

VORWORT

Nach den Grundlagen der eindimensionalen Analysis im Band *Etwas Analysis* geht es nun um den Einstieg in die mehrdimensionale Analysis. Das Ziel ist wieder, das Wesentliche möglichst klar und einfach zu beschreiben und die Notation überschaubar zu halten, auch wenn sie notgedrungen etwas komplexere Gestalt annimmt.

Einen sanften Einstieg bilden Kurven, also stetige Abbildungen eines eindimensionalen Intervalls in einen Raum beliebiger Dimension. Dabei geht es vor allem um die Kategorien der stetigen, differenzierbaren sowie rektifizierbaren Kurven. Die Identifikation verschiedener Kurven über stetige Parametertransformationen führt zum Begriff des Weges und damit zu einem ersten Kontakt mit der Idee der Mannigfaltigkeit, auch wenn das hier nicht so ausgesprochen wird.

Die mehrdimensionale Differenziation und Analysis stehen im Mittelpunkt der nächsten beiden Kapitel. Die von nun an unverzichtbare lineare Algebra repetieren wir kurz, doch machen wir keinen Versuch, einen gründlichen Kurs zu ersetzen.

Eine zentrale Stellung nimmt der Umkehrsatz ein, ohne Zweifel einer der wichtigsten Sätze der Analysis. Wir beweisen ihn zuerst detailliert in der Kategorie lipschitzstetiger Abbildungen mit dem Banachschen Fixpunktsatz. Dieser Beweis funktioniert tatsächlich in beliebigen Banachräumen. Differenzierbarkeit ist dann lediglich ein Regularitätsargument in der Art, wie man es ohnehin öfter braucht.

Der Implizite-Funktionen-Satz schließt sich in klassischer Weise an und führt zur Betrachtung regulärer Werte und eingebetteter Mannigfaltigkeiten. Diese sind auch der natürliche Ort für Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen.

Das vierte Kapitel greift das Thema der Kurven in Gestalt des Wegintegrals wieder auf. Nur in dieser Form taucht das Integral in diesem Band übrigens auf, und dafür ist das im ersten Band entwickelte Cauchyintegral völlig ausreichend. Die Differenzialformen haben hier ihren ersten Auftritt in Gestalt der Pfaffschen oder 1-Formen. Geschlossene und exakte 1-Formen werden studiert bis hin zum klassischen Satz, dass auf einfach zusammenhängenden Gebieten jede lokal exakte 1-Form eine Stammfunktion besitzt.

Die letzten vier Kapitel greifen das Thema der Kurven in nochmals anderer Form auf, und zwar als Integralkurven gewöhnlicher Differenzialgleichungen und Vektorfelder. Die Studierenden erhalten hier einen ersten Einblick in das schöne Gebiet der dynamischen Systeme.

Den Anfang bildet die Theorie der linearen Differenzialgleichungen, die noch nicht die allgemeinen Existenzsätze benötigen. Unter anderem wird die Geometrie zweidimensionaler linearer Differenzialgleichungen ausführlich diskutiert wie auch von reellen Systemen mit rein imaginären Eigenwerten, die zum Studium linearer Strömungen auf Torusflächen führen.

Das nächste Kapitel behandelt allgemeine nichtlineare gewöhnliche Differenzialgleichungen erster Ordnung, sprich Vektorfelder, und deren Flüsse. Um lästige Komplikationen mit deren Definitionsbereichen zu umgehen, setzen wir diese zunächst auf den Gesamtraum fort – in der Kategorie lipschitzstetiger Vektorfelder ist dies unkompliziert. Der allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitssatz wird dann global formuliert, einschließlich der stetigen Abhängigkeit von den Anfangswerten unter Verwendung gewichteter Normen. Den Abschluss bildet der Rektifizierungssatz lokal um reguläre Punkte – der einfachste Satz in der Klassifizierung von Vektorfelder.

Die letzten beiden Kapitel geben einen kleinen Einblick in die lokale Stabilitätstheorie von Gleichgewichtspunkten und periodischen Lösungen sowie die Idee der Normalform. Hier beweisen wir die klassischen Sätze von Lyapunov und von Hartman-Grobman für Attraktoren, den Fortsetzungssatz von Poincaré für periodische Lösungen und den Satz von Floquet über die Existenz einer konstanten Form der Variationsgleichungen entlang einer periodischen Lösung.

Zu allen Kapiteln gibt es wieder zahlreiche Aufgaben, und die Leserin und der Leser sollten weiterhin versuchen, so viele wie möglich zu bearbeiten. Lösungen gibt es auf der Webseite des ersten Bandes, www.etwas-analysis.de.

Zum Umfang Der Umfang von *Etwas Analysis* und *Etwas Mehr Analysis* geht sicher über das hinaus, was in einer zweisemestrigen Vorlesung vermittelt werden kann. Das Wesentliche des ersten sowie die ersten sechs Kapitel dieses Bandes können dagegen durchaus in zwei Semestern bewältigt werden. So bleibt im dritten Semester Zeit für das Lebesgueintegral, die Integration auf Mannigfaltigkeiten, die Vektoranalysis und einiges andere, was im dritten Band *Noch Mehr Analysis* behandelt wird.

Zur Notation Ein Verweis wie ^{1,9,23} bezieht sich auf den ersten Band *Etwas Analysis*.

Zum Schluss Auch hier gebührt mein erneuter Dank Ulrike Schmickler-Hirzebruch für die effiziente und erfreuliche Zusammenarbeit mit dem Springer-Verlag.

Nagold, den 31. März 2014

Etwas mehr Analysis

Eine Einführung in die mehrdimensionale Analysis

Pöschel, J.

2014, X, 292 S. 93 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-05859-3