
Mehrfeldsysteme mit Oberflächenkopplung 2

Einführend wird die lineare Dynamik ein paar weniger, rein festkörpermechanischer Mehrfeldsysteme angesprochen, bevor über notwendige Grundlagen von Fluidschwingungen zur angesprochenen Fluid-Festkörper-Wechselwirkung übergegangen wird.

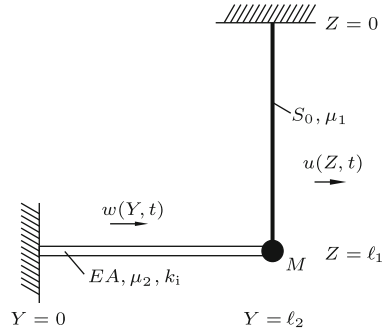
2.1 Mechanische Systeme

Der Problemkreis wird exemplarisch an ausgewählten Beispielen von Zweifeldsystemen aus jeweils 1-parametrischen Strukturmodellen untersucht.

Beispiel 2.1

Ausführlich wird an eine Übungsaufgabe in [43] angeknüpft, die die Herleitung des maßgebenden Randwertproblems für ein Zweifeldsystem gemäß Abb. 2.1 zum Thema hatte. Es geht dabei um die gekoppelten Querschwingungen $u(Z, t)$ einer elastischen Saite (Länge ℓ_1 , konstante Vorspannung S_0 , konstante Massenbelegung μ_1) mit den Längsschwingungen $w(Y, t)$ eines viskoelastischen Stabes (Länge ℓ_2 , konstante Dehnsteifigkeit EA , Massenbelegung μ_2 , Dämpfungskonstante k_i), die jeweils einseitig in der Umgebung unverschiebbar gelagert und über die beiden anderen Endpunkte miteinander *formschlüssig* verbunden sind.

Abb. 2.1 Zweifeldsystem



Der Einfachheit halber wird im Rahmen der folgenden Rechnung auf die angebrachte Endmasse verzichtet; eine erregende Streckenlast $p(Z, t) = P_0 \sin \Omega t$, hier der Saite, wird einbezogen, um gegebenenfalls auch Zwangsschwingungen diskutieren zu können.

Bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen aus dem Prinzip von HAMILTON [43]

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} W_\delta dt = 0. \quad (2.1)$$

sind bei der vorliegenden einfachen Problemstellung die bereitzustellenden Energie- und Arbeitsanteile elementar:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\mu_1}{2} \int_0^{\ell_1} u_{,t}^2 dZ + \frac{\mu_2}{2} \int_0^{\ell_2} w_{,t}^2 dY, \\ U &= U_i = \frac{S_0}{2} \int_0^{\ell_2} u_{,Z}^2 dZ + \frac{EA}{2} \int_0^{\ell_2} w_{,Y}^2 dY, \\ W_\delta &= \int_0^{\ell_1} p(Z, t) \delta u dZ - k_i EA \int_0^{\ell_2} w_{,Yt} \delta w_{,Y} dY. \end{aligned}$$

Das Randwertproblem für das zu untersuchende Zweifeldsystem lautet demnach

$$\begin{aligned} -S_0 u_{,ZZ} + \mu_1 u_{,tt} &= p(Z, t), \quad -EA(w_{,YY} + k_i w_{,YYt}) + \mu_2 w_{,tt} = 0, \\ u(Z=0, t) &= 0, \quad w(Y=0, t) = 0, \\ w(Y=\ell_2, t) &= u(Z=\ell_1, t), \quad EA[w_{,Z} + k_i w_{,Zt}]_{(Y=\ell_2, t)} \\ &= S_0 u_{,Z}(Z=\ell_1, t) \quad \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

ist jeweils zweiter Ordnung in Ort und Zeit und besitzt – wie es sein muss – insgesamt vier Einschränkungen in Form von zwei Randbedingungen bei $Z=0$

