

In der Mathematik werden Probleme oft dadurch gelöst, dass man eine zusätzliche Struktur einführt. Diese Struktur hat in der Regel nur eine Hilfsfunktion, sie kommt weder in der Voraussetzung noch in der Behauptung vor, sondern dient nur für den Beweis. In vielen Fällen kann man eine solche Struktur durch eine Färbung realisieren. Durch eine geschickte Färbung wird dabei ein Problem gelöst, das gar nichts mit Farben zu tun hat. Mit dieser Methode kann man sowohl Existenz- wie auch Nichtexistenzsätze beweisen.

## 2.1 Überdeckung des Schachbretts mit Dominosteinen

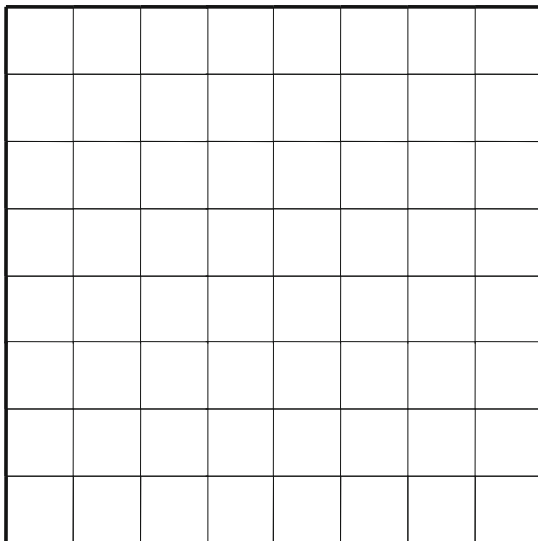
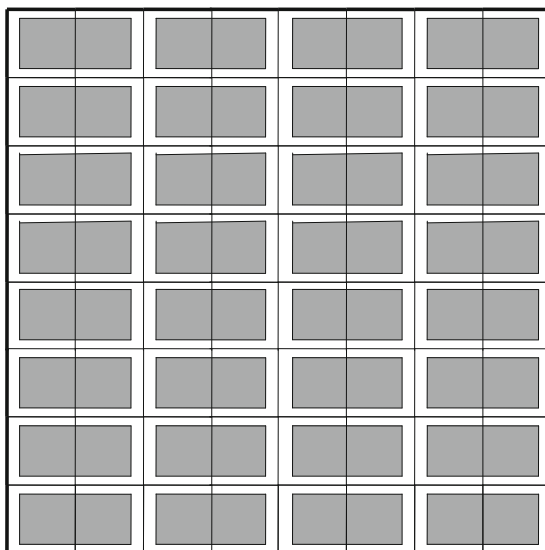
Wir stellen uns ein ganz normales Schachbrett vor, auf dem wir allerdings nicht Schach spielen werden. Wir betrachten vielmehr nur das Brett (Abb. 2.1).

Neben dem Schachbrett haben wir noch eine Menge von  $2 \times 1$ -Dominosteinen, von denen jeder genau zwei benachbarte Felder des Schachbretts überdecken kann. Auch bei den Dominosteinen kommt es uns nicht darauf an, was darauf steht, sondern nur auf die Form.

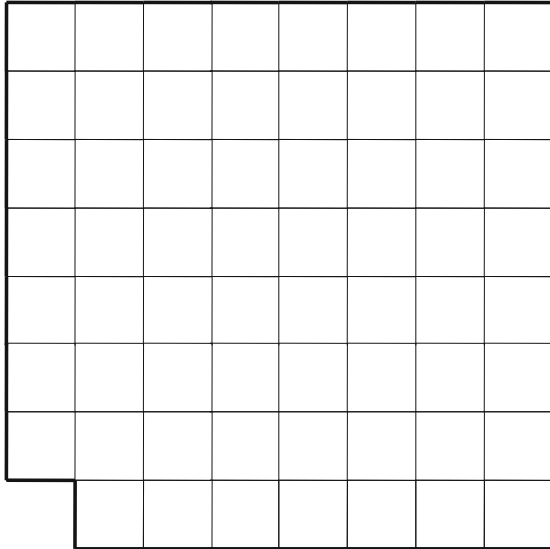
Wir stellen drei scheinbar ganz ähnliche, in Wirklichkeit aber völlig verschiedene Fragen, von denen die letzte den eigentlichen Pfiff enthält.

### 2.1.1 Einfache Frage

Kann man die Felder des Schachbretts lückenlos mit Dominosteinen so überdecken, dass sich keine zwei Dominosteine überlappen?

**Abb. 2.1** Ein Schachbrett**Abb. 2.2** Eine mögliche Überdeckung des Schachbretts

**Abb. 2.3** Das verstümmelte Schachbrett



Natürlich, es gibt Tausende von Möglichkeiten, das zu tun; die einfachste ist die in Abb. 2.2 gezeigte.

