2 Einstiegshilfe

Du hast in einem kleinen nördlichen Bundesland mit häufigen „progressiven Schulreformen“ Dein „Abitur“ gemacht und studierst irgendetwas Ingeniöriges oder hast es vor? Dann bist Du hier richtig. Hier bekommst Du neben den vier Grundrechenarten alles beigebracht, um auch den Rest des Buches zu verstehen.

Nachdem Herr Dr. Romberg seine traumatischen Erlebnisse als Dozent einiger der oben erwähnten Abiturienten (die z. B. beim $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ das x schon mal wegkürzen[1]) geschildert hat, entschlossen wir uns (auf Anraten von Herrn Dr. Romberg übrigens), eine Einstiegshilfe dem eigentlichen Inhalt voranzustellen. Und zwar für alle (also nicht nur für Schulreformopfer), die Schwierigkeiten haben sollten oder weil wegen „zufälligerweise“ verpasster Mathe-Unterrichtsstunden Lücken entstanden sind, um ein bisschen Basiswissen aufzufrischen. Hast Du Dein Abi jedoch in Bayern gemacht, kannst Du an dieser Stelle zum nächsten Kapitel vorrücken.

2.1 Ein paar mathematische Zeichen und was man damit macht

In diesem kurzen Abschnitt stellen wir Euch ein paar Zeichen vor, die in der Mathematik gerne angewendet, aber nicht immer sauber erläutert werden und man manchmal wie ein Ochs vorm Berg davor steht und nicht weiß, was von einem denn nun um Himmels willen erwartet wird.

Beginnen wir mit dem Summenzeichen:

$$\sum_{k=1}^{n} \text{Hier kommt dann ein Term, in dem } k \text{ vorkommt.}$$

Das große $\sum$ ist der griechische Großbuchstabe für „Sigma“ und steht für „Summe“. Dieses Zeichen deutet an, dass wir etwas aufaddieren (also zusammenzählen) sollen. Der Term hinter dem Summenzeichen beschreibt dann, nach welcher Gesetzmäßigkeit die einzelnen Summanden gebildet werden sollen, die wir dann anschließend aufsummieren. Diese Gesetzmäßigkeit enthält dann entweder als Index oder als Teil der Formel den sogenannten „Laufindex“ k.

Darüber hinaus sehen wir unter dem Summenzeichen die Vorschrift, dass wir für den ersten Summanden $k = 1$ setzen sollen (es gehen aber auch andere Werte, es muss nicht immer bei 1 beginnen!). Für den letzten Summanden, den wir hinzuzählen sollen, setzen wir für k die Zahl (oder den Platzhalter) n ein, die oberhalb des Summenzeichens steht. Den zweiten Summanden bilden wir, in dem wir k um 1 erhöhen, den dritten Summanden noch einmal um 1 und so weiter, bis wir beim letzten Summanden angekommen sind (für den wir wie gerade erwähnt, die Zahl

[1] Herr Dr. Romberg könnte noch viele solche Beispiele anführen, lässt dies aber aus Respekt gegenüber eines bestimmten musikalischen und akrobatischen Tierquartetts lieber bleiben...

M. Dietlein, O. Romberg, *Keine Panik vor Ingenieurmathematik!,* DOI 10.1007/978-3-8348-2124-9_2,

oder den Platzhalter oberhalb des Summenzeichens einsetzen). Der Laufindex k und auch n können dabei nur ganzzahlige Werte annehmen, also 1 oder 2, usw., aber nicht z. B. 1,4 oder 3,9 oder $\frac{1}{2}$ oder dergleichen.

