

Zwölf Monate waren vergangen. Man schrieb das Jahr OOOHHHHIII. Eddi war in den Stamm aufgenommen worden. Dem natürlichen Trieb des Menschen (besser: des Mannes) folgend hatte er sich eine neue Frau gesucht und eine zweite noch dazu. Er hatte auch sein Wissen und damit die Überlebenschancen der Menschheit erweitert. „Fortschritt“ ist das Prinzip der Evolution – nicht stehen bleiben, vorwärts schreiten! Auch einen wissbegierigen, aber mehr dem Praktischen zugetanen Freund hatte er gefunden: Rudi Radlos, der sich gerne mit Zeichnungen und den Phänomenen der Natur beschäftigte.

Natürlich konnten die Mitglieder des Stammes zählen, ohne das Konzept der „Zahl“ schon richtig zu kennen. Sie wussten auch, dass Mengen an die zugehörigen Dinge gebunden waren. Zehn Ziegen waren dasselbe wie zwei Frauen. Eddis Hauptfrau fand diese Gleichsetzung ziemlich unpassend, aber Siggis Spökenkieker sagte ihm voraus, dass es viel später ein allgemein anerkanntes Buch geben würde (er musste ihm dazu erklären, was ein „Buch“ ist), in dem Vieh, Sklaven und Frauen zum „Besitz“ eines Mannes gehörten und somit ganz offenkundig denselben Stellenwert besitzen.¹ Zählen gehörte aber zu dieser Zeit zum Überleben, jeder konnte es: Wenn man vier Bären in einer Höhle verschwinden sieht und drei wieder herauskommen, dann sollte man bei der Wohnungsbesichtigung vorsichtig sein!

Eddi hatte inzwischen auch den Kalender und dessen merkwürdiges System – Haufen von 5 Jahren und Bündel von 7 mal 5 Jahren – umgebaut und auf die Basis 10 gestellt. Damit war Zählen nun einfach: Mit seinen zehn Fingern konnte er seine zehn Ziegen leicht erfassen. Als er fünf weitere Ziegen (im Tausch gegen seine

¹ Gemeint ist *das* Buch, die Bibel: Die Zehn Gebote (2. Buch Mose, Kap. 20, Verse 1 bis 17), dort Vers 17: „Begehre nicht, was deinem Mitmenschen gehört: weder sein Haus noch seine Frau, seinen Knecht oder seine Magd, Rinder oder Esel oder irgend etwas anderes, was ihm gehört.“ Quelle: <http://gott.net/784.html>.

Nebenfrau²) hinzubekam, merkte er sich den Neubeginn des Zählvorganges mit den beiden Händen durch das Zeichen „X“ (um die beiden Hände anzudeuten) an der Höhlenwand. Die natürlichen Zahlen eins, zwei, drei, vier, fünf usw. waren für ihn also ganz natürlich. Dieser Zuwachs an Vierbeinern auf der Weide hatte auch sein Gutes: Eine Nebenhöhle wurde frei und er hatte ein Studierzimmer, an dessen Wänden er sich Notizen machte – die den Archäologen 10.000 Jahre später zu interessanten Erkenntnissen verhelfen sollten.

Mit zehn Fingern zählen konnten inzwischen alle... na ja, *fast* alle. Einem Mitglied der Gruppe hatte ein Bär zwei Finger abgebissen. Auch er malte das Zeichen „X“ an die Wand, aber bei ihm bedeutete es „acht“ und nicht „zehn“. Also war bei ihm „XII“ zehn und nicht „zwölf“ wie bei den anderen. Er nannte es „Oktalsystem“ – was aber keiner verstand. *Makaber*, dachte Eddi und beschloss, darüber nachzudenken, ob es nicht andere Zahlensysteme als mit der Basis 10 geben könnte.