bzw. $Y = 0$ und zwei Übergangsbedingungen an der Verbindungsstelle, die durch $Z = \ell_1$ und $Y = \ell_2$ gekennzeichnet ist. Über einen isochronen Separationsansatz

$$u(Z, t) = U(Z) \sin \omega t, \quad w(Y, t) = W(Y) \sin \omega t$$

erhält man mit den Quadraten der jeweiligen Wellengeschwindigkeiten $c_1^2 = S_0/\mu_1$ und $c_2^2 = EA/\mu_2$ das zugehörige Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} U_{,ZZ} + \frac{\omega^2}{c_1^2} U &= 0, & W_{,YY} + \frac{\omega^2}{c_2^2} W &= 0, \\ U(Z=0) &= 0, & W(Y=0) &= 0, \\ W(Y=\ell_2) &= U(Z=\ell_1), & c_2^2 W_{,Z}(Y=\ell_2) &= c_1^2 m U_{,Z}(Z=\ell_1). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die Abkürzung $m = \mu_1/\mu_2$ bezeichnet das Verhältnis der beiden Massenverteilungen. Die allgemeinen Lösungen der Feldgleichungen in (2.3) sind

$$U(Z) = A \sin \frac{\omega}{c_1} Z + B \cos \frac{\omega}{c_1} Z, \quad W(Y) = C \sin \frac{\omega}{c_2} Y + D \cos \frac{\omega}{c_2} Y,$$

und die Anpassung an die jeweils zwei Rand- und Übergangsbedingungen in (2.3) liefert ein homogenes algebraisches Gleichungssystem für die vier Konstanten A bis D . Aus den beiden Randbedingungen bei $Z = 0$ und $Y = 0$ folgt $B, D \equiv 0$, sodass nur noch die Übergangsbedingungen zur Bestimmung von A, C verbleiben. Für nichttriviale Lösungen $A, C \neq 0$ muss die zugehörige Determinante null werden:

$$\begin{vmatrix} \sin \frac{\omega \ell_1}{c_1} & -\sin \frac{\omega \ell_2}{c_2} \\ m \cos \frac{\omega \ell_1}{c_1} & -\cos \frac{\omega \ell_2}{c_2} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.4)$$

Dies ergibt die Frequenzgleichung

$$-\tan \frac{\omega \ell_1}{c_1} + m \tan \frac{\omega \ell_2}{c_2} = 0.$$

Die Determinante (2.4) ist deshalb mit angeschrieben worden, weil aus ihr für $m \rightarrow 0$ ¹ die entkoppelten Eigenwertprobleme der Querschwingungen einer beidseitig unverschiebbar befestigten Saite und der Längsschwingungen eines

¹ Der andere Grenzfall $1/m \rightarrow 0$ ist eher akademisch.

einseitig unverschiebbar, am anderen Ende normalkraftfreien Stabes einfach abgelesen werden können:

$$\sin \frac{\omega \ell_1}{c_1} = 0, \quad \cos \frac{\omega \ell_2}{c_2} = 0.$$

