{l+1}\|} \tilde{\underline{b}}_{l+1}. \end{aligned}$$

Dann bilden die Vektoren $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ ein Orthonormalsystem und es gilt

$$\mathbb{U} = \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n \rangle.$$

Beispiel 2.3

Wir betrachten den Raum der Polynome im Intervall $[-1, 1]$ mit dem Skalarprodukt:

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx.$$

Wir gehen aus von den Polynomen $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2, f_4(x) = x^3$, und berechnen ein Orthonormalsystem.

Es gilt

$$(f_1, f_1) = \int_{-1}^1 dx = 2$$

und wir bekommen:

$$e_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Durch Projektion berechnen wir:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_2(x) &= f_2(x) - (f_2, e_1) e_1(x) \\ &= x - \left(\int_{-1}^1 x \frac{1}{\sqrt{2}} dx \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= x.\end{aligned}$$

Normiert man, so ergibt sich:

$$e_2(x) = \frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^1 x^2 dx}} = \sqrt{\frac{3}{2}} x.$$

Wir berechnen durch Projektion:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_3(x) &= f_3(x) - (f_3, e_1) e_1(x) - (f_3, e_2) e_2(x) \\ &= x^2 - \left(\int_{-1}^1 x^2 \frac{1}{\sqrt{2}} dx \right) \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{\frac{3}{2}} x dx \right) \sqrt{\frac{3}{2}} x \\ &= x^2 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx \\ &= x^2 - \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Normiert man nun, so ergibt sich:

$$e_3(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx}} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{8}} (3x^2 - 1).$$

Wir berechnen schließlich durch Projektion:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_4(x) &= f_4(x) - (f_4, e_1) e_1(x) - (f_4, e_2) e_2(x) - (f_4, e_3) e_3(x) \\ &= x^3 - \left(\int_{-1}^1 x^3 \frac{1}{\sqrt{2}} dx \right) \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\int_{-1}^1 x^3 \sqrt{\frac{3}{2}} x dx \right) \sqrt{\frac{3}{2}} x \\ &\quad - \left(\int_{-1}^1 x^3 \sqrt{\frac{5}{8}} (3x^2 - 1) dx \right) \sqrt{\frac{5}{8}} (3x^2 - 1) \\ &= x^3 - \frac{3}{2} \left(\int_{-1}^1 x^4 dx \right) x \\ &= x^3 - \frac{3}{5} x.\end{aligned}$$

Normiert man wieder, so ergibt sich:

$$e_4(x) = \frac{x^3 - \frac{3}{5}x}{\sqrt{\int_{-1}^1 \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)^2 dx}} = \frac{5\sqrt{7}}{2} \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) = \sqrt{\frac{7}{4}} (5x^3 - 3x).$$

Nach Wahl einer Belegungsfunktion orthogonalisieren wir die Monome $1, x, x^2, x^3, \dots$ nach dem Hilbert-Schmidt-Verfahren in der gegebenen Reihenfolge und erhalten ein Orthonormalsystem von Polynomen $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$:

$$\langle 1, x, x^2, \dots, x^k \rangle = \langle \psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_k(x) \rangle \text{ für alle } k = 0, 1, 2, \dots$$

Ist $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ ein Orthogonalsystem von Polynomen mit

$$\langle 1, x, x^2, \dots, x^k \rangle = \langle \varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x) \rangle \text{ für alle } k = 0, 1, 2, \dots,$$

so gilt $\varphi_k(x) = \alpha_k \psi_k(x)$ mit Konstanten $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Gilt $\alpha_k \neq 0$, so liegt wieder ein Orthonormalsystem vor. Ein System stellt genau dann ein Orthogonalsystem dar, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$(\varphi_k(x), x^l) = 0 \quad l = 0, \dots, k-1, k = 1, 2, \dots$$

Satz: Nullstellen orthogonaler Polynomsysteme

Das auf einem Intervall bis auf Normierung eindeutig gegebene System orthogonaler Polynome hat folgende Eigenschaft: Die n Nullstellen von φ_n sind alle reell, einfach und liegen im Grundintervall (a, b) .