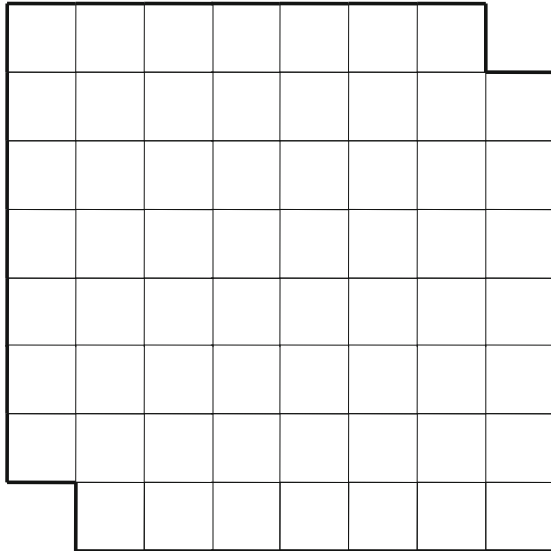
### 2.1.2 Dumme Frage

Nun schneiden wir ein Feld des Schachbretts heraus, zum Beispiel ein Eckfeld (siehe Abb. 2.3). Kann man auch dieses „verstümmelte Schachbrett“ lückenlos und überschneidungsfrei so mit Dominosteinen überdecken, dass kein Stein „übersteht“?

Zur Antwort müssen wir uns überlegen, wie viele Felder unser verstümmeltes Schachbrett hat. Das Originalschachbrett hat  $8 \times 8 = 64$  Felder, also hat das verstümmelte genau 63 Felder. Wie viele Dominosteine bräuchten wir zur Überdeckung? Da 31 Steine nur 62 Felder überdecken, reichen 31 nicht; 32 Steine überdecken aber bereits 64 Felder, also sind 32 Steine zuviel.

Also ist die Antwort „nein“: Es gibt keine Überdeckung des verstümmelten Schachbretts. Blöd!

**Abb. 2.4** Das doppelt verstümmelte Schachbrett



### 2.1.3 Interessante Frage

Jetzt schneiden wir zwei Felder aus dem Schachbrett aus, und zwar gegenüberliegende Eckfelder (siehe Abb. 2.4). Kann man dieses „doppelt verstümmelte“ Schachbrett lückenlos und überschneidungsfrei mit Dominosteinen überdecken?

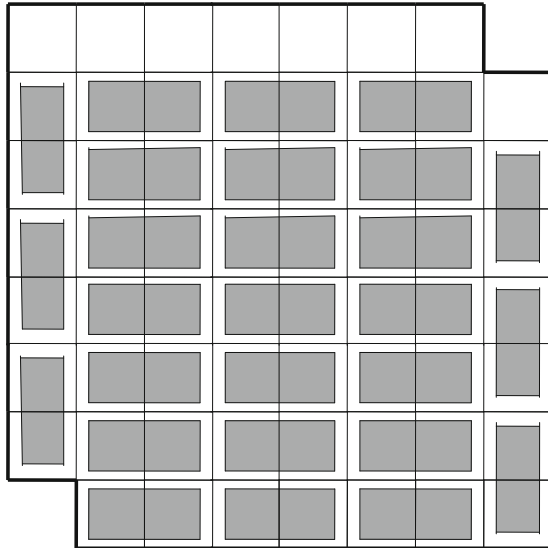
Auf den ersten Blick scheint nichts dagegen zu sprechen. Wir haben 62 Felder, und diese müssten mit 31 Steinen überdeckt werden.

Wohl jeder wird so anfangen, dass in die unterste Reihe drei Steine gelegt und einer senkrecht gestellt wird. Aber das geht nicht gut; ein Versuch ist in Abb. 2.5 dargestellt.

Man kann zwar noch problemlos drei Steine unterbringen, aber man müsste vier Steine schaffen!

Auch andere Versuche schlagen fehl. Vielleicht geht es ja wirklich nicht? Aber wie können wir uns überzeugen, dass es nicht geht? Mathematisch gesprochen: Wie können wir *beweisen*, dass es keine Lösung gibt? Wir müssten beweisen, dass keine der möglichen tausend und abertausend Ansätze zum Ziel führt! Aber kein Mensch wird alle diese Möglichkeiten auflisten und ausprobieren!

**Abb. 2.5** Ein Überdeckungsversuch



Wir müssen alle diese unübersehbar vielen Fälle *auf einen Schlag* erledigen! Aber wie?

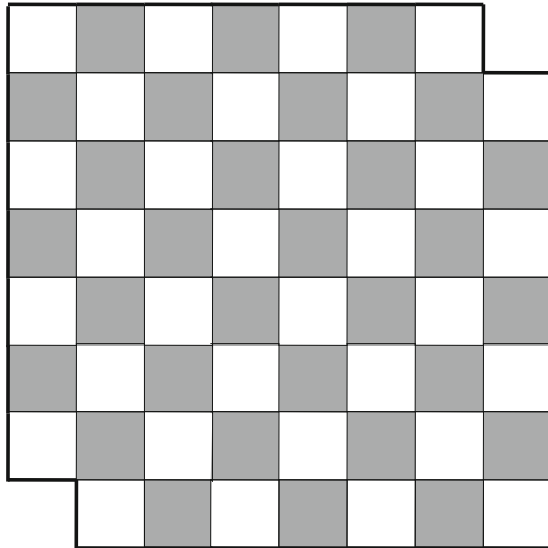
Hier ist die Idee: Bislang haben wir nur ganz wenige Eigenschaften des Schachbretts benutzt, eigentlich nur seine äußeren Abmessungen. Jeder weiß aber, dass ein Schachbrett auch gefärbt ist, seine Felder sind abwechselnd schwarz und weiß gefärbt. Die Idee ist, diese Färbung (Abb. 2.6) zu betrachten.