Hier ein Beispiel, in dem der Laufindex als Teil der Formel auftritt:

$$\sum_{k=1}^{10} k.$$

Das berechnen wir so:

$$\sum_{k=1}^{10} k = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55.$$

Jetzt ein Beispiel, in dem der Laufindex als Index einer Variable vorkommt:

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{x_k}.$$

Berechnen können wir hier nichts, weil wir dazu wissen müssten, wie groß die einzelnen x_k sind oder wie groß n sein soll, aber formelmäßig können wir es ausschreiben:

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{x_k} = \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \cdots + \frac{1}{x_n}.$$

Das Produktzeichen funktioniert ganz ähnlich, nur dass wir nicht die Summe bilden, sondern ein Produkt. Das Zeichen verwendet den griechischen Großbuchstaben „Pi“ und schaut so aus:

$$\prod_{k=1}^{n} \text{Hier kommt dann ein Term, in dem } k \text{ vorkommt.}$$

Wie oben kann unser Produkt auch bei einem anderen Wert als $k = 1$ beginnen und der Laufindex kann im Index oder in der Formel selbst vorkommen. Aber auch hier muss k immer ganzzahlig sein!

Beispiel für k als Teil der Formel:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^1} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^3} \cdots \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Das Produktzeichen ist z. B. auch hilfreich, wenn gezeigt werden soll, wie man

$$n!,$$

sprich „n Fakultät“, berechnet. Nämlich

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n.$$

2.2 Über den Umgang mit Klammern

Auch wenn Büroklammern in langweiligen Vorlesungen dazu einladen, damit zu spielen (z. B. lange Ketten daraus zu basteln oder sie irgendwie sinnlos zu verbiegen), ist hier doch etwas anderes gemeint.

Klammern dienen dazu, innerhalb von Formeln und Rechenvorschriften Teile zusammenzufassen, die zusammengehören. Das wenden wir z. B. bei Vektoren (siehe Kapitel 5) und Matrizen (siehe Kapitel 8) an. Grundlegender aber ist, dass wir mit Hilfe von Klammern Prioritäten setzen können, in welcher Reihenfolge bestimmte Rechenschritte durchzuführen sind.

Wenn Ihr Euch erinnert, haben wir schon sehr früh[2] gelernt, dass „Punkt vor Strich“ gilt, also dass wir die Multiplikation bzw. Division (durch einen bzw. zwei Punkte gekennzeichnet) „zeitlich“ vor einer Addition bzw. Subtraktion (durch Striche gekennzeichnet) durchzuführen haben. Wir können aber bei Bedarf von diesem Gesetz abweichen, wir müssen dies aber mittels Klammern kennzeichnen. Das ist Euch sicher mehr als vertraut, weshalb wir hier nicht weiter darauf eingehen. Wichtig ist dabei, dass wir Klammern immer von innen nach außen ausrechnen, d. h. wir fangen immer mit der innersten Klammer an und rechnen sie zuerst aus. Anschließend gehen wir zur nächstinneren und arbeiten uns so nach außen vor.

Auch das sollte eigentlich keine Schwierigkeiten bereiten. Etwas problematischer ist es, wenn Klammern aufgrund von ungesagten Konventionen weggelassen werden. Es gibt ganz bestimmte Funktionen (wie z. B. den Sinus, Cosinus oder den Logarithmus), bei denen manchmal die Klammern nicht hingeschrieben werden. Wir dürfen also Dank eines ungeschriebenen Gesetzes z. B. schreiben:

$$\sin\alpha, \tan\alpha \text{ oder } \ln x,$$

wobei dann eigentlich

$$\sin(\alpha), \tan(\alpha) \text{ oder } \ln(x)$$

gemeint ist!

Manchmal sieht man leider z. B. auch folgende Schreibweise:

$$\sin xy$$

für

$$\sin(xy).$$

Gänzlich unmathematischer-weise ist die Schreibweise $\sin xy$ in diesem Fall nicht eindeutig! Denn es ist absolut möglich, $\sin x \cdot y$ auch als $(\sin x) \cdot y$ aufzufassen! Die Ergebnisse wären dann völlig verschieden! Diese Zweideutigkeit tritt aber nur bei einem Produkt auf, denn für elementare Funktionen (wie z. B. sin, cos, ln) gilt, dass sie Vorrang vor Addition oder Subtraktion haben.

An diesem Beispiel sehen wir übrigens sehr deutlich, dass Klammern für Eindeutigkeit sorgen, deswegen lieber einmal zuviel Klammern gesetzt als zu wenig! Bitte traut Euch auch in

[2] in der 2. Klasse (im erwähnten nördlichen Bundesland: 4. Klasse).