Da dieses ständige Zählen langsam überhand nahm und die Leute von der Arbeit abhielt, erklärte sich Eddi bereit, der Buchhalter der Gruppe zu werden. Was das war, wusste er zwar nicht – Siggi hatte dieses Wort nach einem Blick in die Zukunft vorgeschlagen –, aber seine Aufgabe war klar: alles zählen, was einem unter die Augen kam. Abrechnungen für Brot und Bier, Vieh und Getreide, sogar Hütten und Menschen. Und irgendwann fiel es ihm wie Schuppen von den Augen: Die Zähl- und Rechengvorgänge waren immer dieselben, egal ob es sich um Brotlaibe, Schweine oder Verwandte handelte. Drei war drei und drei weniger zwei war eins. Zahl war Zahl, nichts Konkretes mehr, das man anfassen konnte – ein abstraktes Gebilde, nur in seinem Kopf existent. Und sie stand als schriftliche Abbildung auf der Höhlenwand – was leider aber ziemlich doof aussah: „XXXXXXXXXIIIIII“ für „siebenundachtzig“ (oder „achtzigundsieben“, wie man damals sagte). So konnte es nicht weitergehen – Siggi musste her. „Das gefällt mir schon gut! Du machst wirklich deutliche Fortschritte!“, sagte er anerkennend, „Vere Gordon Childe wird es später die ‚Neolithische Revolution‘ nennen.“³ Eddis verständnislosen Blick ignorierte er.

Nach einer Nacht in Trance, unterstützt durch ein neuartiges Getränk aus vergorenem Getreide, kam Siggi mit rotgeränderten Augen angeschlurft und murmel-

² Anmerkung für meine Leserinnen: Diese und andere politisch unkorrekte Formulierungen sind nicht diskriminierend gemeint, sondern deuten an, dass von damals bis (fast) heute der Mann die „Herrschaft“ inne hatte – wie hinterfragenswert das auch immer sein mag.

³ Als Neolithische Revolution wird von einigen Wissenschaftlern das Aufkommen produzierender Wirtschaftsweisen (Ackerbau und Viehzucht) und die neu eingeführte Vorratshaltung im Neolithikum (Jungsteinzeit) bezeichnet. Mit dieser Epoche verbunden war die Aufgabe einer nomadischen Lebensweise und die Anlage fester Siedlungsplätze. Der Begriff wurde von Vere Gordon Childe geprägt. Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Neolithische_Revolution.

<i>Europäisch</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Arabisch-indisch</i>	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩

Abb. 2.1 Europäische und arabisch-indische Ziffern

te mit letzter Kraft: „Indisch-arabische oder europäische Ziffern, also eine Zahl-schrift auf der Grundlage eines Dezimalsystems.“ Er schaffte es gerade noch, sie in den Sand zu zeichnen (Abb. 2.1), dann musste er eine längere Pause einlegen.

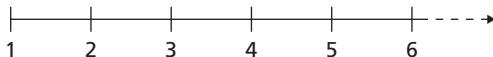
Eddi entschied sich spontan für die europäische Schreibweise und sah sofort den Vorteil der neun verschiedenen Zahlzeichen: Mit diesen Symbolen konnte man die Aufzeichnungen drastisch verkürzen („achtzigundsieben“ wurde zu „87“, denn die zweite Stelle von rechts hatte ein Gewicht von zehn Zählseinheiten). Man konnte beliebig große Zahlen schreiben: 1317 Ziegen – wenn denn ein Mensch eine solche Menge Tiere besessen hätte. Und weil er gerade dabei war – Siggie hatte sich ein wenig gefangen und half ihm auf die Sprünge (er hatte das bei der Schrift der Sumerer in der so genannten Uruk-III-Schicht „gesehen“ und somit ins 4. Jahrtausend vor einem gewissen „Christus“ datiert) –, erfand er gleich noch die Buchstabenschrift und ein paar weitere Zeichen dazu. Damit hatte er das Problem, konkrete Dinge durch abstrakte Zeichen zu ersetzen, sozusagen „von A bis Z“ erledigt.

Das kam seiner Buchhaltung zugute. Auch Rechenregeln und Gleichsetzungen konnte er nun einfach und kompakt notieren: „Zehn Ziegen sind dasselbe wie zwei Frauen“ wurde notiert als „10 Z = 2 F“. Dazu hatte er ein „Gleichheitszeichen“ erfunden, um nicht immer mühsam die Wörter „ist gleich“ schreiben zu müssen. Ursprünglich sah es so aus: \equiv – zwei lange Striche für ein Symbol, weil keine zwei Dinge gleicher sein können als zwei parallele Linien. Dass er so etwas formulieren konnte, machte ihn ganz stolz. Nach einem Hinweis von Siggie beschloss er, sich nun nicht mehr mit dem Titel „Buchhalter“ zufrieden zu geben – „Mathematiker“ hörte sich doch viel besser an. Das war ja genau der Beruf, mit dem er anfänglich den Wärter erschreckt hatte. Und schon hatte er das mit seinen neuartigen Buchstaben auf seinem Visitenstein eingeritzt: „Eddi Einstein – Mathematiker“.