Wenn unsere Idee Erfolg haben soll, dann müssen wir zwei Dinge mit Hilfe dieser Färbung untersuchen: Einerseits das Schachbrett und andererseits die Dominosteine.

*Das Schachbrett:* Wie viele schwarze und wie viele weiße Felder hat das Originalschachbrett? Von jeder Sorte gleich viele, also 32. Man kann sich das auf viele Weisen klar machen, zum Beispiel dadurch, dass man bemerkt, dass in jeder Zeile genau vier weiße und vier schwarze Felder sind.

Wie viele schwarze und wie viele weiße Felder hat das „doppelt verstümmelte“ Schachbrett? Dazu müssen wir einfach überlegen, welche Felder entfernt wurden. Die entfernten Felder sind gegenüberliegende Eckfelder, und diese haben immer die gleiche Farbe. In unserem Beispiel haben wir zwei schwarze Felder entfernt. Deshalb hat das „doppelt verstümmelte“ Schachbrett genau so viele weiße Felder wie das Originalschachbrett, aber zwei schwarze Felder weniger. Im Klartext: Das „doppelt verstümmelte“ Schachbrett hat genau 32 weiße und nur 30 schwarze Felder.

**Abb. 2.6** Die Färbung des Schachbretts



*Die Dominosteine:* Jeder Dominostein auf dem Schachbrett überdeckt zwei benachbarte Felder, also zwei Felder verschiedener Farbe, ein weißes und ein schwarzes. Das bedeutet: Unabhängig davon, wie viele Dominosteine auf dem Schachbrett liegen, überdecken diese immer gleich viele weiße wie schwarze Felder! Ein Dominostein überdeckt ein weißes und ein schwarzes Feld, dreißig Dominosteine bedecken 30 weiße und 30 schwarze Felder. Keines mehr und keines weniger. Exakt.

*Zusammen* erhalten wir folgende überraschende Erkenntnis: Das „doppelt verstümmelte“ Schachbrett kann mit Dominosteinen nicht lückenlos überdeckt werden! Denn dazu müssten wir 32 weiße und 30 schwarze Felder überdecken. Jedes Arrangement von Dominosteinen erfasst aber gleich viele weiße wie schwarze Felder. Wenn wir 30 Dominosteine verwenden, haben wir alle schwarzen Felder besetzt aber zwei weiße sind noch leer. Diese können nie mit einem Dominostein überdeckt werden.

## 2.2 Überdeckung des Schachbretts mit größeren Steinen

Anstelle des normalen Schachbretts betrachten wir nun ein „Schachbrett“ beliebiger Größe, es muss auch nicht quadratisch sein, sondern darf ein Rechteck beliebiger Größe sein. Ein  $m \times n$ -**Schachbrett** ist ein Schachbrett mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten;

es hat  $m \cdot n$  Felder. In dieser Sprechweise ist das normale Schachbrett ein „ $8 \times 8$ -Schachbrett“.

Wir fragen uns, wann ein solches Schachbrett mit Dominosteinen überdeckt werden kann, wobei wir uns jetzt nicht nur die normalen  $2 \times 1$ -Dominosteine, sondern allgemein  $a \times 1$ -**Dominosteine** vorstellen. Diese bestehen aus einer Reihe von  $a$  aneinandergesetzten Feldern.

Eine Aussage ist einfach einzusehen:

### 2.2.1 Satz

Wenn  $m$  oder  $n$  ein Vielfaches von  $a$  ist, dann kann man das  $m \times n$ -Schachbrett lückenlos mit  $a \times 1$ -Dominosteinen überdecken.

*Beweis* Wenn die Anzahl  $m$  der Reihen ein Vielfaches von  $a$  ist, dann kann man sogar jede Spalte mit  $a \times 1$ -Dominosteinen ausfüllen. Indem man jede Spalte auffüllt, erhält man eine (ziemlich langweilige, aber immerhin!) Überdeckung des gesamten Schachbretts.  $\square$

Die Frage ist, ob auch die Umkehrung gilt, ob also aus der Tatsache, dass ein  $m \times n$ -Schachbrett lückenlos durch  $a \times 1$ -Dominosteine überdeckt werden kann, schon folgt, dass  $m$  oder  $n$  ein Vielfaches von  $a$  ist. Das würde bedeuten, dass man eine Überdeckung nur dann hinkommt, wenn es auch die langweilige Überdeckung gibt.

Ein Fall ist einfach: Wenn  $a$  eine Primzahl ist, dann gilt die Umkehrung. (*Warum?* Sei  $z$  die Anzahl der benötigten Steine. Da das  $m \times n$ -Schachbrett genau  $m \cdot n$  Felder hat und jeder Stein genau  $a$  davon überdeckt, muss  $z \cdot a = m \cdot n$  sein. Also teilt  $a$  das Produkt  $m \cdot n$ . Da  $a$  eine Primzahl ist, muss  $a$  also einen der Faktoren  $m$  oder  $n$  teilen. Daher ist  $m$  oder  $n$  ein Vielfaches von  $a$ .)

Der erste offene Fall ist daher  $a = 4$  und  $m = n = 6$ . Die Frage lautet: Kann man ein  $6 \times 6$ -Schachbrett mit  $4 \times 1$ -Dominosteinen überdecken? Die Antwort kann man durch systematisches Probieren erhalten. Man nimmt an, es geht. Dann muss einer der Steine ein Eckfeld überdecken. Dann überlegt man sich sukzessive, wie die anderen Steine liegen müssen und sieht dann sehr schnell, dass es nicht geht. (Siehe Übungsaufgabe 1.)