Dazu gehören jeweils abzählbar unendlich viele Eigenkreisfrequenzen $\omega_{1k} \ell_1 / c_1 = k\pi$ ($k = 1, 2, \dots, \infty$) und $\omega_{2k} \ell_2 / c_2 = (k-1)\pi/2$ ($k = 1, 2, \dots, \infty$). Ist dann für das gekoppelte Zweifeldsystem beispielsweise der Kopplungsparameter m klein, gibt es abzählbar unendlich viele Eigenkreisfrequenzen ω_k ($k = 1, 2, \dots, \infty$), die zweckmäßig in zwei Folgen ω_{2n} und ω_{2n-1} ($n = 1, 2, \dots, \infty$) aufgeteilt werden, wovon die eine Folge eine Korrektur der Eigenkreisfrequenzen ω_{1k} und die andere eine Korrektur der ω_{2k} enthält. Auch die Eigenformen des Koppelsystems teilt man zweckmäßig entsprechend auf, sodass zwar alle Moden Koppelmoden darstellen, diese aber in der einen Gruppe durch die ursprünglichen Eigenformen der Saite, in der anderen Gruppe durch entsprechende Eigenformen des Stabes dominiert werden. Im allgemeinen Fall hat man die transzendente Frequenzgleichung numerisch zu lösen und ordnet die Koppelkreisfrequenzen mit zugehörigen Eigenfunktionen der Größe nach. Da die Dämpfung als proportionale Dämpfung modelliert wurde, ergeben sich für das vorliegende Zweifeldsystem im Vergleich zu den beiden Einfeldsystemen keine Besonderheiten. Da die elastische Saite am verschiebbaren Ende des viskoelastischen Stabes befestigt ist, kann vermutet werden, dass bei erzwungenen Schwingungen sämtliche Resonanzen endlich große Ausschläge auch für die angekoppelte Saite hervorrufen werden, dass die Dämpfung also durchdringend ist. Die Zwangsschwingungen selbst werden hier nicht mehr untersucht. Da das Problem insgesamt (nur) vierter Ordnung ist, hält sich der Rechenaufwand auf der Basis der GREENSchen Resolvente durchaus noch in Grenzen. Modale Entwicklungen zur Untersuchung der Zwangsschwingungen erscheinen einfach, sind aber deswegen nicht elementar, weil bereits die Erfüllung der geometrischen Übergangsbedingungen einigen Aufwand bedeutet. ■

Ändert man die Aufgabenstellung derart ab, dass man die Verbindung von Saite und Stab nicht form- sondern *kraftschlüssig* beispielsweise mittels zwischengeschalteter Dehnfeder realisiert, ändert dies die Verhältnisse qualitativ überhaupt nicht. Das Problem wird nur quantitativ etwas komplizierter, weil in Form der Federkonstanten der Zwischenfeder ein weiterer Parameter das Schwingungsverhalten des Zweifeldsystems beeinflusst. Technische Anwendungen der besprochenen Kategorie stammen aus der Robotik oder aus dem Bereich von Hubkolbenmaschinen, wofür häufig elastische Mehrkörpersysteme zu betrachten sind. Die auftretenden

Randwertprobleme sind allerdings in vielen Fällen hochgradig nichtlinear, weil dabei große Starrkörperbewegungen die Regel sind.

Betrachtet man andererseits als Beispiel zwei Einfeldprobleme quer schwingender Balken übereinstimmender Länge L , die man parallel mit den linken Enden bei $Z = 0$ anordnet und beide über eine dazwischen geschaltete elastische oder viskoelastische Bettung koppelt, entsteht physikalisch durchaus ein Zweifeldsystem, mathematisch ist es jedoch *ein* Grundgebiet $0 \leq Z \leq L$ für *beide* Komponenten, sodass wie bei gekoppelten Biege-Torsions-Schwingungen eines Stabes mit unsymmetrischem Querschnitt oder bei Biegeschwingungen eines TIMOSHENKO-Balkens eigentlich mechanische Einfeldsysteme mit Volumenkopplung resultieren, die in [43] ausführlich behandelt werden.