Eddi hatte bisher einen Knochen mit Kerben zum Rechnen und für Notizen benutzt – bis Siggie ihn darauf hinwies, dass es unklug sei, zu viele Datenspuren zu hinterlassen. Ein Archäologe namens Jean de Heinzelin de Braucourt würde ihn Jahrtausende später finden und völlig falsche Schlüsse daraus ziehen.⁴ Wenn das

⁴ Gemeint ist der „Ishango-Knochen“ (siehe <http://de.wikipedia.org/wiki/Ishango-Knochen#Deutungen>): Die Anfänge des eigentlichen Zählens und Rechnens – losgelöst von der reinen Notation konkreter Objekte – sind nach allgemeiner Ansicht ab der Zeit der Sesshaftwerdung im Zuge der neolithischen Revolution zu finden. Frühere mit Ornamenten oder Einkerbungen versehene Artefakte werden als Zeugnisse einer Vorstufe des Zählens betrach-

Abb. 2.2 Der Zahlenstrahl zeigt alle natürlichen Zahlen



Internet erfunden und verbreitet wäre, verbiete sich ein so freizügiger Umgang mit Informationen sowieso von selbst. Dieses Problem, ein Knochen mit Kerben, erledigte sich nun durch seine neuen Zahlzeichen – wenn auch Höhlenwände schwerer zu transportieren waren. Aber wer Zweifel an seiner Buchhaltung hatte, musste sich eben zu *ihm* bemühen. So etwas festigt Herrschaftswissen! Dass der Dorfschreiber ihm inzwischen eine Kuhhaut für seine Journale überlassen hatte, brauchte er ihnen ja nicht zu verraten.

2.1 Digitale und analoge Zahlendarstellung

Natürlich war ihm auch unbewusst schon klar, was der Unterschied zwischen „digitalen“ und „analogen“⁵ Zahlen war – ohne diese Begriffe zu kennen. Ein „digitaler“ Fuß war sozusagen entweder da oder nicht da, so wie eine Ziege. Entweder sie war da oder sie war weg. Eine ganze Zahl: eins. Einen „analogen“ Fuß einer Leine aus geflochtenem Gras – genau so lang wie das Eichmaß des eigenen Fußes – konnte man zu seinem Vorteil mit der Steinaxt um ein paar Zentifuß verkürzen (wenn es auch nicht als ehrenhaft galt). Eine ganze Zahl, aber nur fast – vielleicht ein Stückchen weniger oder mehr als eins.

Im Prinzip waren die beiden Zahlen aber gleichwertig – deshalb kam ihm der Gedanke, die natürlichen Zahlen auf einem „Zahlenstrahl“ aufzuzeichnen. Er würde ziemlich lang werden – zwar begann er mit 1, aber er schien nie zu enden. Immer konnte er ihn sich noch um 1 länger vorstellen... (Abb. 2.2).

Würde er jemals enden? Er beschloss, Siggi danach zu befragen – irgendein Schlaukopf in der Zukunft würde das Problem ja wohl gelöst haben! Er war schon zufrieden, die Natur der Zahlen erfasst zu haben: abstrakte, nicht notwendigerweise an konkrete Dinge gebundene Mengen. Sogar Ziegen und Schafe und Hühner konnte er zusammenzählen: 10 Z + 3 S + 11 H = 24 V – mit einem neuen abstrakten Begriff: „Vieh“. Vierundzwanzig Stück Vieh, eine klare Aussage.

tet, da das Vorhandensein eines abstrakten Zahlbegriffes vor der Jungsteinzeit nicht anzunehmen ist. Die Anordnung der Kerben des Ishango-Knochens legt die Vermutung nahe, dass es sich bei dem Muster um kein rein zufälliges handelt und bietet Raum für Deutungen, die jedoch nach heutigem Forschungsstand als spekulativ gelten müssen.