Die Polynome des Orthogonalsystems schreiben wir:

$$\varphi_n(x) = \sum_{v=0}^n a_v^{(n)} x^v, \quad a_n^{(n)} \neq 0.$$

Das Polynom φ_n besitzt nach dem Fundamentalsatz n Wurzeln in $\mathbb{C}$:

$$x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)},$$

und kann faktorisiert werden:

$$\varphi_n(x) = a_n^{(n)} (x - x_1^{(n)}) (x - x_2^{(n)}) \cdots (x - x_n^{(n)}), \quad a_n^{(n)} \neq 0.$$

Die Orthogonalität $(\varphi_0, \varphi_n) = 0, n = 1, 2, \dots$, liefert:

$$\frac{1}{a_0^{(0)} a_n^{(n)}} (\varphi_0, \varphi_n) = \int_a^b p(x) (x - x_1^{(n)}) \cdots (x - x_n^{(n)}) dx = 0.$$

Der Integrand $p(x) (x - x_1^{(n)}) \cdots (x - x_n^{(n)})$ ist auf (a, b) stetig, und besitzt höchstens isolierte Nullstellen. Da $p(x) \geq 0$ höchstens isolierte Nullstellen besitzt, muss φ_n das Vorzeichen in (a, b) wechseln. Also muss φ_n mindestens eine Nullstelle ungerader Vielfachheit im offenen Intervall (a, b) besitzen. Wir bilden die Menge M aller Nullstellen ungerader Vielfachheit in (a, b) , und nehmen jede Nullstelle nur einmal auf: $M = \{x_1, \dots, x_k\}$. Wir nehmen an, die Anzahl der Nullstellen sei kleiner als der Grad von φ_n : $k < n$. Damit besitzt das Polynom

$$\prod_{l=1}^k (x - x_l)$$

einen Grad, der kleiner als n ist, und es gilt:

$$\left(\varphi_n(x), \prod_{l=1}^k (x - x_l) \right) = 0.$$

Andererseits hat das Polynom

$$\varphi_n(x) \prod_{l=1}^k (x - x_k)$$

nur Nullstellen von gerader Vielfachheit. Damit bekommen wir:

$$\left(\varphi_n(x), \prod_{l=1}^k (x - x_l) \right) = \int_a^b p(x) \varphi_n(x) \prod_{l=1}^k (x - x_l) dx \neq 0.$$

Die Annahme führt also zum Widerspruch. Es gilt $k = n$, und damit sind die Behauptungen bewiesen.

Wir betrachten nun folgende Grundintervalle und Belegungsfunktionen:

1. $[-1, 1] \quad p(x) = 1,$
2. $[-1, 1] \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
3. $[0, \infty] \quad p(x) = e^{-x},$
4. $[-\infty, \infty] \quad p(x) = e^{-x^2}.$

Mit dem Hilbert-Schmidt-Verfahren bilden wir jeweils Orthonormalbasen der Polynomräume $\langle 1, x, \dots, x^n \rangle$. Damit werden wir auf folgende Systeme orthonormaler Polynome geführt:

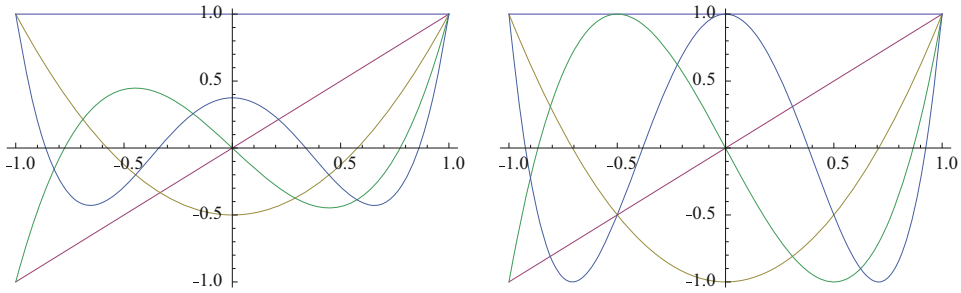


Abb. 2.1 Die ersten fünf Legendre-Polynome (*links*), Tschebyscheff-Polynome (*rechts*)

1. die Legendre-Polynome P_n ,
2. die Tschebyscheff-Polynome L_n .
3. die Laguerre-Polynome L_n ,
4. die Hermite-Polynome H_n ,

