2 Theoretischer Rahmen

In den folgenden Unterkapiteln wird der theoretische Hintergrund der vorliegenden Studie dargestellt, der in vier Abschnitte gegliedert ist: Perspektiven mathematischen Modellierens (Kapitel 2.1), die Kompetenzen des mathematischen Modellierens (Kapitel 2.2), den Erwerb von Modellierungskompetenzen (Kapitel 2.3) und Ergebnisse empirischer Studien zum Erwerb von Modellierungskompetenzen (Kapitel 2.4).

Im ersten Abschnitt wird auf die unterschiedlichen mathematikdidaktischen Perspektiven zum mathematischen Modellieren eingegangen (Kapitel 2.1.1) und auf verschiedene idealtypische Darstellungen des Modellierungsprozesses in Form eines Kreislaufs (Kapitel 2.1.2). Darüber hinaus werden in einem weiteren Unterkapitel (Kapitel 2.1.3) Kriterien für Modellierungsaufgaben vorgestellt und diskutiert.

Der zweite Teil umfasst eine Definition des Kompetenzbegriffs (Kapitel 2.2.1) sowie eine Beschreibung der vielfältigen Definitionen mathematischer Modellierungskompetenzen in der Didaktik (Kapitel 2.2.2) und der allgemeinen mathematischen Kompetenz des Modellierens in den Bildungsstandards (Kapitel 2.2.3). Die Teilkompetenzen und Teilprozesse mathematischer Modellierung werden in einem gesonderten Unterkapitel (Kapitel 2.2.4) ausführlich geschildert, ebenso verschiedene Kompetenzmodelle mathematischen Modellierens (Kapitel 2.2.5).

Der Abschnitt zum Erwerb von Modellierungskompetenzen (Kapitel 2.3) beinhaltet die Vorstellung einer möglichen Klassifizierung von Modellierungsprojekten sowie die Charakterisierung des holistischen (Kapitel 2.3.1) und des atomistischen Modellierungsansatzes (Kapitel 2.3.2) zur Förderung von Modellierungskompetenzen.

Der vierte Teil bezieht sich auf Ergebnisse empirischer Studien zum Erwerb von Modellierungskompetenzen (Kapitel 2.4) und dabei insbesondere auf rekonstruierte Gelingensbedingungen für Modellierungsaktivitäten (Kapitel 2.4.1) sowie identifizierte Schwierigkeiten und Fehlerquellen im Modellierungsprozess (Kapitel 2.4.2).

Anschließend werden in einem zusammenfassenden Kapitel (Kapitel 2.5) die dieser Arbeit zugrunde liegenden Positionen noch einmal aufgegriffen und erörtert.

S. Brand, *Erwerb von Modellierungskompetenzen,* Perspektiven der Mathematikdidaktik,
DOI 10.1007/978-3-658-06679-6_2, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

2.1 Mathematisches Modellieren

Anwendungsbezüge und mathematisches Modellieren werden seit einer Vielzahl von Jahren sowohl national als auch international eingehend diskutiert (vgl. u.a. Blum et al., 2007; Borromeo Ferri, Greefrath & Kaiser, 2013; Burkhardt, 2012; Burkhardt & Pollak, 2011; Kaiser et al., 2011; Kaiser-Meßmer, 1986a; Lesh et al., 2010; Stillman et al., 2013). Kaiser-Meßmer (1986a) fasst die Schwerpunkte der frühen Debatte zu Realitätsbezügen im Mathematikunterricht zusammen (vgl. auch Schupp, 1997), neuere Diskussionen werden in der ICMI Study 14 (Blum et al., 2007) dargestellt sowie fortlaufend in den ICTMA Proceedings (vgl. u.a. Kaiser et al., 2011; Lesh et al., 2010; Stillman et al., 2013). Die Bedeutung der mathematischen Modellierung als Themenbereich der Mathematikdidaktik wird nicht zuletzt in der Vielzahl der untersuchten Facetten des Themas deutlich (vgl. Blum, 2002). Ein zentraler Bestandteil der Modellierungsdiskussion insbesondere der letzten Jahre sind mathematische Modellierungsfähigkeiten bzw. -kompetenzen, die Forschungsgegenstand vielfältiger empirischer Studien waren und sind (vgl. u.a. Blum & Leiss, 2007; Kaiser-Meßmer, 1986b; Kaiser & Schwarz, 2006a; Leiss et al., 2008; Ludwig & Xu, 2010; Ludwig & Reit, 2013a; 2013b; Maaß, 2004; Maaß & Mischo, 2011; Schukajlow & Krug, 2013a; Zöttl, 2010).

