

2 A. L. Cauchys Summentheorem

„[...] we do not want to leave the reader with the impression that Cauchy made modern distinctions that he did not actually make.“

- Bradley & Sandifer 2009, 21.

2.1 Umberto Bottazzini: Mathematische Strenge als *historical concept*

Im Jahre 1784 wurde an der Berliner Akademie ein Preis auf diejenige Einsendung ausgeschrieben, welche die Grundlagen der Analysis klar und präzise beschreibe - ausgehend von den zwei gegensätzlichen Ansichten Eulers und d'Alemberts über das Unendliche in der Mathematik. Darüber hinaus wurde eine Erklärung gefordert, wie aus einer solch widersprüchlichen Annahme über das Infinitesimale so viele wahre Aussagen zu folgern möglich ist. Man verlangte die Substitution durch ein anderes, *echtes* mathematisches Prinzip. Trotz einer späteren Preisverleihung, konnten die genannten Anforderungen von niemandem erfüllt werden.

Bottazzini betont, dass für das 18. Jahrhundert vor allem der Briefwechsel der führenden Mathematiker (und weniger deren Publikationen) aufschlussreiche Quellen der Wissenschaftsforschung darstellen. „After the [french] revolution this situation changed radically [...]“ (Bottazzini 1986, 44). In Frankreich entstand die einflussreiche *École polytechnique*. „The french ecoles were founded with the specific objective of creating a large class of engineers and technicians which could serve the military and economic needs of the revolutionary France ...“ (ibid., 46). Viele große Mathematiker der Zeit nahmen dort eine Lehrtätigkeit an, eine Entwicklung mit weitreichenden Folgen. „With the foundation of the *grandes écoles* the former academicians became the new professors, a change that caused an irreversible shift in the way of viewing and exercising the role of the mathematician.“ Abgesehen von Gauss, den Bottazzini noch als einen Geist des vergangenen Jahrhunderts bezeichnete, wurde die Lehre ein fester Bestandteil der mathematischen Arbeit. Dies und eine weiter zunehmende Verbreitung und Verschriftlichung in Form von „Fachzeitschriften“ machte Paris zu einem bedeutenden Zentrum für Mathematiker in ganz Europa. Die aufstrebende Strenge der Mathematik im 19. Jahrhundert, die als Folge dieser Entwicklung durch A. L. Cauchy vorangetrieben wurde, bewirkte, dass Lagranges Werk und sein Gebrauch unendlicher Reihen durch die Forderung nach Konvergenzbeweisen in die Kritik geriet. Seine „algebraic analysis“ genügte den Ansprüchen des 19. Jahrhunderts nicht mehr.

In der Einführung zum *Cours d'analyse* gibt (Bottazzini 1992) einen Abriss der Mathematikgeschichte um die Jahrhundertwende im Hinblick auf die neuen Anforderungen an die Mathematik. An der Schwelle zum 19. Jahrhundert zeichneten sich folgende Probleme ab:

„By about 1800 the mathematicians began to be concerned about the looseness in the concepts and proofs of the vast branches of analysis. The very concept of a function was not clear; the use of series without regard to convergence [...] had produced paradoxes and disagreements“ (Bottazzini 1992, XV).

Diese Unstimmigkeiten wurden durch Fouriers Ansatz der Darstellung durch trigonometrische Reihen noch verstärkt. All dies bekräftigte die Forderung nach einer strengen Fundie-

rung der Analysis. Diese Strenge ist allerdings nicht mit dem heutigen modernen Standard zu vergleichen: „The point is that mathematical rigour is in itself a historical concept and therefore in process“ (Bottazzini 1992, XV). Tatsächlich, so Bottazzini, hatten die Mathematiker des 18. Jahrhunderts (und ebenso ihre Kollegen hundert Jahre später) ihre eigene, kontextabhängige Strenge.²⁵ Hieraus formuliert Bottazzini seine historische Zielsetzung, die darin besteht, in der Arbeit der damaligen Wissenschaftler nicht die heute gewohnte Strenge zu suchen, sondern zu untersuchen, wie und weshalb *deren* Konzept von Strenge Veränderungen durchlebte. Die aus heutiger Sicht geläufige Unterscheidung von reiner und angewandter Mathematik könnte man demnach auch als *historical concept* verstehen. Der Versuch, diese Trennung für die Mathematik des 18. Jahrhunderts vorzunehmen, sei eine „interpretative“ Anwendung moderner Kategorien, die es zum damaligen Zeitpunkt nicht gab („This distinction did not exist at this time, and would not do so for several decades to come“, 1986, 59).

