

Rudi und Eddi standen an der Böschung eines Deiches, der das Dorf vor den Fluten eines Flusses schützte. Sie diskutierten, ob der Hang flach genug sei, um nicht abzurutschen, wenn er mit Wasser getränkt wäre. „Er hat eine Steigung von 50%“ (Abb. 2.1 mitte), sagte Rudi, „das ist ein Winkel von etwa 30 Grad. Das sollte reichen.“ Eddi musste eine Bemerkung loswerden: „Euer Stamm hat so ein komisches Winkelmaß,¹ das zu unserer Dezimaldarstellung gar nicht passt. Ein rechter Winkel sollte 100 Grad haben statt 90. Wie kommt das?“ „Historisch gewachsen. Irgendwas Mythisches. Weil das Jahr etwa 360 Tage hat, hat man den Vollkreis zu 360 Grad definiert. Siggi weiß mehr darüber...“ „Na gut“, lenkte Eddi ein, „es beschert uns ja wenigstens gerade Zahlen – sonst wäre der Winkel bei der Steigung von 50% statt 30 ja 33,33333... Grad.“

Wir geben ihm Recht: Die Steigung einer Geraden c wird in einem rechtwinkligen Dreieck einfach durch das Verhältnis der gegenüberliegenden Seite a zur anliegenden Seite b bestimmt (Abb. 2.1 links). Man kann sie in Grad des Winkels α angeben oder durch das Seitenverhältnis a/b , als Zahl oder in Prozent (wenn sie klein genug ist). Sie ist in Abb. 2.1 rechts entweder 1 oder 100% oder 45° . Wenn sich der Winkel α allerdings dem rechten Winkel nähert (gestricheltes Dreieck in Abb. 2.1 links), dann wird das Steigungsmaß a_1/b_1 extrem groß, da b_1 sehr klein wird. Zur Bestimmung des Winkels α greift man daher oft auf das Verhältnis a_1/c_1 zurück, das bei $\alpha = 90^\circ$ zu 1 wird. Leser mit einem guten Gedächtnis erkennen hier sofort den „Tangens“ $\tan \alpha$ aus ihrer Schulzeit wieder.

¹ Siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Winkelmaß#Die_Entwicklung_der_Winkelmaße.

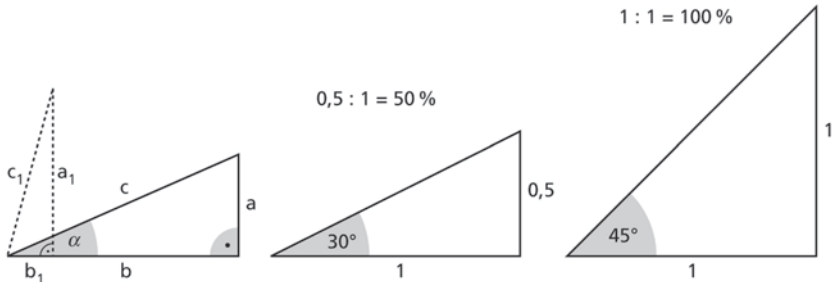
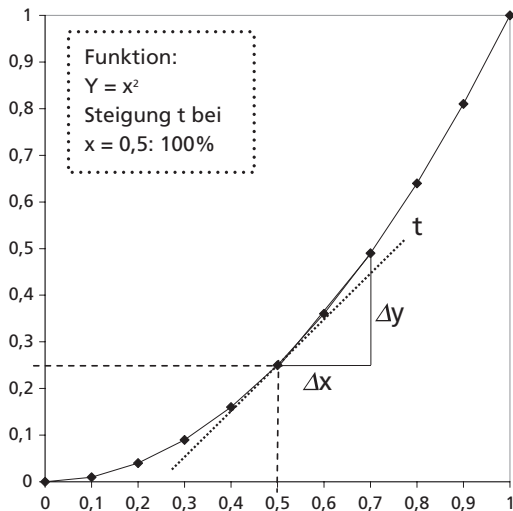