Die Umkehrung gilt aber allgemein:

**Abb. 2.7** Eine Färbung mit  $a$  Farben

1	2	3	...	a	1	...
2	3	4	...	1	2	...
3	4	5	...	2	3	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
a	1	2	...	a-1	a	...
1	2	3	...	a	1	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

## 2.2.2 Satz

Wenn man das  $m \times n$ -Schachbrett lückenlos mit  $a \times 1$ -Dominosteinen überdecken kann, dann ist eine der Zahlen  $m$  oder  $n$  ein Vielfaches von  $a$ .

*Beweis* Wir färben jetzt das Schachbrett nicht nur mit 2, sondern mit  $a$  Farben; wir bezeichnen diese mathematisch nüchtern mit  $1, 2, 3, \dots, a$ .

Wir färben das Schachbrett damit auf die einfachste Art und Weise: Wir beginnen links oben mit der Farbe 1 und machen dann nach rechts und nach unten in der Reihenfolge der Farben weiter:  $1, 2, 3, \dots, a, 1, 2, \dots$  (siehe Abb. 2.7).

Wir beobachten, dass jeder  $a \times 1$ -Dominostein jeweils ein Feld jeder Farbe überdeckt. Das bedeutet: Wenn das Schachbrett vollständig mit  $a \times 1$ -Dominosteinen überdeckt werden kann, dann muss es von jeder Farbe gleich viele Felder geben.

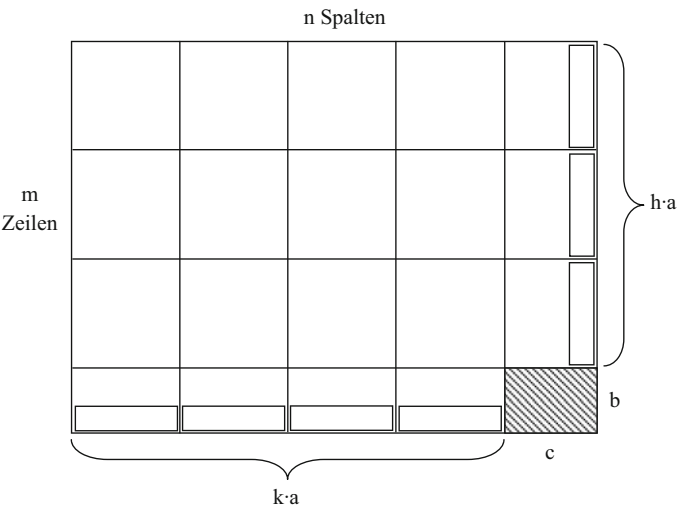
Die Idee des Beweises besteht darin zu untersuchen, was in der rechten unteren Ecke passiert.

Sei  $m = ha + b$  die Anzahl der Zeilen und  $n = ka + c$  die Anzahl der Spalten; dabei sind  $b$  und  $c$  Zahlen zwischen 0 und  $a - 1$ . Wenn  $b = 0$  oder  $c = 0$  ist, gilt unsere Behauptung. Deshalb nehmen wir  $b \neq 0$  und  $c \neq 0$  an.

Zunächst stellen wir fest, dass in den ersten  $ka$  Spalten jede Farbe gleichhäufig vorkommt (denn jede Farbe kommt in den ersten  $ka$  Zellen jeder Zeile genau  $k$  mal vor). Nun betrachten wir die restlichen  $c$  Spalten. In diesen kommt in den ersten  $ha$  Zeilen jede Farbe gleichhäufig vor (siehe Abb. 2.8).

Es bleibt ein Rechteck in der rechten unteren Ecke zu untersuchen, das  $b$  Zeilen und  $c$  Spalten hat. Wir können annehmen, dass  $c \geq b$  ist (siehe Abb. 2.9).





**Abb. 2.8** Aufteilung des  $m \times n$ -Schachbretts

**Abb. 2.9** Das Rechteck  
rechts unten

1	2	3	...	...	...	c
2	3	4	...	...	c	c+1
⋮				⋱	⋱	⋮
b	...	...	c	c+1	...	...

Behauptung: In diesem Rechteck kommt die Farbe  $c$  häufiger vor als die Farbe  $a$ .  
Da  $c < a$  ist, kommt in der ersten Zeile dieses Rechtecks die Farbe  $a$  nicht vor und in jeder Zeile tritt jede Farbe höchstens einmal auf. Demgegenüber kommt die Farbe  $c$  in jeder Zeile genau einmal vor. Insgesamt folgt, dass die Farbe  $c$  häufiger vorkommt als die Farbe  $a$ .  
Also kommen nicht alle Farben gleich häufig vor, und damit ist im Fall  $b \neq 0$  und  $c \neq 0$  keine Überdeckung möglich. □

### 2.2.3 Satz

Ein  $m \times n$ -Schachbrett sei lückenlos durch eine Mischung aus  $1 \times 4$ - und  $2 \times 2$ -Steinen überdeckt. Nun entfernt man einen  $1 \times 4$ -Dominostein und fügt einen  $2 \times 2$ -Stein hinzu. Behauptung: Mit diesem Set kann man das Schachbrett nicht überdecken!

*Warum geht das nicht?* Wir färben das Schachbrett mit den Farben 1, 2, 3, 4 wie im vorigen Satz. Das heißt, wir beginnen links oben mit der 1 und führen die Färbung dann nach rechts und unten in zyklischer Reihenfolge 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, ... fort.