⁵ Vom lateinischen *digitus* (Finger) und griechischen *análogos* (entsprechend, verhältnismäßig).

Das brachte ihn auf eine weitere Idee. Die Sache mit der Tauscherei ging ihm schon lange auf die Nerven. Jemand bot zehn Ziegen an, wollte aber keine zwei Frauen, sondern 50 Hühner. 15 Hühner waren aber dasselbe wie ein Schwein, doch niemand bot Schweine gegen Ziegen. Wie sollte man da einen Preis finden?! Nein, er musste das Geld erfinden, und zwar schnellstens! Rudi schlug vor, die Goldkrümel dazu zu verwenden, die man im Flussbett gefunden hatte. Eddi war dagegen – Gold war doch zu nichts zu gebrauchen. Aber die seltenen flachen Steine aus der gleichen Gegend, darauf konnte man den einzelnen Wert jedes Geldstücks einritzen... schließlich war man ja in der *Steinzeit*! Diesem Argument konnte Rudi nichts entgegen setzen, und so schuf Eddi etwas, was er „Stones“ nannte. Mit eingritzten Werten von 1, 2, 5, 10, 20, 50 usw. – so konnte man jeden Wert durch mehrere Steine zusammenstellen und brauche dennoch keine neun verschiedenen Werte pro Zehnergruppe, sondern nur drei. Da es nichts Billigeres, mit dem man Handel treiben konnte, gab als ein Huhn, wurde dessen Wert auf „1“ gesetzt. Und alle Steine waren gleich groß⁶, denn sie hatten ja nur einen „abstrakten“ oder „virtuellen“ Wert und keinen konkreten wie ein Feldstein, mit dem man etwas bauen konnte.

Die Leute waren begeistert. Nicht nur konnte man frei Waren handeln, man bekam sogar noch „Geld“ zurückgegeben – eine Kuh gegen zwei Schweine und noch 5 Stones obendrauf. Denn inzwischen war die „Zivilisation“ (die man damals noch nicht so nannte) so weit fortgeschritten, dass es bereits „Besitz“ gab, persönliches Eigentum: mein Acker, meine Ziegen, meine Frauen. Das würde sich auch für die nächsten zehntausend Jahre nicht ändern.

Obwohl ihn Siggi mit dem (ihm gänzlich unbekannten) Wort „Kapitalist!“ beschimpfte, begann Eddi mit den Stones *selbst* Handel zu treiben. Er verlieh sie zum Beispiel, forderte dafür aber eine kleine Belohnung – schließlich trug er ja das Risiko, sie nie wieder zu sehen! Da „Belohnung“ zu selbstsüchtig klang, nannte er es „Zinsen“ – ein Wort, das den anderen allerdings unbekannt war und seinen Ruf als Fachmann daher weiter beförderte. Geld – ursprünglich gedacht zur Erleichterung des Warentausches – wurde nun selbst zur Ware. Siggi hatte dies schon kommen sehen – für einen „Seher“ kein Kunststück, da er *alles* kommen sah – und er sah auch, wie es weitergehen würde. Als er das zu Ende dachte, wiegte er bedenklich den Kopf und murmelte etwas von „ausbeuterischem Wirtschaftssystem“. Man würde mit zehn Mal mehr Geld handeln als es Waren gäbe. Es würde so einfach zu erzeugen sein wie die Steine, die überall herumlagen. Man würde Geld aus dem Nichts erzeugen, wo vorher keines war.⁷ Geld war eine Abstraktion, so wie die Objekte der

⁶ Wie die US-amerikanischen Dollarnoten.

⁷ M. Schieritz, Th. Fischermann: Die Luft soll raus. DIE ZEIT, 06.08.2009 Nr. 33 (Quelle: <http://www.zeit.de/2009/33/Blasen-Kapitalismus>) und besonders U. J. Heuser, M. Schieritz:

Mathematik. Alles Geld ist gleich gültig, doch Geld ist niemandem gleichgültig. „Preise“ konnten nun exakt dem „Markt“ von Waren und sogar Dienstleistungen angepasst werden. Angebot und Nachfrage regelten den Preis, knappe Güter wurden teurer. Schneller und vor allem unmerklicher als zu sagen: „Nee, eine Kuh kostet jetzt *drei* Schweine – ich habe doch nur noch so wenige!“