Wir müssen noch nachweisen, dass wir mit den Belegungsfunktionen aus 1.–4. tatsächlich Skalarprodukte auf den Polynomräumen über den jeweiligen Grundintervallen erklären. Der Fall 1 ist klar. Im Fall 2 entnimmt man die Existenz des Integrals $\int_a^b p(x) x^{2k} dx$ aus der Umformung:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^\pi \frac{(-\cos(t))^{2k}}{\sqrt{1-(-\cos(t))^2}} \sin(t) dt \\ &= \int_0^\pi (\cos(t))^{2k} dt. \end{aligned}$$

Im Fall 3 wählen wir ein x_0 , sodass für $x > x_0$ gilt: $e^{\frac{x}{2}} > x^{2k}$ und schreiben:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{2k} dx \leq \int_0^{x_0} e^{-x} x^{2k} dx + \int_{x_0}^\infty e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

Beide Integrale auf der rechten Seite existieren. Im Fall 4 gehen wir von der Existenz der Integrale $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$ und $\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ aus. Wir wählen analog ein x_0 , sodass für $|x| > x_0$ gilt: $e^{\frac{x^2}{2}} > x^{2k}$ und schreiben:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} x^{2k} dx \leq \int_{-\infty}^{-x_0} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{-x_0}^{x_0} e^{-x^2} x^{2k} dx + \int_{x_0}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Wieder existieren die Integrale auf der rechten Seite (Abb. 2.1, 2.2).

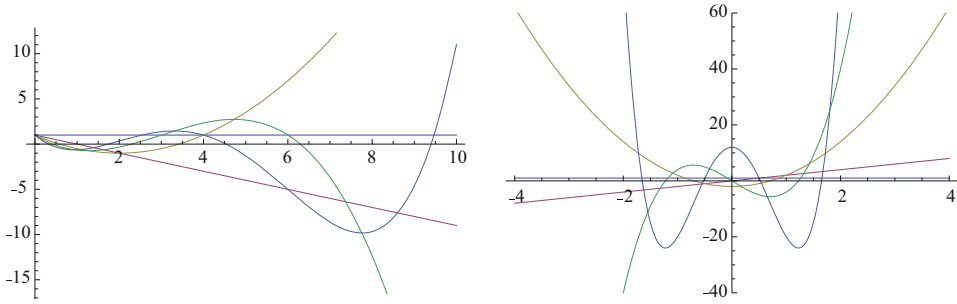


Abb. 2.2 Die ersten fünf Laguerre-Polynome (links), Hermite-Polynome (rechts)

2.2 Die Legendre-Polynome

Wir orthonormalisieren die Monome $1, x, x^2, \dots$, nach dem Hilbert-Schmidt-Verfahren mit der Belegungsfunktion $p(x) = 1$. Wir bekommen das Orthonormalsystem:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x, \quad \varphi_3(x) = \sqrt{\frac{5}{8}} (3x^2 - 1), \dots$$

Es gilt:

$$\int_{-1}^1 \varphi_n(x) x^k dx = 0 \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1.$$

Die Legendre-Polynome stimmen bis auf Normierung mit den Polynomen φ_n überein. Das Orthonormalisierungsverfahren geht rekursiv vor und kann keine explizite Darstellung orthogonaler Polynomsysteme liefern.

Ein anderer Zugang zu den Legendre-Polynomen führt über die erzeugende Funktion. Wir betrachten einen Punkt $(0, 0, \tilde{r})$ auf der z -Achse. Von einer Masse in diesem Punkt geht ein Gravitationspotenzial aus. Das Potenzial in einem beliebigen Punkt (x, y, z) ist umgekehrt proportional zum Abstand von $(0, 0, \tilde{r})$ (Abb. 2.3):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \tilde{r})^2}}.$$

Mit den Variablen:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z = r \cos(\vartheta), \quad \vartheta \in [0, \pi],$$

formen wir um:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \tilde{r}^2 - 2r\tilde{r}\cos(\vartheta)}}.$$

Ausgewählte Kapitel der Höheren Mathematik
Vektoranalysis, Spezielle Funktionen, Partielle
Differentialgleichungen

Strampp, W.

2014, VII, 305 S. 271 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-05549-3