2.2 Fluidschwingungen

Damit ein zwischen starren Wänden eingeschlossenes Fluid in Form einer Flüssigkeit oder eines Gases schwingungsfähig ist, muss es kompressibel sein. Im Folgenden wird deshalb ein kompressibles Fluid vorausgesetzt, das vereinfachend homogen und isotrop sein soll. Als einfachsten Fall nimmt man darüber hinaus ein reibungsfreies Fluid an². Die Bewegungsgleichungen werden zunächst im Rahmen synthetischer Überlegungen hergeleitet, bevor auch eine analytische Formulierung mit Hilfe des Prinzips von HAMILTON das Thema abrundet. Die Beschreibung erfolgt für einen raumfesten Beobachter eines abgeschlossenen Kontrollvolumens v zweckmäßig in EULER-Koordinaten, beispielsweise x, y, z im Falle eines kartesischen Bezugssystems. Es wird allerdings in der Regel vereinfachend angenommen, dass es um Schwingungserscheinungen in *ruhenden* Fluiden geht, d. h. eine Strömung mit der vorgeschriebenen Transportgeschwindigkeit \vec{v}_0 tritt dann nicht auf. Betrachtet man reibungsfreie, kompressible Fluide, geht es dann im Wesentlichen um drei orts- und zeitabhängige Variable: 1. Druckstörungen $p(x, y, z, t)$, die sich in der Form $p_0 + p$ mit üblicherweise $p \ll p_0$ dem vorgegebenen Umgebungsdruck p_0 überlagern, 2. Dichteänderungen $\rho(x, y, z, t)$ als kleine Abweichungen von der Dichte ρ_0 ($\rho \ll \rho_0$) bei Umgebungsdruck p_0 in der Form $\rho_0 + \rho$ und 3. die Schnelle, d. h. die Fluidteilchengeschwindigkeit $\vec{v}(x, y, z, t)$, wobei diese betragsmäßig sehr viel kleiner als die Schallgeschwindigkeit c_0 des betreffenden Mediums sein soll. Hierfür stehen folgende Gleichungen zur Verfügung:

² Der Einfluss der Viskosität wird im Einzelfall hinzugenommen.

1. Eine Zustandsgleichung, hier für die angenommene *adiabatische* Zustandsänderung³ in der Form

$$\frac{p_0 + p}{p_0} = \left(\frac{\rho_0 + \rho}{\rho_0} \right)^\kappa \quad \text{mit } \kappa = \frac{c_p}{c_v}. \quad (2.5)$$

Die Größen c_p, c_v bezeichnen darin die spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen. Unter den betrachteten Kleinheitsvoraussetzungen folgt daraus $1 + p/p_0 = (1 + \rho/\rho_0)^\kappa = 1 + \kappa\rho/\rho_0 + \dots$. Mit der Abkürzung $c^2 = \kappa p_0/\rho_0$ erhält man damit die lineare Approximation

$$p = c^2 \rho \quad (2.6)$$

der Zustandsgleichung. Die physikalische Bedeutung der Größe c als Phasengeschwindigkeit, d. h. Schallgeschwindigkeit des betrachteten Fluids wird später erkennbar.

2. Die *räumliche* Impulsbilanz, hier ohne Volumenkräfte zunächst in der Form

$$t_{ij,i} = (\rho_0 + \rho)a_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.7)$$

Dabei gilt im Rahmen einer linearen Theorie, dass die konvektiven Geschwindigkeitsanteile vernachlässigt werden können, sodass bei den Beschleunigungsanteilen a_i auch nur die lokalen Beiträge $a_i = v_{i,t}$ ins Gewicht fallen.

3. Die konstitutive Gleichung eines idealen reibungsfreien Fluids. Sie verknüpft bekanntlich über

$$\vec{t} = -(p_0 + p)\vec{I}, \quad \text{d. h. } t_{ij} = 0, \quad i \neq j \quad \text{und} \quad t_{ii} = -(p_0 + p) \quad (2.8)$$

den CAUCHYSchen Spannungstensor \vec{t} mit dem Druck $p_0 + p$. Das Materialgesetz trägt also offensichtlich der Tatsache Rechnung, dass durch das Fluid im reibungsfreien Fall keine Schubspannungen übertragen werden können.

Setzt man die Materialgleichung (2.8) unter den vorausgesetzten Kleinheitsbedingungen in die Impulsbilanz (2.7) ein, erhält man in linearer Beschreibung den Zusammenhang

$$-p_{,j} = \rho_0 v_{j,t}, \quad j = 1, 2, 3, \quad \text{bzw.} \quad -\text{grad } p = \rho_0 \vec{v}_{,t} \quad (2.9)$$

als so genannte EULER-Gleichung in linearisierter Form.