Im Laufe der Zeit wurden unterschiedliche Begrifflichkeiten in Bezug auf Anwendungen und Modellierungen entwickelt und diskutiert (für eine Abgrenzung der Begrifflichkeiten siehe u.a. Blum, 1996, S. 19; Maaß, 2004, S. 16f.; Niss, Blum & Galbraith, 2007, S. 3ff.; Zöttl, 2010, S. 68ff.). In Anlehnung an Kaiser et al. (2014) umfassen „‘Anwendungen und Modellieren‘ alle Aspekte von Beziehungen zwischen Mathematik und Realität“ (ebd., S. 1), wobei *Modellierungen* im Vergleich zu *Anwendungen* stärker auf den gesamten Prozess des Bearbeitens einer außermathematischen Problemstellung mittels Mathematik einschließlich der Rückübersetzung von der Mathematik in die Realität fokussieren (vgl. Niss, Blum & Galbraith, 2007, S. 3f.). Mathematische Modellierung geht dementsprechend von einem realen, außermathematischen Problem aus, welches mit Hilfe der Mathematik gelöst wird (vgl. Maaß 2004, S. 16f.; Niss, Blum & Galbraith, 2007, S. 10). Zentral sind hierbei insbesondere die Übersetzungsprozesse zwischen diesem außermathematischen und einem mathematischen Gebiet (vgl. Kuntze, 2010, S. 5; Niss, Blum &

Galbraith, 2007, S. 3f.; Schupp, 1997, S. 5f.) sowie hierfür notwendige Entwicklungen und auch Anpassungen mathematischer Modelle, d.h. vereinfachter und idealisierter Darstellungen der jeweiligen realen Problemstellung. Modelle können dabei unterschiedliche Funktionen erfüllen und werden in der Regel in einem ersten Schritt in *deskriptive* und *normative* Modelle eingeteilt (siehe ausführlicher hierzu Böhm, 2013, S. 21ff.; Greefrath, 2006, S. 18ff.; Greefrath et al., 2013, S. 18ff.; Henn & Müller, 2013, S. 204ff.; Lesh & Doerr, 2003, S. 10; Siller, 2010, S. 28f.). Von Bedeutung ist an dieser Stelle, dass zu einer realen Problemstellung, in Abhängigkeit von den berücksichtigten Aspekten der realen Situation, in der Regel verschiedene mathematische Modelle entwickelt werden können (vgl. Zöttl, 2010, S. 70; Greefrath et al., 2013, S. 13). Ebenso kann ein mathematisches Modell unterschiedliche reale Problemsituationen abbilden (vgl. Greefrath, 2006, S. 19).

Verbunden mit der Diskussion über Anwendungsbezüge und mathematisches Modellieren war und ist die Forderung nach einem angemessenen Einbezug dieser Aspekte in den Mathematikunterricht (vgl. Blum, 1985, S. 195; 1996, S. 15; Kaiser, 1995, S. 69; Kaiser et al., 2014, S. 2). Die hiermit verknüpften Zielsetzungen sind unterschiedlich akzentuiert. Sie umfassen häufig die Entwicklung bzw. Festigung mathematischer Begriffe und Methoden, die Förderung der Fähigkeit, reale Phänomene zu ergründen, den Erwerb von Problemlösefähigkeiten, lernpsychologische Aspekte und die Ausbildung eines adäquaten Verständnisses der Bedeutung der Mathematik (vgl. Blum, 1996, S. 20ff.; Blum, 2006, S. 11; Blum & Niss, 1991, S. 42ff.; Greefrath, 2010a, S. 16ff.; Henn & Maaß, 2003, S. 1f.; Kaiser, 1995, S. 69f.; Maaß, 2005a, S. 117ff.). In Anlehnung an insbesondere Blum (1996, S. 20ff.) und Kaiser (1995, S. 69f.) werden diese Aspekte von Maaß (2005a, S. 118) in fünf Kategorien folgendermaßen ausformuliert:

> „1. *Methodologische Ziele:* Modellierungen und Realitätsbezüge sollen den Schülerinnen und Schülern Kompetenzen zum Anwenden von Mathematik in einfachen und komplexen unbekannten Situationen vermitteln.
>
> 2. *Kulturbezogene Ziele:* Modellierungen und Realitätsbezüge sollen den Schülerinnen und Schülern ein ausgewogenes Bild

von Mathematik als Wissenschaft und ihrer Bedeutung für unsere Kultur und Gesellschaft vermitteln.

3. *Pragmatische Ziele:* Realitätsbezüge im Mathematikunterricht sollen den Schülerinnen und Schülern helfen, aus dem Unterricht bekannte Umweltsituationen zu verstehen und zu bewältigen.

4. *Lernpsychologische Ziele:* Realitätsnahe Modellierungsbeispiele sollen den Schülerinnen und Schülern helfen, eine aufgeschlossene Einstellung gegenüber dem Mathematikunterricht zu entwickeln und das Behalten und Verstehen von mathematischen Inhalten unterstützen.

5. *Pädagogische Ziele:* Realitätsnahe Modellierungen im Mathematikunterricht sollen heuristische Strategien, Problemlöse- und Argumentationsfähigkeiten sowie kreatives Verhalten ausbilden und fördern."

Greefrath et al. (2013, S. 19f.) fassen die vielfältigen mit Modellierungen verbundenen Intentionen zu *inhaltsorientierten*, *prozessorientierten* und *allgemeinen Zielen* zusammen. In anderen Darstellungen enthalten die beschriebenen Zielsetzungen zum Teil spezifische Schwerpunkte, beispielsweise wird von Lingefjärd (2006, S. 98) ein starker inhaltlich-mathematischer und auf den Modellierungsprozess bezogener Fokus gesetzt.

2.1.1 Nationale und internationale Modellierungsperspektiven

In der nationalen und internationalen didaktischen Diskussion entwickelten sich verschiedene Perspektiven mathematischer Modellierung. Zur Strukturierung der Vielfalt der Ansätze wurde von Kaiser und Sriraman (2006) eine Klassifikation der Modellierungsperspektiven entsprechend ihrer spezifischen Auffassung von mathematischer Modellierung und der mit Modellierung verbundenen Ziele entworfen, einschließlich der Berücksichtigung des Stellenwerts, der der Mathematik bzw. außermathematischen Problemstellungen zugewiesen wird (vgl. auch Kaiser et al., 2007). Der Klassifikation zufolge können unterschieden werden: *realistisches* oder *angewandtes* Modellieren, *epistemologisches* oder *theoreti-*

sches Modellieren, *pädagogisches* Modellieren (*didaktisch* bzw. *begrifflich*), *soziokritisches* Modellieren, *kontextbezogenes* Modellieren und als Meta-Perspektive *kognitives* Modellieren (vgl. Kaiser & Sriraman, 2006, S. 304). Ergänzt wurde dieses Klassifikationsschema von Borromeo Ferri und Kaiser (2008) durch eine Zuordnung idealtypischer Darstellungen eines Modellierungsprozesses zu den Perspektiven mathematischer Modellierung (siehe für einen Überblick auch Borromeo Ferri, 2011; Greefrath et al., 2013; Kaiser, 2005a; Kaiser et al., 2014; Kaiser-Meßmer, 1986a).