Aber auch ein angeblich rational denkender Wissenschaftler kann der Faszination des Geldes verfallen. Rudi war schnell auf die Idee gekommen, in seine kleine Kieselsteinsammlung zu „investieren“, wie es Siggi nannte. Er hatte das subjektive Gefühl, dass die Preise speziell für den seltenen Feuerstein (auch Flint oder Silex genannt) trotz heftiger Schwankungen im Durchschnitt stiegen. Wenn er sie nun gegen Geldsteine kaufen würde, könnte er sie nach einiger Zeit des Wartens vielleicht teurer wieder verkaufen. *Steine gegen Steine*, dachte er, *da kann man nichts falsch machen*.⁸

Eddi blieb von solchen Gedanken unberührt. Sein Zahlenstrahl ging ihm aber nicht aus dem Sinn. Man müsste doch auch *zwischen* den natürlichen Zahlen noch etwas unterbringen können, was dann ja auch eine Art „Zahl“ war... nur eben keine *ganze* Zahl. Aber ein halber Sack Getreide oder ein ganzer und ein halber Sack Getreide waren ja ganz konkrete Größen. Da ein halber Sack Getreide daraus entstand, dass man einen ganzen in zwei Teile teilte, schrieb er die entsprechende Zahl als „ $\frac{1}{2}$ “ – den zugehörigen Teilungsstrich „/“ hatte er sich gerade ausgedacht. Ein ganzer und ein halber Sack Getreide waren dann natürlich „ $1 \frac{1}{2}$ “ und als „Zahl“ zwischen der 1 und der 2 angesiedelt. Aber zwischen welchen Zahlen lag der Wert „ $\frac{1}{2}$ “ – zwischen der 1 und... ja, was denn? Da war ja nichts! Der Zahlenstrahl fing bei 1 an. Aber *warum* eigentlich?

2.2 Die Erfindung der Null

Rudi fand die Idee des Zahlenstrahls auch bestechend und konstruierte eine Vorrichtung, mit der er nicht nur sagen konnte, dass es kalt oder warm war, sondern *wie* kalt oder warm. Doch auch sie wurde nicht so recht fertig, weil er auch nicht wusste, was links – in diesem Fall *unter* – der „1“ war.

„Wenn ich zwei Säcke Getreide habe und einen verkaufe, dann habe ich nur noch einen“, sagte er. „Wenn ich den auch verkaufe, habe ich nix mehr. Warum ist

Wie Geld zu Geld wird. DIE ZEIT, 24.06.2010 Nr. 26 (Quelle: <http://www.zeit.de/2010/26/Waehrung-Geld-Herstellung-Wert>).

⁸ Daher ist uns der Ausdruck „steinreich“ seit damals erhalten geblieben.

„nix‘ also *keine* Zahl?“ „Na gut“, entgegnete Eddi, „nehmen wir an, es gäbe sie⁹... Wie wollen wir sie dann bezeichnen?“ „Null‘ würde ich sie nennen und als Zeichen ein ‚0‘ verwenden, das Symbol für ein Loch. Da ist ja auch nix!“

Rudi war noch nicht fertig: „Und übrigens, du Ochse, ist dir denn noch nicht aufgefallen, dass du die Null in deinem tollen Zahlensystem unbedingt brauchst!? Wenn du zu neun Säcken Getreide einen hinzustellst, bekommst du zehn... Wie willst du das denn schreiben?! Das sind ja ein Zehner und *null* Einer.“ „Den Fall hatte ich noch nicht.“ „Das gilt nicht, ein solches System muss ja lückenlos sein – und jetzt ist es das: Die Antwort ist ‚10‘, eine Eins gefolgt von einer Null.“

Ein Punkt für ihn, dachte Eddi und fragte, um von seiner Blamage abzulenken: „Was soll denn dein Wärmemesser als Nullpunkt haben?“ „Etwas Markantes, habe ich mir gedacht, zum Beispiel die Temperatur des schmelzenden Eises.“ „Und wenn es nun *noch* kälter wird?“

Das machte Rudi Radlos ratlos. *Unter* der Null gab es keine Zahl mehr, das war doch klar.