Damit spricht er sich auch aus methodologischer Sicht gegen eine zu stark gegenwartsbezogene Wissenschaftshistoriographie aus. Cauchys *Cours* sollte nach Bottazzini hierbei unter folgenden Fragestellungen beleuchtet werden:

- „What were in fact the connections of his work with previous mathematics?“
- „Was his work revolutionary?“
- „What should one think of his ‘errors’?“

2.2 Beweise als Mittel zum Verständnis der Meta-Mathematik

Die Metaphysik oder Meta-Mathematik, die ein Mathematiker seiner Arbeit zugrunde legt, gehe nach Bottazzini am klarsten aus dessen Beweisen hervor: „[...] often the metaphysics presented in the introduction of a book looks quite different from the actual methods which are used in proving theorems and in obtaining results in the rest of the book“ (1992, XXXVIII). Diese Methode soll auch für die Analyse der Mathematik Cauchys angewendet werden. Für das Themenfeld der Summentheoreme werden seine Beweise von 1821 und 1853 beleuchtet und diskutiert.

2.3 Zur Person A. L. Cauchy

In der Mathematikhistoriographie lässt man die Geschichte der gleichmäßigen Konvergenz traditionell mit dem Wirken des französischen Mathematikers Augustin Louis Cauchy (1789-1857) beginnen. Der junge Cauchy, der zu den bedeutendsten Mathematikern der Geschichte aufstieg (es wurden über neunhundert Abhandlungen von ihm veröffentlicht), wurde zunächst von seinem Vater unterrichtet und besuchte auf Anraten von Lagrange ab 1802 für zwei Jahre die École Centrale du Panthéon. 1805 bestand er die Aufnahmeprüfung der École Polytechnique. Er studierte bis zu seinem Abschluss im Jahre 1807 bei Lacroix, de Prony, Hachette und Ampère. Nach seinen praktischen Arbeitsjahren in Cherbourg, bei der er für die Marine Napoleons arbeiten musste, strebte Cauchy eine akademische Laufbahn an. Mit der Restauration der Monarchie 1815 konnte er wegen seiner ultra-katholischen Verbindung an der École polytechnique eingesetzt werden. Im Analysis-Kurs alternierte er mit André-Marie

²⁵ „Eighteenth-century mathematicians claimed to be rigorous and actually they were rigorous according to the standards of their time“ (Bottazzini 1992, XV).

Ampère (1775-1836), der seit 1816 sein Kollege war.²⁶ Bis zu seinem freiwilligen Exil 1830 entstanden mehrere wichtige Lehrbücher, darunter auch das *Cours d'analyse* (1821), das als berühmtes Werk zum Richtmaß der neu entdeckten mathematischen Strenge aufstieg. Cauchy war der erste, der mit dieser Arbeit eine strenge Untersuchung der Konvergenzbedingungen unendlicher Reihen anstellte und auch (in gewissem Umfang, s. unten) erreichen konnte. Das Lehrbuch kann als Versuch angesehen werden den *calculus* und seine fundamentalen Theoreme streng zu entwickeln. Für die Lehre an der École Polytechnique konzipiert, galt es fortan als erste Realisierung der Strenge in mathematischer Begriffsbildung. Judith Grabiner legt dar, dass die „revolutionäre“ Transformation von der Mathematik des 18. Jahrhunderts zur *strenge* des 19. Jahrhundert auf Cauchys Arbeiten beruhte (1981, 15). Nach Jesper Lützen habe sie in der Verbindung zwischen Begriffsdefinitionen und Beweisführung bei Cauchy die Ansätze der heutigen Epsilon-Delta-Notation erkannt.²⁷

Hans Freudenthal hat speziell für den Stetigkeitsbegriff autoritativ erklärt: „Cauchy invented our notion of continuity“ (Freudenthal 1970, 136). Die Bestrebung einer streng aufgebauten Analysis entsprach nicht der Lehr-Konzeption der École.

2.4 Der berühmte Satz über die Summation stetiger Glieder

In der folgenden Darstellung wird, neben der französischen Originalarbeit (Cauchy 1821), auch die deutsche Ausgabe (Itzigsohn 1885) und die kommentierte englische Übersetzung der Autoren R. E. Bradley und C. E. Sandifer (Bradley-Sandifer 2009) herangezogen. Cauchy führt unendliche Reihen und ihre Lehrsätze in Kapitel 6 ein.