Als zwei einander weitgehend entgegengesetzte Modellierungsperspektiven werden *epistemologisches oder theoretisches Modellieren* und *realistisches oder angewandtes Modellieren* beschrieben (vgl. Borromeo Ferri & Kaiser, 2008, S. 2f.). Dem ersten Ansatz werden insbesondere wissenschaftsorientierte Ziele zugeordnet und die Authentizität der behandelten Modellierungsprobleme gilt als dem Ziel der Entwicklung mathematischer Theorien unterordnet bzw. wird als nicht von Bedeutung erachtet. Währenddessen werden die Authentizität der zu modellierenden Situationen sowie das genaue Erfassen der Realität als zentrales Merkmal des *realistischen* oder *angewandten* Modellierens angesehen. Ein weiteres Ziel dieses Ansatzes, der sich an der angewandten Mathematik orientiert, ist der Klassifikation zufolge die Förderung von Modellierungskompetenzen. Vertreten wird dieser zweite Ansatz beispielsweise von Kaiser (2005b), Bracke (2007) und Ortlieb et al. (2009). Die mit der Authentizität in der Regel einhergehende Komplexität der Modellierungsbeispiele lässt eine Bearbeitung der Problemstellungen im Rahmen von Projekten sinnvoll erscheinen (vgl. Kaiser et al., 2014, S. 3).

Das *pädagogische Modellieren* wird demgegenüber als eine Art integrierender Ansatz aufgefasst, welcher in *didaktisches* und *begriffliches* Modellieren unterteilt wird und sowohl pädagogische als auch stoffbezogene Zwecke verfolgt. Zentrale Aspekte des *didaktischen* Modellierens sind, entsprechend der Klassifizierung, einerseits die Unterstützung von mit der Modellierung verbundenen Lernvorgängen, etwa die Förderung von Modellierungskompetenzen aber auch allgemeinerer Kompetenzen wie beispielsweise Kommunizieren und Argumentieren (vgl. Kaiser et al. 2014, S. 3). Andererseits kann mit der Auseinandersetzung mit Modellierungsproblemen die Vermittlung und Wiederholung mathematischer Inhalte und Verfahrensweisen intendiert sein. Wesentliches Ziel des *begriff-*

lichen Modellierens ist Borromeo Ferri und Kaiser (2008, S. 4) zufolge die Förderung des Erwerbs und Begreifens von Begriffen innerhalb der Mathematik und bezüglich des Modellierungsprozesses. Beiden Richtungen des *pädagogischen* Modellierens, sowohl dem *didaktischen* als auch dem *begrifflichen* Modellieren, wird zugeschrieben, dass die behandelten Modellierungsprobleme zwar möglichst realitätsnah sind, aber gegebenenfalls entsprechend der zu erreichenden Ziele verändert werden. Von größerer Bedeutung als die Authentizität der Aufgaben ist dementsprechend das Erreichen der mit den Modellierungsaktivitäten verbundenen Ziele. Bedeutende Vertreter dieser Auffassung sind Blum und Niss (1991), Blomhøj & Jensen (2003) sowie Maaß (2004).

Darüber hinaus werden zwei weitere Ansätze unterschieden, zum einen das *soziokritische Modellieren*, welches die Funktion der Mathematik in der Gesellschaft fokussiert und insbesondere eine Reflexion des Modellierungsprozesses propagiert und zum anderen das *kontextbezogene Modellieren* bzw. der *Modelling-Eliciting-Activities-Ansatz* (vgl. Lesh & Doerr, 2012), welcher eine Organisation, Analyse und Übertragung von Bearbeitungsprozessen als zentral ansieht (vgl. Borromeo Ferri & Kaiser, 2008, S. 4; Kaiser et al., 2014, S. 4).

Als eine Art deskriptive Meta-Perspektive wird die relativ neue Richtung des *kognitiven Modellierens* angesehen. Dieser Ansatz wird als abgegrenzt zu den oben beschriebenen Auffassungen von mathematischer Modellierung beschrieben und als kombinierbar mit anderen Perspektiven von Modellierung erachtet. Im Fokus werden bei diesem Ansatz nicht die durch mathematische Modellierung zu erreichenden Ziele gesehen, sondern die Beschreibung und Analyse von Modellierungsaktivitäten an sich, also die beim Modellieren stattfindenden kognitiven Prozesse. Hierbei werden zwei verschiedene Richtungen des *kognitiven* Modellierens unterschieden (Kaiser, 2011, S. 92), die eine ist fokussiert auf der Rekonstruktion individueller Modellierungsrouten (vgl. Borromeo Ferri, 2011; Carreira & Baioa, 2011), während die andere kognitive Schwierigkeiten und mentale Barrieren von Lernenden untersucht und die Relevanz von Metakognition zur Überwindung derartiger Schwierigkeiten hervorhebt (vgl. Stillman, 2011).