2.3 Mengenlehre und leere Menge

„Nun haben wir aber eine Menge Zahlen kennen gelernt“, sagt Rudi und markierte der Erschöpften. „Das kannst du wörtlich nehmen“, meinte Eddi, „es ist die ‚Menge der natürlichen Zahlen‘, eine Art Sammelbezeichnung für diese Gesamtheit. Du kannst dir das auch als Aufschrift auf einem gedachten Lederbeutel denken, in dem sie alle drin sind.“ „Aber es sind doch unendlich viele, wie sollen die denn alle da hinein passen?“, gab Rudi zu bedenken. „In einen *gedachten* Lederbeutel passt alles hinein!“, beruhigte ihn Eddi, „Und das stimmt auch noch, wenn *gar nichts* darin ist... eine ‚leere Menge‘ ist auch noch eine Menge – so wie die Null, mit der ja *nichts* gezählt wird, auch eine Zahl ist.“ „Komisch, aber logisch“, kommentierte Rudi. „Aber ab wann ist ein Sandhaufen ein *Sandhaufen*, also eine *Menge* Sand? Ab einer Million Körnern... sicher. Ab tausend Körnern... dann eher ein Häufchen... Ab...“ „Halt!“, sagte Eddi, „Ich sehe schon, wo du hin willst. Die übliche Falle: die Verwechslung von Umgangssprache und Fachsprache. In dieser ist ‚Menge‘ der Name der Gesamtheit, selbst wenn sie nur wenige Elemente enthält. Oder nur ein Sandkorn... oder *gar* keins. Eine ‚Sandmenge‘ ist also nicht ‚viel Sand‘, sondern nur ein zusammenfassender Begriff.“ „Daran muss man sich erst einmal gewöhnen“, nickte Rudi.

⁹ Der erste dokumentierte Fall von mathematischer Hypothesenbildung. Eine Hypothese ist eine Aussage, der Gültigkeit unterstellt wird, die aber nicht bewiesen oder verifiziert ist (Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Hypothese>).

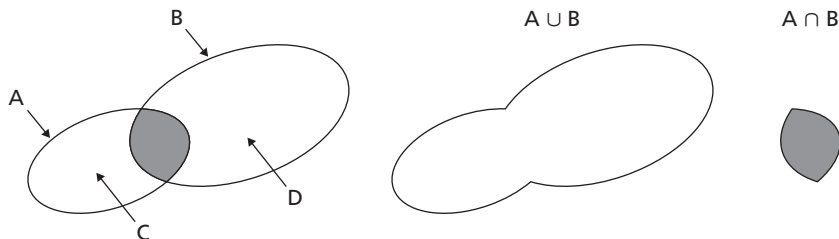


Abb. 2.3 Mengen – Vereinigungs- und Schnittmenge

Mengen sind also Sammelbezeichnungen für ihre Inhalte. Egal wie viele Elemente es sind. Sie haben Namen, die man natürlich auch abkürzen kann – und nichts tun Mathematiker lieber. Statt „Menge der natürlichen Zahlen“ schreiben sie „ \mathbb{N} “ und jeder bekommt erst einmal einen Schreck. Und den Satz „Das Element x gehört zur Menge A “ schreiben sie kurz und knapp als $x \in A$ – ein Zeichen, das dem griechischen ϵ („epsilon“) ähnelt. Es steht für das lateinische Wort „ex“, also „aus“ – „ x aus A “, könnte man sagen. Also ist $2 \in \mathbb{N}$ eine korrekte Formulierung, denn die Zwei ist ein Element der Menge der natürlichen Zahlen. Da eine Menge durch eine bestimmte Bedingung oder Eigenschaft beschrieben wird, die alle Elemente der Menge (und nur diese) erfüllen, schreibt man auch als Definition der Menge $A := \{x \mid \text{Eigenschaften}\}$, gelesen als „ A sei die Menge aller x , für die die Eigenschaft gilt“. Das spezielle Gleichheitszeichen „ $:=$ “ mit dem Doppelpunkt davor soll auf die Zuweisung oder Bestimmung hinweisen. Die Eigenschaften werden verbal beschrieben. Z. B. definiert man die Menge der geraden Zahlen G wie folgt: $G := \{x \mid x \text{ ist eine gerade natürliche Zahl und größergleich } 2\}$.¹⁰ Und man kann eine Menge über eine Liste ihrer Elemente definieren z. B. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ oder $G = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ – so lange, bis der Dümme gemerkt hat, was das Bildungsgesetz ist. Mit natürlichen Zahlen kann man etwas abzählen, nummerieren – auch so kann man sich das Zeichen „ \mathbb{N} “ gut merken.