2.4.1 Die Vorarbeit zu konvergenten Reihen

Zu Beginn erklärt Cauchy seine Notation für Reihen, wie sie auch von J. Grabiner aufgegriffen und verwendet wurde. Im Detail sind dies die Bezeichnungen für Reihen, Partialsummen und deren Glieder. Die erste und von Cauchy als „the simplest series“ bezeichnete Reihe ist die geometrische Progression (geometrische Reihe), deren Formel für die Partialsummen aufgestellt, aber nicht bewiesen wird. Es folgt eine größtenteils verbale Darstellung dessen, was wir heute unter dem *Cauchy'schen Konvergenzkriterium* verstehen. Im Anschluss gibt Cauchy genaue Angaben über die Konvergenzbedingung der geometrischen Progression und gibt zusätzlich ein Beispiel für eine Reihe, welche die notwendige, nicht aber die hinreichende Bedingung für Konvergenz erfüllt. Er zeigt, dass die harmonische Reihe nicht konvergiert (Itzigsohn 1885, 87 f.). Cauchy sieht darin einen *neuen* Beweis für die Divergenz dieser Reihe, die englischen Übersetzer dagegen schreiben:

²⁶ „Therefore it [Ampères Vorlesungen *Précis des leçons sur le calcul différentiel et le calcul intégral*] can properly be compared with the first part of Cauchy's *Résumé*.” Dieser Vergleich wird durch fast identischen Begriffsgrundlagen beider Werke möglich, so Bottazzini (1992, LXXXIII f.). Nach neueren Forschungen (Schubring) gibt es aber sowohl Analogien als auch deutliche Unterschiede.

²⁷ „[it] has been pointed out in particular by Grabiner all these ingredients are clearly present when Cauchy starts using his concepts in proofs“ (Lützen 2003, 161).

„Cauchy may not be claiming originality for this ›new‹ proof. It was first given by Oresme²⁸ [...], but Cauchy was probably not aware of it“ (Bradley-Sandifer 2009, 88 f.).

2.4.2 „Satz und Beweis“

Cauchy stellt vor der Aufstellung seines berühmten und gleichzeitig strittigen Theorems seinen Beweis vor, den er selbst nur als *remarque* betitelt. Der Beweis ist auf ein Minimum an formaler Notation beschränkt und umfasst nur verbale Argumentationen. Dieser Stil lässt bereits an der mathematischen Strenge zweifeln. Der Definitionsbereich der Veränderlichen x bleibt unbekannt. Wir wissen nur, dass es möglich sein soll, gewisse Umgebungen (fr. *voisinages*) zu bilden. Eine Argumentschreibeweise der Art $f(x)$, wie sie Dirksen 1829 einführt, fehlt. Die deutsche Übersetzung dieses *Beweises* lautet:

„Wenn die Glieder der Reihe (1) [d. h. $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n + \dots$] nur eine einzige Veränderliche x enthalten, diese Reihe convergent ist und ihre verschiedenen Glieder in der Umgebung eines der Veränderlichen beigelegten besonderen Wertes stetige Functionen von x sind, so werden auch s_n, r_n und s drei Functionen der Veränderlichen x sein, von denen die erste offenbar in der Umgebung des besonderen Wertes, um den es sich hier handelt, stetig in Beziehung auf x ist. Unter diesen Voraussetzungen wollen wir untersuchen, welche Zunahmen diese drei Functionen erfahren, wenn man x um eine unendliche Zahlgrösse α wachsen lässt. Die Zunahme von s_n ist für alle möglichen Werte von n eine unendlich kleine Zahlgrösse, und die von r_n wird kaum wahrnehmbar sein, wenn man dem n in r_n sehr grosse Werte beilegt. Die Zunahme der Function s wird demnach nur eine unendlich kleine Zahlgrösse sein können“ (Itzigsohn 1885, 90).

Cauchy betrachtet für seine Argumentation die Inkremente der beiden Teilreihen. Die Inkremente der Reihe s_n werden unendlich klein, dies kann Cauchy für ein vorher gewähltes x annehmen, da die Functionen u_0, \dots, u_n stetig sind. Der Ausdruck s_n ist demnach stetig.

Wie gebraucht Cauchy die Konvergenz der Restreihe r_n um letztlich zur Stetigkeit von s zu gelangen? Für die Wahl der entsprechend großen Werte der Grösse n erscheint es legitim, eine untere Schranke $N \in \mathbb{N}$ einzuführen, so dass der Sinn der Aussage „The increment of r_n , as well as r_n itself, becomes infinitely small for very large values of n “ nicht verfälscht wird. Das Inkrement soll den Funktionswert von r_n für $x + \alpha$ bezeichnen und kann als $r_n(x + \alpha)$ verstanden werden. Dies vorausgesetzt, kann man den Versuch unternehmen, die folgende Konvergenzbedingung sinngemäß abzuleiten: *Sei x gegeben, dann existiert ein N derart, dass $r_n(x + \alpha)$ ausreichend klein wird, sobald n größer als N wird.*