³ In [7] werden alternativ auch isotherme Zustandsänderungen angesprochen.

4. Die Kontinuitätsgleichung

$$-(\rho_0 + \rho)_{,t} = \operatorname{div} [(\rho_0 + \rho)\vec{v}], \quad (2.10)$$

gleichbedeutend mit der Tatsache, dass für das Kontrollvolumen v die lokale Dichteabnahme gleich dem Austrittsüberschuss an Masse sein muss. Damit werden die Systemgleichungen mathematisch abgeschlossen. Linearisieren liefert die hier maßgebende Form

$$-\rho_{,t} = \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} \quad (2.11)$$

der Kontinuitätsgleichung.

Die zwei thermodynamischen (p und ρ) und die drei mechanischen Variablen v_j sind damit eindeutig bestimmt. Der Vollständigkeit halber wird festgestellt, dass im Rahmen der hier verfolgten linearen Theorie ohne eigentliche Strömung die räumliche und die materielle Beschreibung ununterscheidbar zusammenfallen, sodass z. B. auch das Volumen in räumlicher (v) und materieller Darstellung (V) gleich ist. Divergenzbildung der EULER-Gleichung (2.9) führt nach Einsetzen der Zustands- und der Kontinuitätsgleichung (2.6), (2.10) auf die Wellengleichung

$$p_{,tt} - c^2 \nabla^2 p = 0$$

für die Druckstörung p . Wegen der Zustandsgleichung (2.6) hat man dann auch für die Dichteänderung ρ eine Wellengleichung:

$$\rho_{,tt} - c^2 \nabla^2 \rho = 0.$$

Setzt man schließlich in die Zeitableitung der EULER-Gleichung (2.9) den Gradienten der Kontinuitätsgleichung (2.10) und die Zustandsgleichung (2.6) ein, erhält man das Zwischenergebnis $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} = \vec{v}_{,tt}/c^2$. Weil $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{v} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} = \nabla^2 \vec{v} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v}$ ist, erhält man für die Geschwindigkeit \vec{v} die Beziehung

$$\vec{v}_{,tt} - c^2(\nabla^2 \vec{v} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v}) = \vec{0},$$

die keine Wellengleichung ist. Erfahrungsgemäß gilt jedoch bei Schwingungsvorgängen in reibungsfreien Fluiden $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$, sodass dann auch für die Schnelle eine Wellengleichung

$$\vec{v}_{,tt} - c^2 \nabla^2 \vec{v} = \vec{0}$$

resultiert. Als Ergebnis kann man festhalten, dass alle Variablen p, ρ, \vec{v} unter der Nebenbedingung $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ der Wellengleichung mit der Phasengeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0}} \equiv c_0 \quad (2.12)$$

genügen. Wenn das Geschwindigkeitsfeld gemäß $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ wirbelfrei ist, dann ist die Geschwindigkeit \vec{v} aus einem skalaren Potenzial Φ gemäß

$$\vec{v} = \text{grad } \Phi \quad (2.13)$$

herleitbar. Die Bestätigung erhält man durch Nachrechnen: $\text{rot } \vec{v} = \text{rot grad } \Phi \equiv \vec{0}$. Auch dieses so genannte *Geschwindigkeitspotenzial* $\Phi(x, y, z, t)$ erfüllt die Wellengleichung. Ausgangspunkt des Nachweises ist die EULER-Gleichung (2.9), die mit der Beziehung (2.13) als

$$-p = \rho_0 \Phi_{,t} \quad (2.14)$$

geschrieben werden kann. Differenziert man diese Gleichung einmal nach der Zeit, verwendet die Zustandsgleichung (2.6) und dann die Kontinuitätsgleichung (2.11) unter nochmaliger Verwendung des Ansatzes (2.13), folgt

$$\Phi_{,tt} - c_0^2 \nabla^2 \Phi = 0, \quad (2.15)$$

was zu zeigen war.