Mit diesen Mengen kann man genau so abstrakte Überlegungen anstellen wie mit ihren einzelnen Inhalten – mathematische Operationen unabhängig von ihrer Bedeutung.

Genau das zeigte Eddi gerade seinem Freund (Abb. 2.3): „Wir können bei zwei Mengen, die gemeinsame, aber auch unterschiedliche Elemente enthalten, eine ‚Vereinigungsmenge‘ definieren. Das ist die Menge aller Elemente, die zu A und B gehören. Besser gesagt: zu A oder B oder *beiden*. Wir schreiben das als $A \cup B$, das wie ein ‚und‘ aussieht, aber mathematisch ‚oder‘ bedeutet. Aber das ist nur eine

¹⁰ Die Kurzform „größergleich“ bedeutet „größer als oder gleich“.

Eselsbrücke, wie du gleich sehen wirst. Wenn A die Menge aller Ziegenböcke ist und B die Menge aller braunen Ziegen, dann ist die Vereinigungsmenge...“ „Die Menge aller Ziegen, die braun *oder* männlich sind oder beides“, ergänzte Rudi. Eddi fuhr fort: „Ja. Also kein ‚entweder... oder‘. Dagegen ist die so genannte ‚Schnittmenge‘ $A \cap B$ die Menge aller braunen Ziegenböcke. Also markiere ich mit \cap alle Elemente, die zu A *und* B gehören, mit \cup die, die zu A *oder* B gehören.“ „Jetzt hast du mich verwirrt: Das ‚und‘ ist ein ‚oder‘?“ „So kann man es sagen. Dann merke dir das \cup als Topf, in das *alles* reinkommt!“

„Das ist ja sehr anschaulich“, fand Rudi, „Und nun lass mich raten: C in deiner Zeichnung ist die Menge aller *nicht* braunen Ziegenböcke und D die Menge aller braunen weiblichen Ziegen.“ „So einfach ist das!“, bestätigte Eddi. Rudi hatte aber noch einen Einwand: „Es sieht ja so aus, als würde die Vereinigungsmenge $A \cup B$ die Schnittmenge $A \cap B$ enthalten.“ Eddi nickte: „In der Tat... Deswegen kannst du beim nächsten Mittagessen auf die Frage ‚Möchtest du Fisch oder Fleisch?‘ mit einem klaren ‚Ja!‘ antworten. Und du siehst: ‚Nicht eine Menge‘ ist auch eine Menge.“ „Wie bitte!? Faselst du?“

Aber so ist es. Es gibt sogar einen Operator dafür, das Zeichen \neg . Also ist $\neg A$ sozusagen „alles auf der Welt außer Ziegenböcken“. Daraus wird später ein gewisser Georg Cantor in den Jahren 1874 bis 1897 eine „Mengenlehre“¹¹ entwickeln, indem er eine Menge „naiv“ als eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen beschrieb. Viele mathematische Erkenntnisse entstanden daraus, aber auch – wegen des Umdeutens oder Umformulierens bekannter arithmetischer Gesetze – gelegentlich eine Verwirrung auf höherer Ebene. Einen kleinen Leckerbissen kann ich Ihnen aber nicht ersparen: die „De Morgan’schen Regeln“¹² – zwei grundlegende Regeln für logische Aussagen. Sie wurden nach dem Mathematiker Augustus De Morgan (1806–1871) benannt, obwohl sie bereits dem mittelalterlichen Logiker Wilhelm von Ockham (1285–1347) bekannt waren. Sie kamen bei der Entwicklung des Computers zur Anwendung – ein Beispiel, wie reines spielerisches Denken zu praktischen Anwendungen führt. Kostprobe gefällig? $\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$. In Worten: „Nicht A *und* B ist gleich nicht A *oder* nicht B“.