Obwohl Cauchy die Funktionsargumente nicht formal angibt, könnte man r_n als Grösse ansehen, die schlechthin alle x -Werte annimmt. Er könnte also gemeint haben: *Das Inkrement $r_n(x + \alpha)$ und $r_n(x)$ selbst (d. h. für sämtliche x) wird für beliebig große n unendlich klein.* Auch auf dieser Interpretationsgrundlage ist Gleichmäßigkeit nicht nachweisbar. Ein Maß für die kleiner werdenden r_n (für das heute häufig ein Epsilon einsteht) und folglich die Abhängigkeitsverknüpfung zu der Wahl von n fehlen vollständig: Eine Entscheidung zu Gunsten eines *streng* definierten Konvergenzbegriffes ist dadurch *per se* unmöglich. Cauchy bringt mit

²⁸ Nikolaus von Oresme (1330–1382) war ein französischer Bischof und ein bedeutender Naturwissenschaftler des 14. Jahrhunderts. Sein Beweis in der dort angeführten lateinischen Quellen ist allerdings nur ein verbaler Beweis ohne die Benutzung von Symbolik.

dieser letzten Überlegung seinen Beweis zu Ende: „Die Zunahme der Funktion s wird demnach nur eine unendlich kleine Zahlgrösse sein können“ (Itzigsohn 1885, 90). So folgt die Behauptung seines Theorems.²⁹ In seiner ursprünglichen Form wurde dieser Satz wie nachstehend vorgetragen:

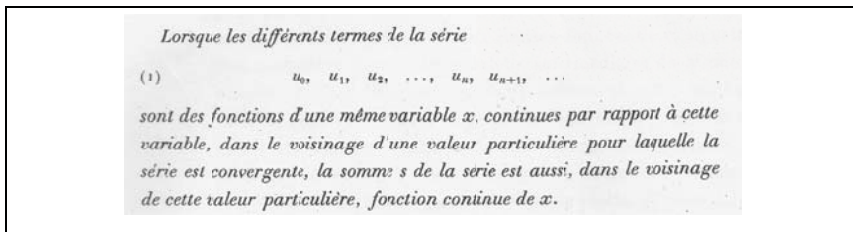


Abbildung 1: Das erste Summentheorem von Cauchy. Quelle: Cauchy 1853.

Die Übersetzer Bradley und Sandifer kommentieren den kontrovers diskutierten Satz, ohne neue Denkanstöße zu liefern, mit der obligatorisch gewordenen Einschätzung, die Richtigkeit des Theorems könne wiederhergestellt werden, setze man den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz voraus: „If we impose the additional condition of uniform convergence on the functions s_n , then it does hold. This theorem is controversial. Some have argued that Cauchy really had uniform convergence in mind“ (2009, 90).³⁰

Die darauffolgenden Theoreme dieses Paragraphen sind unter den folgenden, heute gebräuchlichen Namen zum Grundstoff der Reihenlehre geworden: Das Wurzel- und Quotientenkriterium, der *Logarithmic Convergence Test* und das Kriterium für alternierende Reihen.

2.4.3 Die binomische Erweiterung

Wie U. Bottazzini (1986) in seiner Einleitung zum *Cours* schreibt, führt Cauchy zur Anwendung seines Summentheorems drei Problemstellungen ein, von denen das erste die Reihenentwicklungen des Terms $(1+x)^m$ liefern soll und zum Ergebnis des binomischen Lehrsatzes führt. Seine Anwendungen seien für Cauchy ein Grundpfeiler der reellen Analysis, d. h. „from this point of view one can better understand the role of the concepts Cauchy introduced all along his *Cours*“ (Bottazzini). Isaac Newton erweiterte das binomische Theorem, das bereits für natürliche Zahlen m bekannt war, auf rationale Zahlen:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + m \frac{(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots$$

²⁹ In der Übersetzung von Bradley und Sandifer lautet der Satz: „When the various terms of series (1) [$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n + \dots$] are functions of the same variable x , continuous with respect to this variable in the neighborhood of a particular value for which the series converges, the sum s of the series is also a continuous function of x in the neighborhood of this particular value“ (S. 90).

³⁰ Arsac kritisiert an Cauchys Beweis die fehlende Notation für Variablen und Ungleichungen. Als Schwierigkeit sieht er auch dessen „notion de limite associée“, der die nötige mathematische Strenge vermissen lässt (Arsac 2013, 64). Damit entzieht Arsac ihm aus moderner Sicht die Grundlagen für die Kenntnis einer spezielleren Konvergenzform wie die der gleichmäßigen Konvergenz.