Die analytische Herleitung des maßgebenden Randwertproblems aus einer Variationsformulierung ist noch nicht etabliert, ist aber durchaus möglich [16] und soll hier in zwei Varianten des Prinzips von HAMILTON angegeben werden. In jedem Fall ist dabei zu beachten, dass die auftretenden Variationen materiell auszuführen sind. Da Strömungsprobleme in aller Regel in EULER-Koordinaten adäquat beschrieben werden, ist auf eine materielle Beschreibung überzugehen. Da an dieser Stelle ausschließlich lineare Probleme ohne Strömung diskutiert werden, für die EULER- und LAGRANGE-Koordinaten ununterscheidbar zusammenfallen, entfällt diese Umrechnung hier. Die erste Variante folgt [20, 34], und lehnt sich an die übliche Vorgehensweise in der Festkörpermechanik, siehe [43], Abschn. 2.3.1 und 2.3.2, an, bei der letztendlich die Verschiebungen variiert werden. Dementsprechend hat man zum einen die kinetische Energie

$$T = \frac{\rho_0}{2} \int_v \vec{u}_{,t} \cdot \vec{u}_{,t} dv$$

mit dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \vec{u}_{,t}$ als Zeitableitung des Verschiebungsvektors zu variieren. Zum anderen tritt die Variation des inneren Potentials⁴

$$\delta U_i = \int_v \vec{t} \nabla \delta \vec{u} \, dv \quad (2.16)$$

der Spannung \vec{t} bei einer entsprechenden virtuellen Verschiebung $\delta \vec{u}$ hinzu. Mittels partieller Integration lässt sich (2.16) in

$$\delta U_i = \oint_s \vec{t} \delta \vec{u} \, da - \int_v \nabla \vec{t} \delta \vec{u} \, dv$$

umformen. Damit lautet die resultierende Variationsformulierung

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[-\rho_0 \int_v \left(\vec{u}_{,tt} - \nabla \vec{t} \right) \delta \vec{u} \, dv - \oint_s \vec{t} \delta \vec{u} \, da \right] dt = 0. \quad (2.17)$$

Die beiden Summanden innerhalb des Volumenintegrals stellen die eigentliche Bewegungsdifferentialgleichung des idealen Fluids dar, während der letzte Summand die Randbedingungen liefert. Mit dem besonders einfachen Materialgesetz (2.8) des idealen Fluids und der adiabaten Zustandsänderung (2.6) zur Beschreibung der Kompressibilität kommt man dann wieder zur Problembeschreibung in Form der EULER-Gleichung (2.9) mit dynamischen Randbedingungen verschwindenden Drucks oder verschwindender Geschwindigkeit in Normalenrichtung an einer starren Wand.

Die zweite Variante arbeitet in Potenzialgrößen, womit sich die kinetische Energie T und die potenzielle Energie U_i einfach formulieren lassen [4, 7]:

$$T = \frac{\rho_0}{2} \int_v \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \, dv, \quad U_i = \frac{\rho_0}{2c^2} \int_v \Phi_{,t}^2 \, dv.$$

Wieder ohne potenziallose Kräfte ergibt sich $W_\delta = 0$ und das Prinzip von HAMILTON (2.1) kann ausgewertet werden. Ausführen der Variationen liefert in einem ersten Schritt

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_v \left(\rho_0 \nabla \Phi \cdot \nabla \delta \Phi - \frac{\rho_0}{c^2} \Phi_{,t} \delta \Phi_{,t} \right) dv \, dt = 0 \\ \Rightarrow & \int_{t_1}^{t_2} \int_v \left[\nabla \cdot (\delta \Phi \nabla \Phi) - \nabla^2 \Phi \delta \Phi - \frac{1}{c^2} \Phi_{,t} \delta \Phi_{,t} \right] dv \, dt = 0. \end{aligned}$$

⁴ In [34] ist ausgeführt, wie die Überlegungen auch auf zähe Fluide ausgedehnt werden können.