So hätte Eddi das ausgedrückt: Die Menge aller Ziegen, die *nicht* braune Ziegenböcke (A = Ziegenböcke *und* B = alle braunen Ziegen, also sowohl Bock als auch braun) sind, sind entweder nicht braun *oder* keine Ziegenböcke. Oder für Kaffee-trinker aus dem heutigen Alltag: Wenn Sie gerne Kaffee trinken, aber immer nur

¹¹ Siehe [http://de.wikipedia.org/wiki/Mengenlehre_und.../Menge_\(Mathematik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Mengenlehre_und.../Menge_(Mathematik)). Definition aus dieser Quelle. Vergl. auch Wallace (2007).

¹² Siehe http://de.wikipedia.org/wiki/De_Morgan'sche_Gesetze. Folgender Satz von dort, ebenfalls das Kaffee-Beispiel.

schwarz und ohne Zucker, dann kann man dies so ausdrücken: „Keine Milch *und* kein Zucker (im Kaffee), genau dann trinke ich den Kaffee“ (rechte Seite der De Morgan'schen Regel). Das ist nach der Regel wertgleich mit der Aussage: „Milch *oder* Zucker (im Kaffee), genau dann trinke ich den Kaffee *nicht*“ (linke Seite der De Morgan'schen Regel). So verwandelt sich ein verneintes „sowohl als auch“ in ein „entweder oder“.

2.4 Wir tolerieren keine Intoleranz

Womit wir bei den Paradoxien wären, den inneren Widersprüchen. Denn plötzlich taucht eine selbstbezügliche Frage auf: Kann eine Menge *sich selbst* enthalten? „Natürlich nicht!“, sagen Sie – das wäre ja wie bei Münchhausen, der sich selbst am eigenen Schopf aus dem Sumpf zieht. Eine ‚Menge‘ ist ja eine Sammelbezeichnung für eine Gesamtheit, ein „gedachter Lederbeutel“ mit einem Zettelchen daran, auf dem der Name der Menge steht, die darin ist. Und der Zettel ist außen dran und nicht *im* Beutel. Also: nein.

Betrachten wir sicherheitshalber ein Beispiel: Auf dem Zettel steht „Menge aller Dinge, die sich mit exakt elf Worten beschreiben lässt“. Im Beutel ist ein Apfel („Essbare Frucht der Art *Malus domestica* innerhalb der Pflanzengattung der Kernobstgewächse“ = 11 Worte), eine Schlagbohrmaschine („Bohrmaschine, die auch eine vibrationsähnliche Bewegung in axialer Richtung ausführen kann“ = 11 Worte) und ein Omnibus („Großes Straßenfahrzeug, für den gewerbsmäßigen Transport zahlreicher Personen im Öffentlichen Personennahverkehr“ = 11 Worte). Aber kein Düsenjäger („Ein strahlgetriebenes Jagdflugzeug“ = 3 Worte). Ja, ein etwas seltsames Beispiel, aber warum nicht? Logisch korrekt. Jetzt schauen Sie mal auf den Zettel am Lederbeutel und zählen Sie die Wörter... es sind genau 11! Also gehört die „Menge aller Dinge, die sich mit exakt elf Worten beschreiben lässt“ zu *sich selbst*.

Der britische Philosoph, Mathematiker und Logiker Bertrand Russell (1872–1970) hat im Jahre 1903 die nach ihm benannte „Russellsche Antinomie“ formuliert. Er definierte die nach ihm benannte „Russellsche Klasse“ ähnlich wie hier als die „Menge aller Mengen, die sich *nicht* selbst als Element enthalten“. Er kam allerdings zu dem Schluss, dass es sie nicht geben kann – genauer: dass es sie, wenn es sie gibt, nicht geben kann und wenn es sie nicht gibt, geben muss. Können Sie noch folgen? Ich nicht mehr, aber in es gibt ein anschauliches und sofort einsehbares Beispiel – der „Barbier von Sevilla“: *Man kann einen Barbier als einen definieren, der all jene und nur jene rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Die Frage ist: Rasiert der Barbier sich selbst?*¹³

¹³ Quelle (wörtlich): <http://de.wikipedia.org/wiki/Barbier-Paradoxon>.

Algebra für Höhlenmenschen und andere Anfänger

Eine Einführung in die Grundlagen der Mathematik

Beetz, J.

2014, XII, 53 S. 15 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-05573-8