Seither hat man versucht die Gültigkeit für beliebige (reelle bis komplexe) Koeffizienten μ zu zeigen. Cauchy will dieses Ergebnis für reelle Größen μ weiterentwickeln: Die allgemeine Folge $1, \frac{\mu}{1}x, \mu \frac{(\mu-1)}{1 \cdot 2}x^2, \dots$ ist für x -Werte zwischen -1 und $+1$ konvergent, so Cauchy. Als Anwendung seines Summentheorems (die Folgenglieder sind stetig in μ) ist die Funktion $\varphi(\mu) = 1 + \frac{\mu}{1}x + \mu \frac{(\mu-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots$ stetig in μ , und zwar zwischen beliebigen Grenzen von μ . Nach einem früheren Theorem findet Cauchy für diese Summe die Eigenschaft $\varphi(\mu) \cdot \varphi(\mu') = \varphi(\mu + \mu')$ (Itzigsohn 1885, 109). Des Weiteren gilt $\varphi(1) = 1 + x$. Zusammen ergibt sich dann $\varphi(\mu) = \varphi(1)^\mu = (1 + x)^\mu$ (ibid., 113). Für diesen Beweis des binomischen Lehrsatzes ist also der Gebrauch des problematischen Summentheorems zentral.

2.4.4 Mehrfachen Grenzwertprozessen bei Cauchy

In der bisherigen Literatur ging man davon aus, Cauchy habe mehrfache Limesbildung bereits berücksichtigt und in moderner Weise mathematisch streng behandelt. Das folgende Beispiel zeigt jedoch, dass diese Behauptung nicht zutreffend ist und Cauchy offenbar keine explizite Auseinandersetzung mit dieser für die Anwendung der gleichmäßigen Konvergenz so folgenreichen Unterscheidung vornimmt.

Im Jahre 1814 (1825 publ.) untersuchte Cauchy nicht-konvergente Integrale, bei denen die zu integrierenden Funktionen ihre Werte *plötzlich verändern* („d’une maniere brusque“, Cauchy 1814, 404) – sie besitzen, modern gesagt, Singularitäten. Im Abschnitt SUR LA CONVERSION DES INTÉGRALES INDÉFINIES EN INTÉGRALES DÉFINIES löst Cauchy diese Integrale durch den sogenannten *valeur principale*, der heute als Cauchyscher Hauptwert oder *Cauchy principal value* bezeichnet wird. Es ist ein gängiges Verfahren, einem divergenten Integral einen Wert durch Limesbildung zuzuordnen. In einer modernen Fassung mit Z als die einzige Singularität einer Funktion in dem betrachteten Intervall, bezeichnet dieser Begriff folgenden Grenzwert:

$$\mathcal{P} \int_{b'}^{b''} \varphi'(z) dz = \lim_{\xi \rightarrow 0+} \left(\int_{b'}^{Z-\xi} \varphi'(z) dz + \int_{Z+\xi}^{b''} \varphi'(z) dz \right).^{31}$$

Cauchy definiert die rechte Seite allerdings ohne eine entsprechende Limesnotation und schreibt stattdessen $\varphi(b'') - \varphi(b') - \Delta$. Der Grenzwertprozess verbirgt sich hinter der Größe Δ ; sie ist gleich $\varphi(Z + \zeta) - \varphi(Z - \zeta)$, wobei ζ als beliebig klein angenommen wird (ibid., 403; existieren im Integrationsbereich weitere Größen Z', Z'', \dots , so muss der obige Term um entsprechende Δ', Δ'', \dots verringert werden).

Mit dieser Methode stellt Cauchy fest, dass der *valeur principale* von $\int_{-2}^{+4} \frac{dz}{z}$ und das bestimmte Integral $\int_{+2}^{+4} \frac{dz}{z}$ beide gleich $\ln 2$ sind und $\int_{-2}^{+2} \frac{dz}{z}$ folglich verschwinden muss (ibid., 405). Wenn wir das obige Integrationsintervall $[-2; 4]$ zu $[-a; 2a]$ verallgemeinern, erhalten wir folgenden *valeur principale* in der von Cauchy angegebenen Art:

³¹ Die „ \mathcal{P} “-Notation ist eine von mehreren, gebräuchlichen Schreibweisen für den *Cauchy principal value*.

$$\int_{-a}^{+2a} \frac{dz}{z} = \ln(2a) - \ln(-a) - \Delta.$$

Die rechte Seite ist nur dann definiert und gleich $\ln 2$, wenn man zuerst ξ unendlich klein werden lässt, bevor a unendlich groß wird. Umgekehrt gilt $\int_{-a}^{+2a} \frac{dz}{z} \approx \int_{-a}^{+a} \frac{dz}{z} = 0$. Zu dem Ergebnis, dass die Vertauschung der Grenzwertprozesse nicht erlaubt ist, gelangt Cauchy nicht, obwohl er in (ibid., 405) bereits den entscheidenden Schritt geleistet hat.