Jeder  $1 \times 4$ -Dominostein überdeckt alle vier Farben, während ein  $2 \times 2$ -Stein zwei Felder der gleichen Farbe überdeckt und dafür eine Farbe gar nicht enthält. Daher kann man keinen  $1 \times 4$ -Dominostein durch einen  $2 \times 2$ -Stein ersetzen.  $\square$

## 2.3 Monochromatische Rechtecke

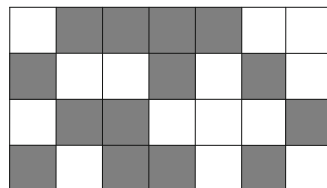
Wir betrachten wieder „Schachbretter“ beliebiger Größe, und auch bei der Färbung lassen wir jede mögliche Freiheit zu. Die einzige Forderung soll sein, dass jedes Feld entweder schwarz oder weiß gefärbt ist – sonst gibt es keine Regeln.

Wir untersuchen jetzt also Strukturen wie etwa die in Abb. 2.10 dargestellte.

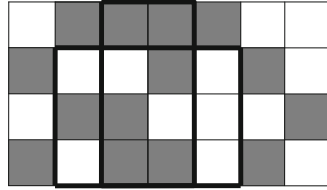
Wir stellen uns folgende Frage: Können wir ein Rechteck finden, dessen Eckfelder alle mit der gleichen Farbe gefärbt sind? Ein solches Rechteck nennen wir **monochromatisch** („einfarbig“). Im „Schachbrett“ aus Abb. 2.10 gibt es viele monochromatische Rechtecke; zwei davon sind in Abb. 2.11 zu sehen.

Wir stellen jetzt aber eine viel allgemeinere und prinzipiell viel schwierigere Frage: Kann man in jedem, noch so wild gefärbten Schachbrett wenigstens ein monochromatisches Rechteck finden?

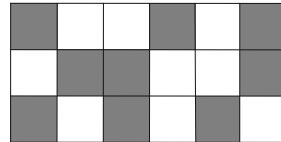
**Abb. 2.10** Ein „Schachbrett“



**Abb. 2.11** Monochromatische Rechtecke



**Abb. 2.12** Keine monochromatischen Rechtecke



Die Antwort darauf ist „nein“, und das sieht man am Schachbrett aus Abb. 2.12.

In diesem Schachbrett wird kein Mensch ein monochromatisches Rechteck entdecken! Ist also die Antwort auf obige Frage „nein“? Nein: Die Antwort ist fast immer „ja“! Genauer gesagt gilt der folgende Satz:

### 2.3.1 Satz

Wenn das Schachbrett mindestens die Ausmaße  $3 \times 7$  hat, dann gibt es immer ein monochromatisches Rechteck.

Das bedeutet: Wenn das Brett genügend groß ist, so kann sich das verrückteste Gehirn eine noch so verrückte Färbung ausdenken – wir Mathematiker können uns ruhig und gelassen zurücklehnen in der Gewissheit: Wir *wissen*, dass es ein monochromatisches Rechteck gibt.

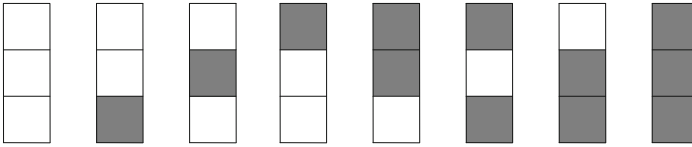
Aber zuvor müssen wir uns davon überzeugen. Dazu stellen wir uns vor: *Was wäre, wenn* es kein monochromatisches Rechteck gäbe? Dazu betrachten wir einen Streifen der Höhe 3 des Feldes und studieren die Möglichkeiten für diese Spalten.

Theoretisch könnte es die acht verschiedenen Spalten aus Abb. 2.13 geben.

Nun untersuchen wir die möglichen Kombinationen dieser Spalten genauer.

*1. Feststellung* Keine Spalte kommt doppelt vor.

Denn wenn eine dieser Spalten zweimal auf dem Feld vorkommen würde, so gäbe es ein monochromatisches Rechteck. (In jeder Spalte kommen entweder zwei



**Abb. 2.13** Alle acht verschiedenen Spalten

weiße oder zwei schwarze Kästchen vor; diese bilden die Ecken eines monochromatischen Rechtecks.)

*2. Feststellung* Die ganz schwarze Spalte ist nicht vorhanden.

Denn wenn sie vorhanden wäre, dürfte keine andere Spalte mit zwei schwarzen Feldern vorkommen – sonst hätten wir ein monochromatisches Rechteck; also könnte es höchstens fünf Spalten geben, es gibt aber mindestens sieben.

Genauso sieht man:

*3. Feststellung* Auch die makellos weiße Spalte taucht nicht auf.

Zusammen ergibt sich: Das Schachbrett kann aus höchstens sechs Spalten bestehen, nämlich aus denen, die mindestens ein weißes und mindestens ein schwarzes Feld haben.