2.1.2 Modellierungskreisläufe als Darstellung des Modellierungsprozesses

Für den Prozess des mathematischen Modellierens wurden in den vergangenen Jahren unterschiedliche idealisierende Ablaufschemata konstruiert. Zunehmend wird der Modellierungsprozess dabei unter Bezug auf ein Kreislaufmodell idealtypisch dargestellt (vgl. Blum & Leiß, 2005, S. 18; Böhm, 2013, S. 25; Borromeo Ferri, 2011, S. 5; Greefrath et al., 2013, S. 14; Kaiser, Blomhøj & Sriraman, 2006, S. 82). Entsprechend der verschiedenen Modellierungsperspektiven existieren unterschiedliche Modellierungskreisläufe, die für verschiedene Funktionen entwickelt wurden, beispielsweise für den Einsatz in der Klasse als metakognitives Hilfsmittel für Schülerinnen und Schüler gedacht sind, als Analyseinstrument für die Mathematikdidaktik zur Rekonstruktion etwa von Modellierungsprozessen oder als didaktisches Hilfsmittel zur Planung von Modellierungsaktivitäten (vgl. Borromeo Ferri 2011, S. 14; Kaiser, Blomhøj & Sriraman, 2006, S. 83). Gemeinsam ist diesen Kreisläufen, dass sie die Übersetzungsprozesse eines Modellierungsprozesses zwischen Realität und Mathematik illustrieren (vgl. Niss, Blum & Galbraith, 2007, S. 4), wobei insbesondere diese Übergänge zwischen Realität und Mathematik in unterschiedlich viele Phasen unterteilt werden (vgl. Keune, Henning & Hartfeld, 2004, S. 6). Ausgangspunkt eines Modellierungskreislaufs ist jeweils eine reale Problemstellung, die grundsätzlich in ein mathematisches Modell zu überführen ist. Es wird häufig zunächst ein reales Modell unterschieden (vgl. u.a. Blum, 1985, S. 200; Kaiser, 1995, S. 67f; Maaß, 2005a, S. 117), dem teilweise noch ein mentales Situationsmodell vorausgeht (vgl. Blum & Leiß, 2005, S. 18; Borromeo Ferri, 2011, S. 41; Leiss et al., 2010, S. 120ff.). Die Trennung von realem und mathematischem Modell wird nicht unkritisch betrachtet, da diese nicht immer als eindeutig zu bezeichnen ist und von den mathematischen Kenntnissen abhängt (vgl. Kaiser et al., 2014, S. 7). Wurde ein mathematisches Modell erstellt, so gilt es, innerhalb dieses Modells mit Hilfe mathematischer Verfahren eine mathematische Lösung zu erzielen. Abschließend ist dieses Ergebnis zurück in die Realität zu übersetzen und anhand der realen Situation zu interpretieren und zu validieren (vgl. u.a. Blum, 1985, S. 200; Kaiser, 1995, S. 67f; Maaß, 2005a, S. 117), wobei hier nicht in allen Kreisläufen zwischen mathematischen und realen Lösungen differenziert wird. Entsprechend der angenommenen Kreisstruktur des Modellierungsprozesses wird im Anschluss, je nach Bewertung des Ergebnisses und des Lösungswegs, gegebenenfalls eine weitere Bearbeitung des realen Problems mit veränderten Annahmen als notwendig angesehen (vgl. Kaiser, 1995, S. 67f.).