2.5 Probleme der Modernisierung

2.5.1 Hat Cauchy absolute Konvergenz eingeführt?

Im Abschnitt *Des Séries qui renferment des termes positifs et des termes négatifs* des sechsten Kapitels findet man den folgenden Satz, der zum Ausgangspunkt der Interpretation gemacht wird, Cauchy habe absolute Konvergenz in seinem Lehrbuch *Cours d'analyse* eingeführt:

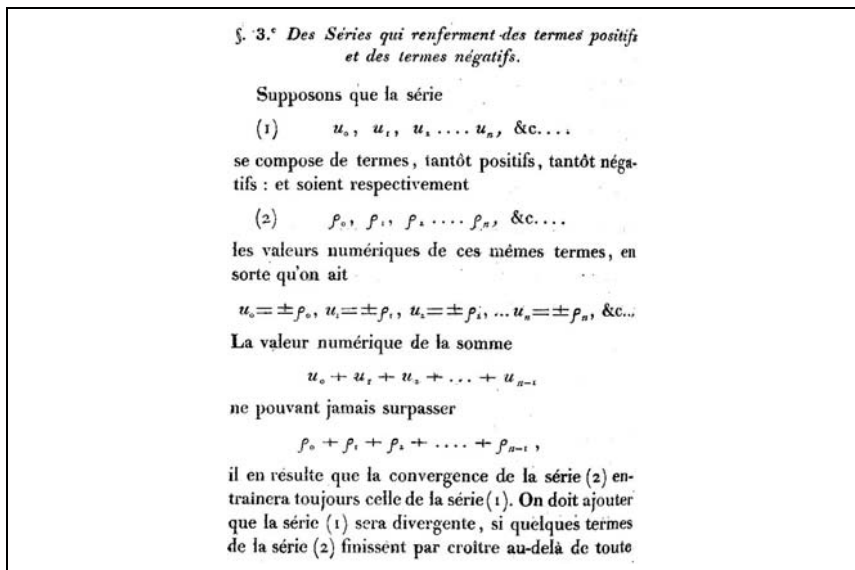


Abbildung 2: Der *valeur numérique* einer Summe (Bottazzini 1992, 142).

Es lassen sich hier zwei Resultate erkennen. Zum einen, dass der numerische Wert der Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ niemals die Summe der Reihe $p_0 + p_1 + p_2 + \dots$ übersteigt, und zum anderen und als Konsequenz, dass die Konvergenz der letzten die der ersten Reihe nach sich zieht.

Die Übersetzer Bradley und Sandifer bemerken dazu, dass Cauchy, ohne absolute Konvergenz zu besitzen, aus dieser die „normale“ Konvergenz folgert („Cauchy does not define absolute convergence, but has essentially shown here that absolute convergence implies con-

vergence“, S. 97). Diese Auslegung ist aus moderner Sicht richtig und mit der Definition der absoluten Konvergenz vereinbar.

Aus mathematikhistorischer Sicht existiert die Eigenschaft der absoluten Konvergenz aber hier nur in der Vorstellung der Übersetzer und deren Auslegung der Cauchy'schen Arithmetik: Denn es gilt $u_j = \pm \rho_j \leq \rho_j$ im Kontext der Reihenlehre; um absolute Konvergenz nachweisen zu können, müsste in Cauchys Mathematik eine Unterscheidung zwischen verschiedenen Konvergenzformen getroffen worden sein. Dies ist aber nicht Fall und so ist eine Abgrenzung zur „normalen“ Konvergenz im Rahmen der Cauchy'schen Begriffsbildung nicht möglich.

Ebenso existierte keine moderne Notation für absolute Konvergenz: Der Absolutbetrag war keine von Cauchy angewandte Symbolik und sie war allein wegen der Unterscheidung Cauchys zwischen Zahlen (*nombres*) und Größen (*quantités*) nicht erforderlich. Dessen ungeachtet sprechen Bradley und Sandifer von Cauchys Notation der absoluten Konvergenz. Dies geschieht explizit in der Kommentierung des folgenden Theorems:

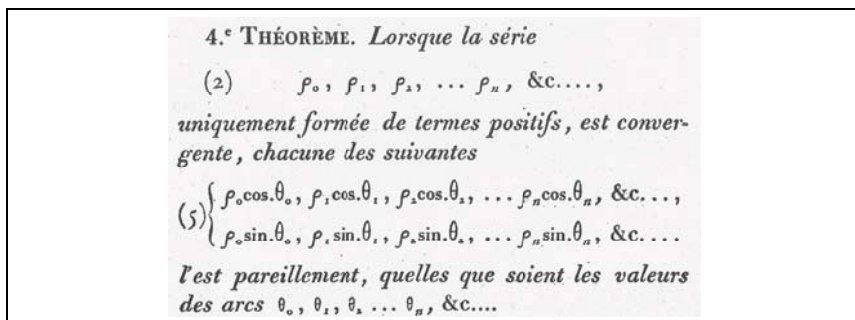


Abbildung 3: Ein Konvergenzkriterium für unendliche Reihen (Cauchy 1821, 146).