Abb. 2.1 Steigung und Winkel

Willa tauchte plötzlich auf, wie aus dem Nichts. Sie kam von einem Präkognitionstraining bei Siggi zurück, hatte viel in der Zukunft gesehen und war voller Tatendrang. Sie musterte die beiden spöttisch. „Ach! Seid ihr mit dem Kleinkram jetzt durch? Geometrie und Funktionen mit einer Variablen sind ja schon ganz anspruchsvoll.“ Ihre grünen Augen funkelten, und das Licht der untergehenden Sonne umgab ihre roten Haare wie eine Aura. „Ihr müsst jetzt langsam mal das Differenzieren lernen!“ Eddi verstand nicht: „Aber ich achte doch schon jetzt darauf, zu differenzieren. Ich unterscheide sorgfältig zwischen...“ Willa unterbrach ihn: „Ich meine nicht das umgangssprachliche Wort, sondern den Fachausdruck. Im Kern ist das natürlich dasselbe: auf Differenzen, auf Unterschiede achten – modern ausgedrückt: auf Trends. Aber Siggi sagt, dass wir erst in zehntausend Jahren so modern sind ... Wie wäre es denn für den Anfang mit ein wenig Differentialrechnung, damit ihr mit den Kurven in der X-Y-Ebene jetzt schon etwas Vernünftiges anstellen könnt?!“

„Äh... ja... wir wollten gerade anfangen“, behauptete Eddi und bekam verärrerisch rote Bäckchen. Er wandte sich an seinen Freund: „Wolltest du nicht dein Bewässerungssystem kontrollieren? Die Schneckenpumpe quietscht so!“ Rudi verstand den Wink und trollte sich. Auch Willa verstand den Wink und lächelte. Nach einem kurzen Blick auf seine Zeichnungen sagte sie: „Übrigens, die Fachleute nennen das Maß a/c den ‚Sinus‘ des Winkels α und schreiben ‚ $\sin \alpha = a/c$ ‘. Sein Bruder ist der ‚Kosinus‘, der als ‚ $\cos \alpha = b/c$ ‘ bestimmt wird. Und eure Steigung ist einfach der ‚Tangens‘ $\tan \alpha = a/b$.“ Diesmal hatte Eddi anscheinend Oberwasser: „Das wissen wir schon lange.“ Willa lächelte: „Ich weiß, dass ihr Kerle das schon wisst. Aber eine kleine Wiederholung schadet nicht.“

Abb. 2.2 Ermittlung der Steigung der Parabelfunktion



2.1 Die Steigung einer mathematischen Kurve

OK, dachte Eddi und wechselte das Thema: „Wollten wir nicht... äh...“ „Differenzieren. Du sagst es. Umgangssprachlich bedeutet es, etwas auseinander zu halten, genau zu betrachten, zu unterscheiden. In der Mathematik versteht man darunter die Bestimmung der Steigung einer mathematischen Kurve.“ Eddi versuchte etwas Schlaues zu sagen, um einen guten Eindruck zu machen: „Die Steigung einer Geraden im Koordinatensystem ist ja überall konstant, aber die einer beliebigen Kurve oder ‚Funktion‘ $y=f(x)$ ändert sich ständig. Sie ist von x abhängig.“ Willa nickte und schlug vor, das am Beispiel der Funktion $y=x^2$ einmal aufzuzeichnen (Abb. 2.2).

Willa erklärte: „Die Steigung der Parabel – ich habe sie als Punktestrecke gezeichnet – will ich zum Beispiel für $x=0,5$ wissen, wo der y -Wert $0,25$ beträgt. Die Steigung ist dort gleich der Steigung der Tangente t .“ „Äh...“, Eddi errötete, „Was ist eine Tangente?“ „Eine an der Kurve anliegende Gerade, die die Steigung der Kurve an dieser Stelle hat.“ Das gab ihm wieder Oberwasser: „Was Besseres als eine solche Tautologie hast du nicht anzubieten? Die Tangente ist die Steigung und die Steigung ist die Tangente!“ Willa lachte, und es war ihr überhaupt nicht peinlich: „Egal, wir ersetzen sie sowieso durch die Sekante. Ich ziehe eine Linie zum, sagen wir, übernächsten Parabelpunkt $x=0,7$ und $y=0,49$.“