Das bedeutet umgekehrt: Wenn das Feld mindestens sieben Spalten hat, so gibt es ein monochromatisches Rechteck.  $\square$

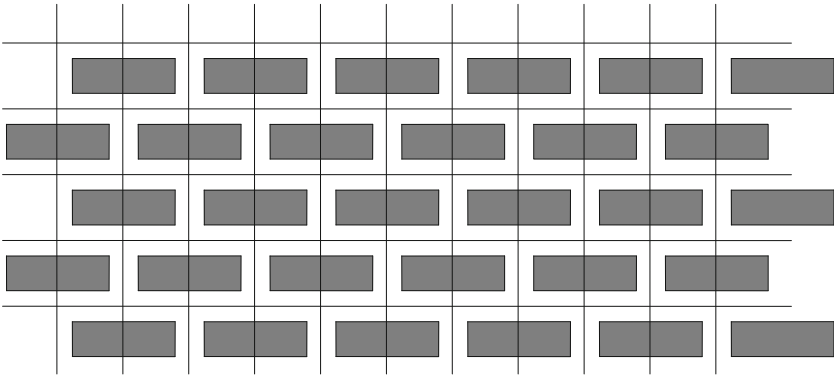
## 2.4 Eine Gewinnverhinderungsstrategie

Wir spielen folgendes Zweipersonenspiel auf kariertem Papier. Die Spieler spielen abwechselnd, indem der eine ein Feld mit einem Kreuz, der andere mit einem Krin- gel versieht. Wer zuerst eine vorgegebene Figur mit seinem Zeichen ausgefüllt hat, hat gewonnen.

Wir betrachten hier als Zielfigur das  $2 \times 2$ -Quadrat. Es wird sich herausstellen, dass es hier keine Gewinnstrategie gibt. Genauer gesagt gilt:

### 2.4.1 Satz

Der zweite Spieler hat eine Strategie, einen Sieg des ersten Spielers zu verhin- dern!



**Abb. 2.14** Dominosteine bedecken das Spielfeld

Wie geht das? Der zweite Spieler muss auf jeden Zug des ersten die richtige Antwort haben! Wie soll diese aussehen?

Der Trick besteht darin, dass sich der erste Spieler das Spielfeld auf die in Abb. 2.14 dargestellte Weise mit Dominosteinen ausgefüllt vorstellt.

Die Strategie des zweiten Spielers ist nun einfach die folgende: *Wenn immer der erste Spieler sein Kreuz in ein Kästchen malt, so macht er seinen Kringel in das andere Feld des Dominosteins, der durch das Kreuz ausgewählt wurde.*

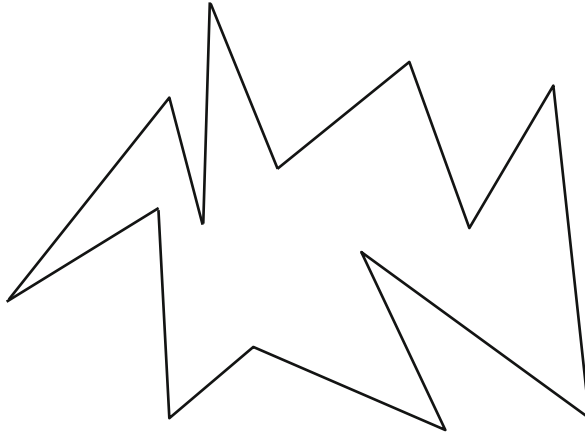
Das bedeutet, dass der erste Spieler niemals beide Felder eines Dominosteins mit seinem Zeichen versehen kann. Daher kann der erste Spieler nie gewinnen: Denn jedes  $2 \times 2$ -Quadrat enthält bestimmt einen ganzen Dominostein – und dieser Dominostein enthält sicher keine zwei Kreuze! Also kann der erste Spieler nicht gewinnen.

## 2.5 Das Museumsproblem

In Museen gibt es immer ein Problem, das Problem der Aufsicht. Jeder Winkel muss ständig überwacht werden, deshalb braucht man viele Aufseher. Aber schon aus Kostengründen möchte man mit so wenig Aufsehern wie möglich auskommen.

Das Problem lautet also: Welche Zahl von Aufsehern braucht man, um ein beliebig geformtes Museum lückenlos überwachen zu können?

Was ist ein Museum? Wir betrachten dazu folgendes mathematische Modell: Wir stellen uns vor, dass das Museum nur eine Ebene ausfüllt und dass es nicht auf zwei



**Abb. 2.15** Ein Museum

oder mehr Gebäude verteilt ist (es ist „zusammenhängend“). Ansonsten gibt es keine Einschränkung für die Architektur. Mit anderen Worten: Das Museum besteht aus dem Innern eines beliebigen Vielecks, wie etwa in Abb. 2.15.

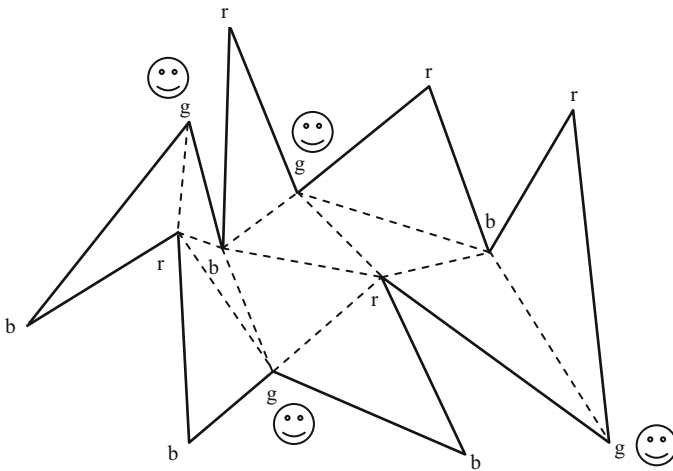
Auf den ersten Blick ist nicht klar, dass es überhaupt eine vernünftige Antwort gibt. Wenn es eine gibt, erwarten wir, dass sie von der Anzahl  $n$  der Ecken abhängt: Je mehr Ecken und Kanten das Museum hat, desto mehr Aufseher benötigt man. Die präzise Antwort ist die folgende.