Die Konvergenz der Reihe der positiven Ausdrücke $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}, \rho_n, \dots$ führt zu der Konvergenz der Reihe $\rho_0 \cos(\theta_0) + \rho_1 \cos(\theta_1) + \dots + \rho_{n-1} \cos(\theta_{n-1}) + \dots$. – „This is another implicit application of the Comparison Test and Cauchy’s notion of absolute convergence“ (S. 99).³² Auch hier liegt nicht der Gebrauch der absoluten Konvergenz vor. Cauchy arbeitet hier auf der Basis seines Zahlbegriffes und der Unterscheidung zwischen Zahlen und Größen.

2.5.2 Gibt es den Limes superior in Cauchys Konvergenzkriterien?

Im Sinne des modernen Quotientenkriteriums stellt Cauchy für Reihen mit Gliedern u_n die folgende Konvergenzbedingung auf: Existiert der Grenzwert von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ für unendlich große n -Werte betrachtet, so entscheiden die Fälle „ < 1 “ oder „ > 1 “ über die Konvergenz der Reihe $\sum u_n$.

Im letzten Paragraphen (DES SÉRIES ORDONNÉES SUIVANT LES PUISSANCES ASCENDANTES ET ENTIÈRES D’UNE VARIABLE) überträgt er diese Idee auf Potenzreihen wie $a_0, a_1 x,$

³² Der sog. „Comparison Test“ ist ein weiteres Mittel zur Entscheidung, ob eine unendliche Reihe konvergiert oder nicht. Cauchy benennt diese Methode nicht und verwendet sie, wie Bradley und Sandifer auch anmerken, meist implizit. Das Verfahren ist heute unter dem Namen „Majorantenkriterium“ bekannt.

$a_2x^2, \dots, a_nx^n, \dots$. Bradley und Sandifer schlagen als konfliktfreie Übersetzung den Ausdruck $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ für den von Cauchy verbal eingeführten Grenzwert A vor und behaupten darüber hinaus:

„[...] his statements of theorems I and II below and the discussion in between suggest that he means $A = \lim \sup \sqrt[n]{|a_n|}$ “ (Bradley-Sandifer 2009, 102, FN 23).³³

Cauchy bezeichnet mit A den Limes der n -ten Wurzel aus dem betragsmäßig größten a_n für fortlaufende Werte von n , so dass die entsprechende Potenzreihe für x -Werte zwischen $\pm \frac{1}{A}$ konvergiert. Auf dieser Grundlage entstand später der Begriff des Konvergenzradius, den Cauchy in einem Manuskript der beiden Mathematiker C. Briot und J.-C. Bouquet kennenlernte (1853). Kurze Zeit später und vermutlich als Reaktion hierauf formulierte Cauchy die Revision seines ursprünglichen Summentheorems. Hierüber wird im weiteren Verlauf noch zu sprechen sein.

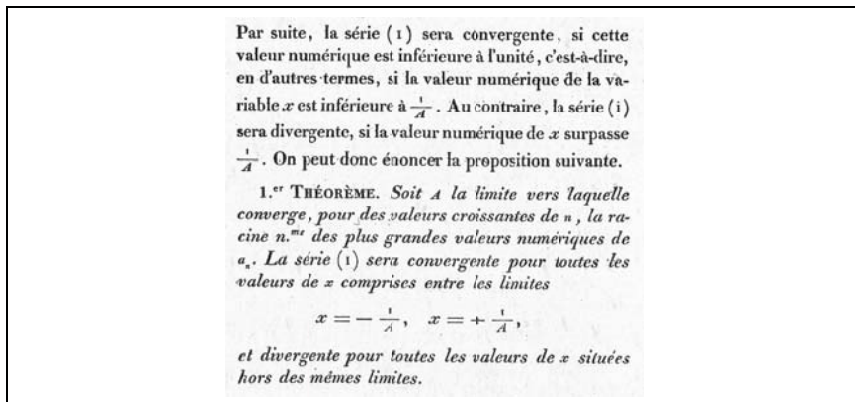


Abbildung 4: Ein THÉOREME über die Konvergenz von Potenzreihen (Cauchy 1821, 151).