Willi malte das Steigungsdreieck ein und bezeichnete die Schenkel (die „Katheten“) mit Δy und Δx , nicht ohne zu bemerken, dass es eigentlich Δ_y und Δ_x heißen müssen, denn es wäre ja keine Multiplikation zweier mathematischen Zeichen, sondern sie wolle damit ein Δ – also eine kleine Differenz – in x- und y-Richtung andeuten.

„Warum nimmst du dieses komische Zeichen?“, wollte Siggie wissen, der unbeachtet zu ihnen getreten war. Eddi war vorlaut und antwortete für Willi: „Das ist ein symbolisches Dreieck und soll uns an das Steigungsdreieck erinnern.“ Siggie grinste: „Da sieht man mal, wie Menschen Erklärungen erfinden, wenn sie keine haben. Das Dreieck ist der Buchstabe ‚Delta‘ der alten Griechen... Also der Leute, die man in zehntausend Jahren ‚die alten Griechen‘ nennen wird. Das ‚Delta‘ ist ein Symbol für den ‚Differenzoperator‘, also ein Zeichen für etwas, das aus einer Subtraktion entstanden ist – ich habe es mit meinen Kräften in dein Hirn gepflanzt.“ „Danke, ich weiß ja, dass ich ohne dich nichts zustande bringe!“, antwortete Eddi und Siggie hatte keine klare Aura-Empfindung, ob er das ernst meinte oder nicht.

Dann sprach Eddi weiter, denn er hatte inzwischen das Prinzip erkannt: „Jetzt können wir die Steigung berechnen: Δx ist $0,7 - 0,5 = 0,2$ und Δy ist $0,49 - 0,25 = 0,24$. Also ist die Steigung $0,24/0,2 = 1,2$ – hundertzwanzig Prozent.“ Willi lächelte fein und ihre Stimme klang auf einmal wie ein Feuerstein, der eine Granitplatte ritzt: „Du machst mir Spaß! Erst meckerst du über die Tangente, jetzt tust du so, als hättest du das Differenzieren erfunden. Rechne doch noch mal mit Delta-x gleich 0,1 nach, also von x gleich 0,5 bis 0,6.“ „Dann ist Delta-y gleich 0,36 minus 0,25, also 0,11. Und die Steigung wird zu hundertzehn Prozent. Aahhh..., jetzt merke ich es, wir lassen Delta-x gegen null gehen, dann wird die Sekante zur Tangente, also die Schnittlinie zur Berührungslinie. Aber geraten wir denn nicht in Gefahr, durch Null zu dividieren, wenn wir Δx gegen 0 gehen lassen?“ „Nein – *gegen 0* ist nicht *gleich 0*. Δx wird klitzeklitzeklein, bleibt aber ungleich 0“, schloss Willi. „Wir ersetzen dann das Δx durch ‚dx‘, um diesen Übergang anzudeuten, für Δy entsprechend. Na, das war doch gar nicht so schlimm! Differentialrechnung lernen in 10 min.“²

„Genial!“, sagte Eddi, „Wer hat sich denn das ausgedacht?“ „Leibniz.“ „Der mit dem Butterkeks?“ Willi lachte: „Nein, Gottfried Wilhelm Leibniz, ein deutscher Philosoph und Wissenschaftler, Mathematiker, Diplomat, Physiker, Historiker, Politiker, Bibliothekar und Doktor des weltlichen und des Kirchenrechts im ausgehenden 17. und beginnenden 18. Jahrhundert dieser neuen Zeitrechnung in der Zukunft. Er erfand den Differentialquotienten dy/dx und vieles andere mehr. Sir Isaac Newton, der englische Naturforscher, Theologe und Philosoph entdeckte