Prüfungen den Aufpasser oder die Aufpasserin zu fragen, wenn eine Formel in einer Aufgabe nicht eindeutig ist. Wenn der Aufpasser oder die Aufpasserin ein Einsehen hat, wird er oder sie die Formel eindeutig an die Tafel schreiben und manch Kommilitone oder Kommilitonin wird es Euch danken.[3]

Es gibt aber im Zusammenhang mit diesen Funktionen noch eine andere unsichtbare Klammer, die nur in größten Ausnahmefällen hingeschrieben wird, weil es hier eher unwahrscheinlich ist, dass es zu Zweideutigkeiten kommt.

Denn die elementare Funktion wird immer <u>zuerst</u> ausgewertet, bevor mit ihrem Ergebnis weiter gerechnet wird.

So berechnen wir bei

$$\sin\pi + 1$$

zunächst den $\sin\pi$ und addieren dann erst die 1! Mit Hilfe von Klammern ausgedrückt lautet die Rechenvorschrift

$$(\sin\pi) + 1.$$

Steht dagegen da, dass

$$\sin(\pi + 1),$$

dann addieren wir zunächst 1 zu π hinzu und berechnen dann mit dem so erhaltenen Ergebnis den Sinus. In diesem Fall <u>müssen</u> wir um die Summe eine Klammer setzen, weil wir sie zuerst auswerten sollen.

[3] Herr Dr. Romberg merkt an, dass die Aufpasser oder Aufpasserinnen bei Prüfungen meistens auch keine Ahnung haben.

Euch sollte also klar geworden sein, dass wir beim Bruch $\frac{\sin x}{x}$ N-I-C-H-T durch x kürzen dürfen, wie besonders kreative Studenten einer Hochschule eines sehr kleinen nördlichen Bundeslandes Herrn Dr. Romberg in einer Mechanik-Vorlesung vorschlugen. Dieses Ereignis steht recht weit oben auf der Liste der traumatischen Erlebnisse aus seiner Dozenten-Zeit.

2.3 Ausmultiplizieren und die Binomischen Formeln

Jetzt, nachdem wir Meister der Klammern geworden sind, ist es Zeit ans Ausmultiplizieren zu gehen, wenn wir zwei Klammerausdrücke haben, die miteinander multipliziert werden sollen. Sowas wie

$$(\text{Klammerterm 1}) \cdot (\text{Klammerterm 2}).$$

Wir könnten jetzt, wie wir es gelernt haben, erst den Inhalt der Klammern einzeln ausrechnen und dann das Ergebnis miteinander multiplizieren. Das ist allerdings nicht immer so einfach möglich, weil in einem oder, was noch wahrscheinlicher ist, in allen Klammerinhalten eine sogenannte „Unbekannte“ bzw. eine Variable steht, die als Platzhalter für eine noch unbekannte Zahl fungiert. Hier müssen wir anders vorgehen. Wir „multiplizieren aus“[4].

Das Prinzip des Ausmultiplizierens ist, dass wir *jeden Summanden der einen Klammer mit jedem Summanden der anderen Klammer* „verheiraten“ (sprich multiplizieren), aber bitte nicht mit den anderen Mitgliedern der eigenen Familie, also nicht mit den anderen Summanden der eigenen Klammer:

Wir rechnen also z. B.

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

oder

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2 + b_3) = a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_3.$$

Manchmal haben wir nur eine Variable oder Zahl, die mit einer Klammer multipliziert werden soll. Dann denken wir uns diese eine Variable oder Zahl mit Klammern umgeben und behandeln sie genauso wie zuvor die zwei Klammern mit mehreren Summanden darin. Also muss die Zahl (oder Variable) mit jedem Summanden multipliziert werden:

$$a \cdot (b + c) = ab + ac.$$

Als Krönung des Kapitels für Einsteiger präsentieren wir nun: die <Trommelwirbel> *binomischen Formeln*, die in manchen Fällen das Ausmultiplizieren verkürzen.