### 2.5.1 Satz

Ein Museum, das ein  $n$ -Eck ist, kann stets mit  $n/3$  Aufsehern überwacht werden.

*Beweis* Der Beweis erfolgt in drei Schritten.

1. Schritt: Wir triangulieren den Grundriss. Das bedeutet: Wir ziehen virtuelle Wände ein, so dass jeder Raum die Form eines Dreiecks hat.
2. Schritt: Wir färben die Ecken jetzt so mit drei Farben, dass die Ecken jedes Dreiecks mit allen drei Farben gefärbt sind (siehe Abb. 2.16). Man kann zei-



**Abb. 2.16** Triangulierung und Färbung

gen, dass das immer funktioniert (siehe Kap. 3, Übungsaufgabe 7). Das Beweismittel ist die so genannte „vollständige Induktion“, die im nächsten Kapitel vorgestellt wird.

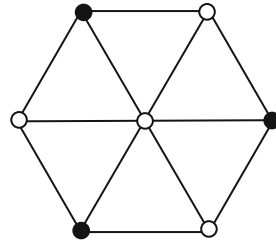
3. Schritt: Wir wählen eine Farbe aus und stellen an die Ecken dieser Farbe je einen Aufseher. Diese Aufseher überblicken insgesamt das ganze Museum, da sie je jeden (virtuellen) dreieckigen Raum überblicken.

Wenn wir die Farbe wählen, die am seltensten vorkommt (also höchstens  $n/3$  mal), erhalten wir eine Lösung des Problems mit höchstens  $n/3$  Aufsehern.  $\square$

## 2.6 Punkte in der Ebene

Nun färben wir Punkte der Ebene. Nicht nur einige wenige, sondern viele, meistens alle. Im ersten Satz färben wir nur die **Gitterpunkte**. Dies sind diejenigen Punkte  $(x, y)$  im kartesischen Koordinatensystem, die ganzzahlige Koordinaten  $x, y$  haben. Man kann sich die Gitterpunkte auch als die Schnittpunkte der Linien auf einem (unendlich großen) karierten Papier vorstellen.

**Abb. 2.17** Regelmäßiges Sechseck



### 2.6.1 Satz

Die Gitterpunkte der Ebene seien mit zwei Farben gefärbt. Dann gibt es ein Rechteck, dessen Ecken alle die gleiche Farbe haben.

*Beweis* Wir betrachten einen Ausschnitt von 3 Reihen und 9 Spalten aus dem Gitter und zeigen, dass es schon in diesem Ausschnitt ein Rechteck mit gleichfarbigen Ecken gibt.

Jede Spalte dieses Ausschnitts hat drei Gitterpunkte. Drei Punkte können auf genau 8 verschiedene Arten gefärbt werden (www, wws, wsw, sww, ssw, sws, wss, sss).

Da es 9 Spalten gibt, gibt es mindestens zwei Spalten mit derselben Farbanordnung.

In jeder Farbanordnung gibt es aber zwei Punkte, die gleich gefärbt sind.

Man nehme diese Punkte in den beiden Spalten. Diese bilden ein Rechteck mit gleichfarbigen Ecken. □

### 2.6.2 Satz

Die Punkte der Ebene seien mit zwei Farben gefärbt. Dann gibt es ein gleichseitiges Dreieck, dessen Ecken alle die gleiche Farbe haben.

*Beweis* Die Farben seien schwarz und weiß. Wir betrachten ein reguläres Sechseck zusammen mit seinem Mittelpunkt. Dies ergibt die Figur aus Abb. 2.17 mit sechs gleichseitigen Dreiecken.



Der Mittelpunkt sei weiß gefärbt. Wenn eines der sechs Dreiecke noch zwei weiße Ecken hat, ist die Behauptung gezeigt.

Also können wir annehmen, dass jede weiße Ecke des Sechsecks nur schwarze Nachbarecken hat. Wir unterscheiden nun drei Fälle.

1. Fall: Es gibt drei aufeinander
2. Fall: Es gibt keine zwei benachbarten schwarzen Ecken. Dann wechseln sich schwarze und weiße Ecke ab. Dann bilden sowohl die weißen als auch die schwarzen Ecken ein gleichseitiges Dreieck.
3. Fall: Es gibt zwei, aber keine drei aufeinander folgende schwarze Ecken. Seien die beiden unteren Ecken schwarz. Dann müssen die Ecken recht uns links weiß und die beiden oberen Ecken schwarz sein. Wir betrachten nun einen weiteren Punkt, nämlich den, der mit der weißen Ecke links und der schwarzen Ecke unten links ein gleichseitiges Dreieck bildet. Wenn dieser Punkt schwarz ist, bildet er mit den schwarzen Ecken rechts unten und links oben ein schwarzes Dreieck. Also ist dieser neue Punkt weiß.

### 2.6.3 Satz

Die Punkte der Ebene seien mit drei Farben gefärbt. Dann gibt es zwei Punkte vom Abstand 1, die die gleiche Farbe haben.