Borromeo Ferri (2011) teilt die von ihr betrachteten Kreisläufe im Wesentlichen anhand ihrer Differenzen in der Beschreibung des Übergangs zwischen Realität und Mathematik in vier Gruppen ein: „Typ (1): Modellierungskreislauf aus der angewandten Mathematik, Typ (2): Didaktischer Modellierungskreislauf, Typ (3): Modellierungskreislauf als Basis für die Rekonstruktion des Situationsmodells bei der Verwendung von Textaufgaben, Typ (4): Diagnostischer Modellierungskreislauf“ (Borromeo Ferri, 2011, S. 14; vgl. hierzu auch Borromeo Ferri & Kaiser, 2008, S. 5; Borromeo Ferri, 2006, S. 86ff.). Greefrath et al. (2013, S. 14ff.) unterscheiden in Anlehnung an diese Klassifizierung im Wesentlichen drei Kategorien, die sie als *direktes* Modellieren, *zweischrittiges* oder *dreischrittiges* Mathematisieren bezeichnen. Andere Klassifizierungen sowie Diskussionen von bestehenden Modellierungskreisläufen finden sich beispielsweise bei Greefrath (2010b, S. 45), Haines und Crouch (2010, S. 145ff.) sowie Kaiser (1995, S. 72).

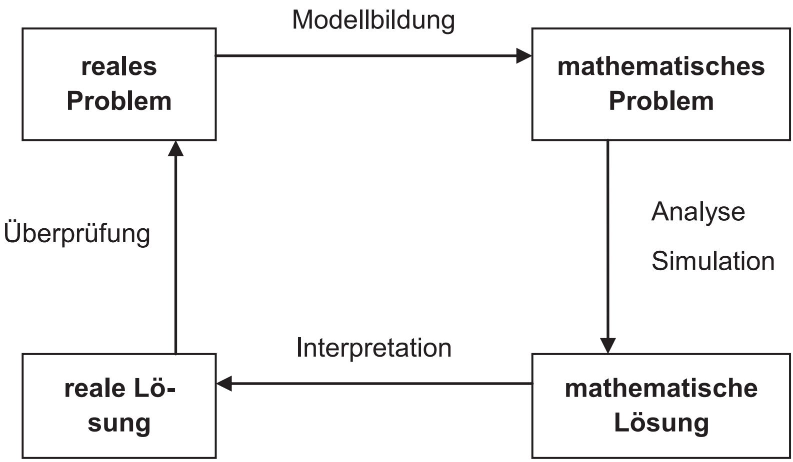

Abb. 1: Darstellung des Modellierungsprozesses nach Ortlieb et al. (2009, S. 5)

Modellierungskreisläufe aus der angewandten Mathematik unterscheiden nicht zwischen einem realen und einem mathematischen Modell und fassen teilweise mathematische und reale Ergebnisse zusammen (vgl. Borromeo Ferri, 2011, S. 15). Ein Beispiel für einen solchen Kreislauf, der die Phase der mathematischen und realen Resultate trennt, ist in Abb. 1 dargestellt, ein weiteres Beispiel findet sich bei Haines, Crouch und Davis (2001, S. 368).

Im Vergleich zu Modellierungskreisläufen aus der angewandten Mathematik unterscheiden didaktische Modellierungskreisläufe zwischen realem und mathematischem Modell (vgl. Blum, 1996, S. 18; Kaiser, 1995, S. 67f.; Kaiser, 2005b, S. 100) und teilweise zusätzlich zwischen mathematischer und realer Lösung (vgl. Blomhøj & Jensen, 2003, S. 125; Kaiser & Stender, 2013, S. 279; Maaß, 2005a, S. 117). Ziel der didaktischen Modellierungskreisläufe ist ihr Einsatz im Mathematikunterricht als metakognitives Hilfsmittel für Schülerinnen und Schüler bei Modellierungsprozessen (vgl. Borromeo Ferri & Kaiser, 2008, S. 7). Ein Beispiel für einen fünfschrittigen Modellierungskreislauf ist in Abb. 2 abgebildet.