² Josef Raddy: „Differentialrechnung lernen in 10 Min“ (<http://www.youtube.com/watch?v=NBhRuSQeHY>, erreicht von <http://www.mathematik.net>)

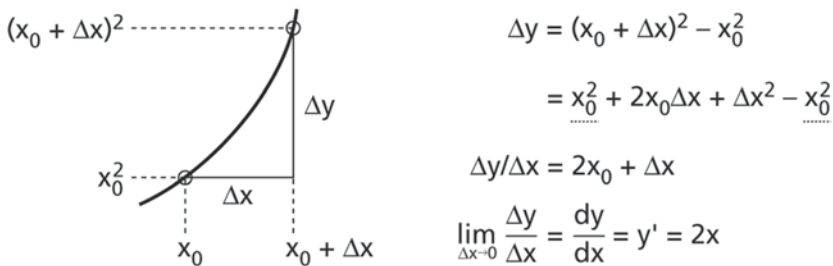


Abb. 2.3 Die 1. Ableitung der Parabel $y=x^2$

zur selben Zeit dasselbe, und das führte zum wohl berühmtesten Prioritätsstreit der Wissenschaftsgeschichte.“ „Boh, was du alles weißt!“, sagte Eddi und strahlte sie an. *Zum Teufel mit dem Stammeshäuptling*, dachte er, *man wird doch wohl ein wenig flirten dürfen!*

Dann wandte er sich wieder dem Problem zu: „Na, schön, ich vermute mal, dass die Steigung gegen 100 % geht, je näher wir in unserem Beispiel den zweiten Punkt an den ersten heran wandern lassen. Aber wie finden wir die Steigung an einem beliebigen Punkt x_0 der Parabel?“ Willa gab ihr Wissen nicht preis: „Sag’ du mir’s!“ Eddi malte (Abb. 2.3) und dachte laut: „ Δy an der Stelle $x_0 + \Delta x$ kann ich ausmultiplizieren, und dann kürzt sich das x_0^2 heraus.“ Willa ergänzte: „Und wenn wir den Differenzenquotienten $\Delta y / \Delta x$ bilden, dann bleibt $2x_0 + \Delta x$ übrig. Wenn Δx dann gegen Null geht, können wir das zweite Glied vernachlässigen und es bleibt $2x$ übrig, denn das x_0 kann ja überall liegen. Den Grenzwert des Differenzenquotienten nennen wir den ‚Differenzialquotienten‘ und schreiben y-Strich dafür. Der Grenzwert des Differenzenquotienten heißt ‚limes‘.“ Eddi war empört: „Vernachlässigen!?! Statt der Tangente nehmen wir eine Sekante. Und diese Größe vernachlässigen wir einfach! Ich dachte immer, Mathematik wäre eine exakte Wissenschaft!?!“ Willa ließ sich nicht beirren: „Sie wird es gerade *dadurch*. Wir machen keine Fehler und begehen keine Nachlässigkeiten – obwohl das Wort so klingt –, sondern wir steuern exakt definierte Grenzwerte an. So ist 0,999 nur ungefähr gleich 1, egal wie viele Neuner wir schreiben. Wenn es nur *endlich* viele sind. Wenn es *unendlich* viele sind, was wir als ,0,999...‘ schreiben, dann ist das *exakt* gleich 1. Soviel dazu. Aber nun weiter!“

Eddi fuhr fort: „OK. Verstehe ich. Ich wiederhole: Der Differenzenquotient $\Delta y / \Delta x$ wird zu $2x_0 + \Delta x$ und der Differentialquotient dy/dx gleich y' zu $2x$. Sieht in der Zeichnung kompliziert aus, ist es aber nicht.“