Es sind derer drei; sie werden dann verwendet, wenn wir zwei Klammern haben, die miteinander multipliziert werden sollen und jeweils aus zwei Summanden bestehen, die obendrein auch identisch sind. Dann ergibt sich nämlich immer dasselbe, und wir können uns das Ausmultiplizieren ersparen, indem wir einfach die passende Formel verwenden:

[4] Futur II, 2. Person Plural: „Ihr werdet ausmultipliziert haben“.

1. Binomische Formel

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2a \cdot b + b^2.$$

2. Binomische Formel

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2a \cdot b + b^2.$$

3. Binomische Formel

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Natürlich ist es Euch erlaubt, diese Formeln nicht auswendig zu lernen, denn Ihr könnt zum gleichen Ergebnis kommen, wenn Ihr wie oben gezeigt, die Klammern eben einfach ausmultipliziert. Da diese Art von Klammermultiplikation aber sehr, sehr oft vorkommt, ist es doch ein erhebliches Zeitersparnis, sie sich einfach zu merken. Außerdem verringert Ihr so die Gefahr, dass Ihr Euch beim Ausmultiplizieren verrechnet.

2.4 Über das Rechnen mit Einheiten

Als Ausstieg aus dem Einstieg möchten wir noch erläutern, wie wir mit Einheiten umgehen, mit denen insbesondere der Ingenieur oder Physiker zu kämpfen hat, auch wenn sich die Mathematik damit meist nicht unmittelbar auseinandersetzt. Mit Einheiten bedenkt der Physiker oder Ingenieur Werte, die irgendwelche physikalischen Eigenschaften der Materie (wie z. B. die Masse, die Geschwindigkeit, die Größe, die Temperatur…) bemessen, also ein Maß darstellen. Dabei bekommen Maße identischer physikalischer Eigenschaften identische Einheiten. So hat die Geschwindigkeit immer das Maß „Strecke durch Zeit“, also fast überall auf der Welt die Maßeinheit „Meter durch Sekunde“ bzw. $\frac{m}{s}$. Das Beispiel einer Einheit für die Geschwindigkeit setzt sich selbst wiederum aus zwei Einheiten zusammen, eine für eine Strecke, üblicherweise ausgedrückt in „Meter“ (m) und eine für die Zeit, ausgedrückt in „Sekunde“ (s)[5]. Legt ein Körper innerhalb von 10 Sekunden ($10s$) eine Strecke von 100 Metern ($100m$) zurück, dann ist seine Geschwindigkeit

$$v = \frac{100m}{10s} = 10\frac{m}{s}.$$

Wir sehen also, dass es Einheiten gibt, die sich aus anderen Einheiten, den Basiseinheiten, zusammensetzen. Zu den für uns wichtigsten Basiseinheiten gehören:

- Meter m als Maß für eine Strecke,
- Sekunde s als Maß für die Zeit,

[5] Natürlich können wir auch andere Zeitmaßeinheiten verwenden wie z. B. Minuten, Stunden, Jahre, etc. Manchmal kommt das auch vor, aber für's Rechnen ist die Sekunde einfach einfacher zu handhaben. Deswegen zur Not in Sekunden umrechnen!

- Kilogramm kg als Maß für das Gewicht,
- Kelvin K als Maß für die Temperatur ($1K = 1^{\deg}C$ mit $0K = -273{,}15^{\deg}C$),
- Ampere A als Maß für die Stromstärke und
- Mol mol als Maß für die Stoffmenge ($1mol = 6{,}022 \cdot 10^2 3$ Teilchen).