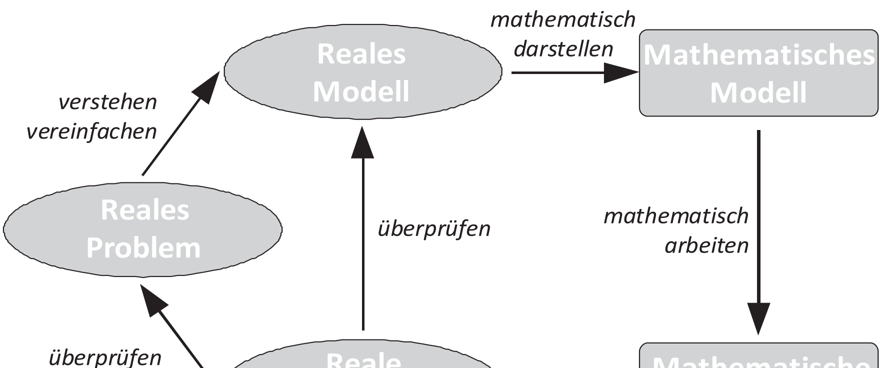

Abb. 2: Der Modellierungsprozess (Kaiser & Stender 2013, S. 279)

Ein etwas anderer Modellbildungskreislauf findet sich bei Keune, Henning und Hartfeld (2004, S. 9), in diesem werden verschiedene Modellstufen unterschieden.

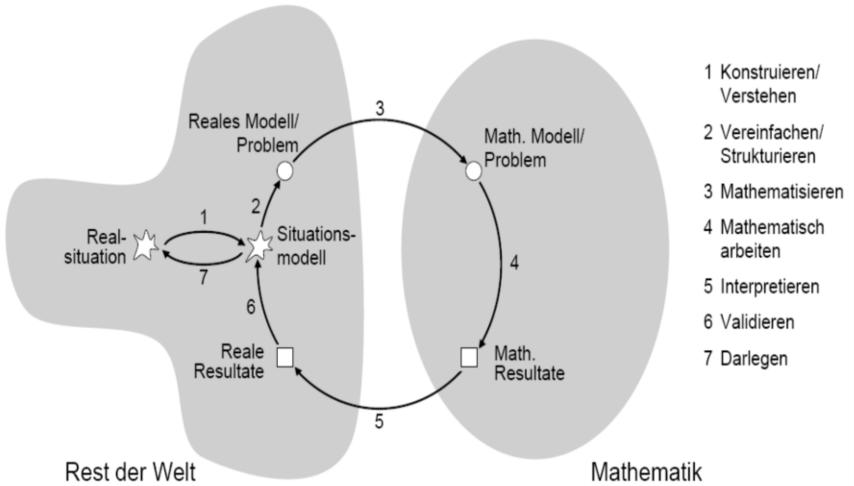

Abb. 3: Modellierungskreislauf von Blum & Leiß (nach Blum & Leiß, 2005, S. 18)

Weiter differenziertere Kreisläufe sind diagnostische Kreisläufe, die als zusätzliche Phase zwischen der realen Situation und dem realen Modell ein Situationsmodell bzw. eine Phase der mentalen Repräsentation der Situation unterscheiden, die das Verstehen der Aufgabe und deren interne Repräsentation umfasst (vgl. Blum & Leiß, 2005, S. 18). Diese Unterscheidung wurde zur Untersuchung kognitiver Prozesse von Modellierenden vorgenommen und gehört dementsprechend zum Ansatz des *kognitiven* Modellierens. Ein Situationsmodell findet sich auch bei „Modellierungskreisläufen als Basis für die Rekonstruktion des Situationsmodells bei der Verwendung von Textaufgaben“ (vgl. Borromeo Ferri, 2011, S. 17ff.).Hier wird allerdings nicht zwischen Situationsmodell und realem Modell unterschieden, da davon ausgegangen wird, dass Textaufgaben bereits so weit strukturiert sind, dass direkt ein mathematisches Modell erstellt wird (vgl. Blum & Niss, 1991, S. 40). Ein Beispiel für einen diagnostischen Modellierungskreislauf ist in Abb. 3 dargestellt (vgl. auch

http://www.springer.com/978-3-658-06678-9

Erwerb von Modellierungskompetenzen
Empirischer Vergleich eines holistischen und eines atomistischen Ansatzes zur Förderung von Modellierungskompetenzen
Brand, S.
2014, XVII, 346 S. 59 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-06678-9