„Hervorragend!“, sagte Willa, „Wir merken uns: Die erste Ableitung einer Funktion $y=f(x)$ ist wieder eine Funktion, und wir nennen sie y-Strich. Manche

schreiben auch $f'(x)$ dafür, f-Strich von x. Denn sie hat ja an jeder Stelle der Funktion y einen anderen Wert.“ Eddi kam wieder auf sein Beispiel mit der Parabel zurück: „Das sieht lustig aus: $y=x^2$ und $y'=2x$ – es scheint, als wäre der Exponent als Faktor vor das x gewandert! Also hat die Parabel zum Beispiel am Punkt $x=3$ den Wert $y=9$ und die Steigung $y'=6$.“

„Für ein Stammesmitglied mit Migrationshintergrund bist du ganz schön schlau!“, meinte sie anerkennend. Eddi tat beleidigt: „Pass auf, dass du dir nicht auf die Zunge beißt. Sonst muss Siggi dir ein Gegengift verabreichen!“ Willa lachte, denn sie wusste, dass er sie liebte.

Sie wandte sich zum Gehen und sagte mit maliziösem Lächeln: „Wenn dein Freund Rudi wieder mit dir spielen darf, dann erzähle ihm mit deinem neuen Wissen doch etwas vom Fallgesetz. Der Fallweg ist die halbe Erdbeschleunigung multipliziert mit dem Quadrat der Fallzeit. Galileo Galilei, du weißt schon.“

Wer zum Teufel ist das nun wieder?, dachte Eddi und nickte beiläufig – so, als ob ihm alles klar wäre.

2.2 Die Regeln des Differenzierens

Das können wir nun verallgemeinern: Wollen wir die Steigung – die der Fachmann „Ableitung“ nennt – einer Funktion $y=f(x)$ in einem Punkt x_0 wissen, dann suchen wir den Grenzwert der Steigung an dieser Stelle. Er liest sich als „Limes von Delta-y durch Delta-x für Delta-x gegen null“, und die „Ableitung“ heißt kurz „y-Strich“, denn man macht einfach einen kleinen hochgestellten Strich neben das „y“. Als eine Art Zwischenstufe bezeichnet man y' auch als „Differentialquotient“ dy/dx . Auch hier ist das „d“ wieder ein Operator und nicht etwa ein Multiplikationsfaktor. Man kann diese Prosa ja sehen, wie man will, aber die mathematische Formelschreibweise ist auch hier kürzer, klarer und übersichtlicher:

$$\text{Wenn } y = f(x), \text{ dann ist } y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Dennoch noch einmal in Worten: Die Ableitung y' der Funktion y ist der Differentialquotient dy/dx , der sich aus dem Grenzwert des Differenzenquotienten $\Delta y/\Delta x$ für $\Delta x \rightarrow 0$ ergibt. Die Ausdrücke dy und dx heißen Differentiale. Sie stellen infinitesimal (ein vornehmes Wort für „unendlich“) kleine Zahlenwerte dar und man kann mit ihnen fast wie mit „normalen“ Variablen rechnen. Die Notation einer Ableitung als Quotient zweier Differentiale wurde von Leibniz eingeführt. Es ist

zu vermuten, das der Name „Differentialrechnung“ ursprünglich nichts anderes bedeutete als „Rechnen mit Differentialen“.

Für Funktionen mit Potenzen von x in der Form $y=ax^n$ bleibt der Faktor a erhalten. Die Ableitung ist $y'=a \cdot nx^{n-1}$. Der Exponent n der Variablen x in der Funktion wandert als zusätzlicher Faktor in die 1. Ableitung. Dann wird er bei x um 1 vermindert. Fertig ist y' . Eine Art „Summenregel“ sorgt dafür, dass sich Funktionen aus der Addition einzelner Bestandteile in die Addition ihrer Ableitungen verwandeln. Ist $y=ax^n+bx^m$, dann ist die Ableitung ist $y'=a \cdot nx^{n-1}+b \cdot mx^{m-1}$. Ein Beispiel macht wie so oft alles viel klarer: Eine „schiefe“ Parabel entsteht durch die Addition einer schön zur y -Achse symmetrischen Parabel und einer Geraden. Sagen wir: $y=3x^2+5x$. Die Steigung dieser Kurve ist $y'=6x+5$, weil die Gerade ja die Hochzahl 1 hat. Nehmen wir ein krummeres Gebilde $y=4x^3-2\pi x^2+2,345$. Dessen Steigung in jedem Punkt x ist $y'=12x^2-4\pi x$. Die Konstante verschwindet ja nach der Ableitungsregel, da sie in der Funktion mit x^0 (also 1) multipliziert wurde. So wird nach der Regel die Null zum Faktor in der Ableitung, und weg ist die Konstante. Was man sofort einsieht: Eine Funktion $y=c$ ist ja eine Parallele zur x -Achse... und die hat die Steigung 0.