Diese Beziehung kann mit dem GAUSSschen Integralsatz in

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \oint_s \delta \Phi \nabla \Phi \cdot \vec{n} \, da \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_v \left(-\nabla^2 \Phi + \frac{1}{c^2} \Phi_{,tt} \right) \delta \Phi \, dv \, dt &= 0 \\ \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \oint_s \Phi_{,n} \delta \Phi \, da \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_v \left(-\nabla^2 \Phi + \frac{1}{c^2} \Phi_{,tt} \right) \delta \Phi \, dv \, dt &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

umgeformt werden, wenn $\Phi_{,n} = \nabla \Phi \cdot \vec{n}$ die Ableitung des Potentials Φ in Richtung der äußeren Normalen der berandenden Oberfläche s bezeichnet. Die eigentliche Bewegungsdifferentialgleichung folgt aus dem zweiten Integral in (2.18), während das erste Integral die Randbedingungen liefert. Ist das Fluid beispielsweise an der begrenzenden Oberfläche mit einer starren Wand in Kontakt, ergibt sich, wie bereits vermerkt, eine verschwindende Geschwindigkeit in Normalenrichtung, d. h. $\Phi_{,n} = 0$, während Dichteänderung ρ und Druckstörung p ungleich null sind. Man spricht dann von einer *schallharten* Berandung. Ist dagegen die Fluidberandung spannungsfrei, gilt dort $p, \rho = 0$, d. h. wegen (2.14) auch $\Phi_{,t} = 0 \Rightarrow \Phi = 0$, aber $\vec{v} \neq \vec{0}$. Die Begrenzung wird dann *schallweich* genannt. Als Besonderheit dieser zweiten Variante des Prinzips von HAMILTON für Fluide unter Verwendung des Geschwindigkeitspotentials Φ ist aber festzuhalten, dass bei der Angabe von Randbedingungen das Ergebnis $\Phi_{,n} = 0$ eine kinematische Festlegung darstellt, während $\delta \Phi$ eine Spannungsrandbedingung beschreibt. Vergleicht man diese Resultate mit jenen der ersten Variante, kehrt sich offensichtlich die Schlussfolgerung für kinematische, d. h. geometrische und dynamische Randbedingung um. Bei der Beschreibung der Fluid-Struktur-Wechselwirkung auf der Basis des Prinzips von HAMILTON, d. h. einer Betrachtung des Gesamtsystems, hat man dieser Tatsache Rechnung zu tragen.

Zum Schluss wird kein ideales Fluid mehr vorausgesetzt, es werden schwache Reibungseinflüsse mitberücksichtigt. Dabei wird angenommen, dass die Entropieproduktion infolge der Reibung vernachlässigbar ist und wie bereits im reibungsfreien Fall wird thermische Diffusion vernachlässigt, sodass die Zustandsänderung adiabatisch verläuft. Das Materialgesetz basiert jetzt auf dem Begriff des NEWTONschen Fluids ohne Gedächtnis unter Einbeziehung der STOKESSchen Hypothese, sodass nur noch eine Materialkonstante, nämlich die dynamische Zähigkeit η bzw. kinematische Viskosität $\mu = \eta/\rho_0$, auftritt. Die Spezialisierung der räumlichen Impulsbilanz (siehe [43], Abschn. 2.2.2) auf die so beschriebene konstitutive Gleichung bezeichnet man als NAVIER-STOKES-Gleichung [24]. In ihrer linearisierten Form

$$\vec{v}_{,t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \quad (2.19)$$

Dynamik verteilter Mehrfeldsysteme
Oberflächen- und Volumenkopplung

Wauer, J.

2014, XI, 78 S. 10 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-05690-2