*Beweis* Die Farben seien rot, blau und gelb. Angenommen, je zwei Punkte vom Abstand 1 haben verschiedene Farbe.

Wir gehen von einem roten Punkt  $R$  aus und betrachten ein gleichseitiges Dreieck  $\triangle RBG$  der Seitenlänge 1. Nach Annahme haben die Punkte  $R, B, G$  paarweise verschiedene Farben. Sei  $B$  blau und  $G$  gelb.

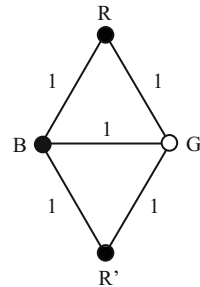
Nun betrachten wir das gleichseitige Dreieck  $\triangle BGR'$ , das durch Spiegelung an der Geraden  $BG$  entsteht (siehe Abb. 2.18).

Wieder nach Annahme muss  $R'$  rot gefärbt sein. Sei  $d$  der Abstand von  $R$  und  $R'$ .

Da diese Überlegung für jedes gleichseitige Dreieck der Seitenlänge 1 gilt, das  $R$  als Ecke hat, ergibt sich, dass der Kreis um  $R$  mit Radius  $d$  ausschließlich aus roten Punkten besteht.

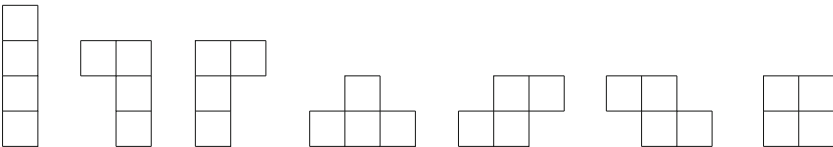
Da es auf diesem Kreis sicherlich zwei Punkte vom Abstand 1 gibt, ist der Satz bewiesen.  $\square$

**Abb. 2.18**  $\triangle RBG$  und  $\triangle BGR'$



## 2.7 Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie durch elementare Überlegungen, dass man ein  $6 \times 6$ -Schachbrett nicht mit  $4 \times 1$ -Dominosteinen vollständig und überschneidungsfrei überdecken kann.
2. Zeigen Sie, dass man jedes  $m \times n$ -Schachbrett, bei dem  $m$  und  $n$  gerade sind, mit  $4 \times 1$ -Dominosteinen und höchstens einem  $2 \times 2$ -Stein überdecken kann.
3. Ein Springer ist von einem Feld des Schachbretts aus gestartet, hat eine gewisse Anzahl von Zügen gemacht und ist zu seinem Ausgangsfeld zurückgekehrt. Warum ist die Anzahl seiner Züge eine gerade Zahl?
4. Kann man durch eine Reihe von Zügen mit einem Turm von einem Eckfeld des Schachbretts in die gegenüberliegende Ecke gelangen und dabei jedes Feld des Schachbretts genau einmal berühren?
5. Machen Sie sich klar, dass die Figuren aus Abb. 2.19 („Tetrisfiguren“, auch „Tetrominos“ genannt) alle zusammenhängenden ebenen Figuren sind, die man aus vier gleich großen Quadraten bilden kann.
6. Bestimmen Sie alle zusammenhängenden ebenen Figuren („Pentominos“), die man aus fünf gleich großen Quadraten bilden kann. (Unterscheiden Sie, wenn nötig, zwischen einer Figur und ihrem Spiegelbild!)



**Abb. 2.19** Alle Tetrisfiguren

7. Betrachten Sie folgendes Spiel für zwei Personen: Die Spieler einigen sich auf eine Tetrisfigur, die verschieden vom  $2 \times 2$ -Quadrat ist. Sie machen abwechselnd ihr Zeichen auf ein Feld eines karierten Papiers. Gewonnen hat, wer als erster mit seinem Zeichen die verabredete Figur erhalten hat. Zeigen Sie: Es gibt eine Strategie, mit der der erste Spieler 100 %-ig gewinnt.
  8. Die Gitterpunkte seien mit drei Farben gefärbt. Gibt es ein Rechteck, dessen Ecken gleichfarbige Gitterpunkte sind?
- **Didaktische Anmerkungen** In diesem Kapitel werden verschiedene überraschende Aussagen mit einem Färbungstrick bewiesen. Dies spricht begabte Schülerinnen und Schüler an, die an mathematischen Rätseln interessiert sind. So könnte sich etwa eine Mathematik-AG in der Mittelstufe mit den Fragestellungen dieses Kapitels auseinandersetzen. Insbesondere die Problemlöse- und Argumentationskompetenz werden dadurch geschult.

---

## Literatur

- Engel, A.: Problemlösestrategien. Didaktik der Mathematik **4**, 265–275 (1995)
- Engel, A.: Problem-Solving Strategies. Springer, Berlin und Heidelberg (1997). Kap. 2
- Gardner, M.: Mathematische Rätsel und Probleme. Verlag Vieweg, Braunschweig und Wiesbaden (1966)
- Golomb, S.W.: Checker Boards and Polyominoes. Amer. Math. Monthly **61**, 675–682 (1954)

Diskrete Mathematik für Einsteiger  
Bachelor und Lehramt  
Beutelspacher, A.; Zschiegner, M.-A.  
2014, XIII, 313 S. 158 Abb., Softcover  
ISBN: 978-3-658-05780-0