Aus diesen Einheiten können wir andere abgeleitete Maßeinheiten bilden, die manchmal eine eigene Einheit bekommen. Wie wir sie bilden, hängt oftmals davon ab, wie wir die zugehörige physikalische Eigenschaft definieren. So ist die Kraft als die Kraft definiert, die wir aufwenden müssen, um einen Körper von $1kg$ Masse auf $1\frac{m}{s^2}$ zu beschleunigen (die Beschleunigung ist auch eine zusammengesetzte Größe mit der Einheit $\frac{m}{s^2}$). Die Kraft erhielt zu Ehren von Isaac Newton (der die Newtonschen Gesetze erfunden hat) die Einheit Newton N und setzt sich gemäß der gängigen Definition der Kraft wie folgt zusammen:

$$1N = 1\frac{kg \cdot m}{s^2}.$$

Letztendlich ist das Newton nur eine Abkürzung, damit wir nicht so viel schreiben müssen. Wir dürfen, wenn wir wollen, natürlich anstelle des Newtons die Kraft in Basiseinheiten ausschreiben.

Rechnen dürfen wir übrigens ganz normal mit Einheiten, wobei wir nur berücksichtigen müssen, dass wir nur gleiche Einheiten addieren bzw. subtrahieren oder kürzen dürfen! Haben wir z. B. als Aufgabe gegeben, dass wir die Kraft berechnen sollen, die wir benötigen, um einen Körper von einer Masse von $1000kg$ auf $10\frac{m}{s^2}$ zu beschleunigen, rechnen wir einfach das Produkt aus beiden Zahlen (so ist unsere Definition von Kraft: „Kraft mal Beschleunigung“), wobei wir in einem Zwischenschritt die einzelnen Einheiten hinter die Zahlen schreiben. Also

$$F = 1000kg \cdot 10\frac{m}{s^2} = 1000 \cdot 10kg \cdot \frac{m}{s^2} = 10000\frac{kgm}{s^2} = 10000N.$$

Der Druck, der von einer Kraft auf eine Fläche ausgeübt wird, ist definiert als „Kraft pro Fläche“ und seine Einheit ist $\frac{N}{m^2}$. Wollen wir nun wissen, welchen Druck die gerade eben berechnete Kraft auf eine Fläche A von $1m^2$ ausübt, so bilden wir einfach den Quotienten aus beiden Größen,

$$p = \frac{F}{A} = \frac{10000N}{1m^2} = 10000\frac{N}{m^2}.$$

Manchmal macht es Sinn, die Einheiten auszuschreiben. Im Falle unseres Drucks also

$$p = 10000\frac{\frac{kgm}{s^2}}{m^2} = 10000\frac{kgm}{s^2m^2}.$$

Wir sehen, dass sowohl im Nenner wie auch im Zähler die Einheit m vorkommt. Wir dürfen, wenn wir wollen, hier durch m kürzen. Es ist also durchaus legitim für unseren Druck zu schreiben, dass

$$p = 10000\frac{kg}{ms^2}.$$

Wollen wir wieder auf unsere übliche Einheit für den Druck zurückrechnen, müssen wir den Bruch mit den Einheiten um m erweitern, also

$$p = 10000 \frac{kg}{ms^2} \cdot \frac{m}{m} = 10000 \frac{kgm}{s^2 m^2} = \frac{N}{m^2}.$$

Eine gebräuchliche Einheit für den Druck ist übrigens das „Pascal“, in mathematischer Form

$$1Pa = 1 \frac{N}{m^2}.$$

Wir sehen also, dass wir normal rechnen dürfen mit Einheiten. Wir dürfen sie mit sich selbst multiplizieren (also quadrieren oder mit noch höheren Potenzen versehen) oder mit anderen Einheiten, oder auch Wurzel ziehen! Also z. B.

$$\sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{m}{s}.$$

Zm Schluss dieses Kapitels möchten wir noch einmal die Wichtigkeit betonen, auch immer die Einheiten mit hinzuschreiben. Physikalische Werte stehen nämlich nicht gerne nackig da, denn nur so erkennen wir, welche Größe wir vor uns haben und laufen nicht Gefahr, z. B. eine Kraft für ein Moment zu halten (= großes Problem!).

http://www.springer.com/978-3-8348-1567-5

Keine Panik vor Ingenieurmathematik!
Erfolg und Spaß im e-hoch-wichtig-Fach des Ingenieurstudiums
Dietlein, M.; Romberg, O.
2014, VIII, 310 S. 61 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-8348-1567-5