Rudi tauchte wieder auf und saugte die neuen Weisheiten begierig in sich auf. Er erkannte sofort die Konsequenzen für physikalische Formeln. Gerade dort will man ja nicht nur wissen, wie eine Funktion *verläuft*, sondern auch, wie sie sich *ändert*. Er beschloss, darüber nachzudenken und später mit Eddi darüber zu diskutieren.

Mit der „limes“-Schreibweise konnte er sich nicht anfreunden und murrte: „Der Grenzwert von einer Änderung des y -Wertes dividiert durch die zugehörige Änderung des x -Wertes, wenn dieser gegen Null geht“, das nenne ich einen komplizierten Ausdruck! Was das alleine an Platz und Kohlestift verbraucht...“. Eddi sah das ein: „Dann nehmen wir die Bezeichnung ‚ y -Strich‘ und schreiben ‚ y' ‘ dafür. Da müssen wir aber aufpassen, denn der hochgestellte Strich wird leicht übersehen. Und wenn du physikalische Größen hast, zum Beispiel die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Zeit t , dann ist die Ableitung der Funktion $v(t)$ durch die Bezeichnung $v'(t)$ zu erkennen. Aber vielleicht markiere ich die Ableitung von v nach t auch mit einem Punkt über dem v ? Die Schreibweise $\dot{v}$ ist ja noch kürzer. Wir haben doch noch gute Augen und werden das nicht verwechseln.“

Eddi hob die Bedeutung dieser Überlegungen noch einmal hervor: „Wenn du eine Geschwindigkeit hast, die sich ständig verändert – zum Beispiel beim Beschleunigen oder Bremsen –, dann willst du ja ihren Wert an jedem Punkt des Weges kennen. Der Ausdruck $v=s/t$ hilft dir da nicht, denn ein Punkt hat keine Ausdehnung, also ist $s=0$. Um eine Strecke der Länge 0 zurückzulegen, brauchst du keine Zeit. Also ist $t=0$. Damit bekämost du den Ausdruck $v=0/0$, und das ist die

berüchtigte Falle. Deswegen musst du die endlichen, aber winzigen Differentiale durch einander dividieren: $v = ds/dt$, deren Verhältnis erhalten bleibt, auch wenn beide gegen 0 streben.“

Rudi nickte zustimmend und sah sich die allgemeine Formel des Differenzierens von Potenzausdrücken noch einmal genauer an: $y' = a \cdot nx^{n-1}$. „Das ist ja auch eine Art ‚Potenzverlust‘, wenn der Exponent um eins verringert wird“, sagte er. „Das dürfen wir aber nicht Willa sagen“, meinte Eddi, „Sie könnte es falsch verstehen. Aber es ist ja logisch: Es ist ein Krümmungsverlust, wenn wir an eine gebogene Kurve eine gerade Tangente als Steigung anlegen.“

Nun, das war offensichtlich ein müder (und nicht ganz korrekter) Scherz. Der „Potenzverlust“ beim Differenzieren von Polynomen ist eine Eigenheit der Polynome und nicht des Differenzierens an sich. Es gibt auch Funktionen, deren Ableitung komplizierter wird, und trotzdem gibt es einen Krümmungsverlust beim Ausrechnen der Tangente.

Differentialrechnung für Höhlenmenschen und andere
Anfänger

Die mathematische Behandlung kleinster Änderungen

Beetz, J.

2014, XIII, 37 S. 10 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-08484-4