Cauchy bezieht sich in Abbildung 4 auf die Reihe von $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$. Er ist aber nicht ausreichend explizit, wenn er den Term A beschreibt, und ein Beweis für THÉOREME I wird nicht geliefert. Stattdessen gibt er Anwendungsbeispiele in der Gestalt von Korollar I und II. In Abbildung 5 erkennt man, dass Cauchy den Grenzwert A für die Reihen von $(n+1)x^n$ und $\frac{x^n}{n}$ angibt. Die Folgen $1 + \frac{1}{n+1}$ und $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ besitzen aber nur einen Häufungspunkt. Der *Limes superior* und der Grenzwert sind in beiden Fällen identisch. Damit bleibt unklar, ob Cauchy eine begriffliche Abgrenzung zum modernen *Limes superior* vorgenommen hat. Die Formulierung „... des plus grandes ...“ kann also nicht in dieser Weise interpretiert werden. Der von Bradley und Sandifer angeregte Vergleich kann durch das Original nicht belegt werden, sondern entsteht durch den Prozess der weit ausgelegten Modernisierung

³³ Cauchy benutzte das Wurzelzeichen. Es wird in einem Unterabschnitt der *Notes I* des *Cours d'analyse* für Zahlen eingeführt (PUISSANCES ET RACINES DES NOMBRES), s. Bottazini 1992, 414 ff.

allein in der Vorstellung der Übersetzer – durch den Abgleich mit den heute bekannten und modernen Formen.

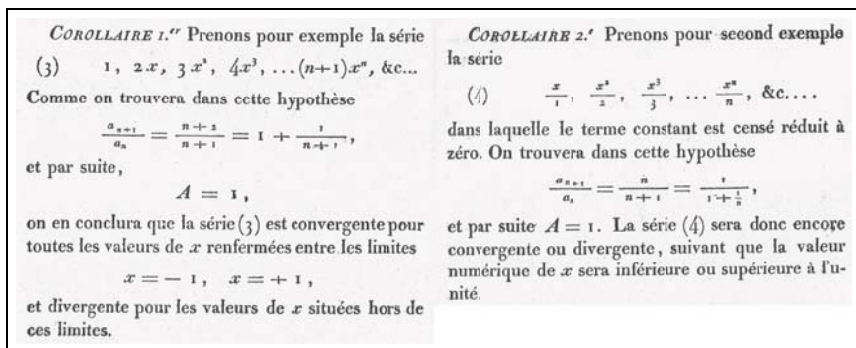


Abbildung 5: Zwei Korollare zu Potenzreihen (Cauchy 1821, 152 f.).

Die bekannten Resultate über Potenzreihen und Konvergenzradien werden ohne Rücksicht auf den tatsächlichen Entwicklungsstand und die historische Authentizität auf Cauchys Ergebnisse projiziert. Dies ist die Folge eines noch immer nachwirkenden Zerrbildes von der mathematischen Strenge bei Cauchy.

2.6 Cauchy und die Etablierung der Strenge in der Mathematik

Die unverhältnismäßige Modernisierung ist eng mit dem Aspekt der mathematischen Strenge verbunden. Modern interpretiert wird vor allem das, was an einem zu hoch angesetzten Strenge-Niveau gemessen wird. Dies ist auch bei Cauchys Arbeiten der Fall und in den zum Teil fehlgeschlagenen Modernisierungsversuchen durch Bradley und Sandifer sichtbar. Hierbei wird auch angenommen, dass Cauchy dem Anspruch allgemein gültiger Begriffsbildung gerecht wird. Ein Kriterium mathematischer Strenge muss also auch sein, über die Grenzen einzelner Werke hinaus, für eine *community* allgemein anerkannte und etablierte Lösungen und Begriffe zu liefern. So sollte am Beispiel allgemeiner Grundlagen ein Konsens darüber bestehen, was eine *Zahl* oder was eine *Funktion* ist. Cauchy führte jedoch auch Begriffe ein, die von der *community* nicht aufgegriffen und von anderen Mathematikern nicht weiterentwickelt wurden.

2.7 Über einige Voraussetzungen und Konventionen bei Cauchy

Der Zahlbegriff unterliegt bei Cauchy beispielsweise einer besonderen und einzigartigen Unterscheidung in *numbers*, die stets durch Großbuchstaben bezeichnet sind, und *quantities*, deren Vertreter durch Kleinbuchstaben repräsentiert werden. Letztere unterscheiden sich noch von den *numerical values* (*valeurs numériques*), die die vorzeichenlosen (positiven) Größen umfassen und die zur Interpretation des Absolutbetrags angeregt haben. Diese für Cauchy sehr wichtige Unterscheidung zwischen Zahlen und Größen tritt an vielen Stellen des *Cours d'analyse* in Erscheinung. In den abschließenden Bemerkungen zum *Cours* (den *Notes I*) wird sie meist dahingehend benutzt, jeweilige Regeln der Arithmetik für allgemeine Größen aufzu-

Geschichte der gleichmäßigen Konvergenz
Ursprünge und Entwicklungen des Begriffs in der
Analysis des 19. Jahrhunderts

Viertel, K.

2014, XV, 252 S. 17 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-05938-5