

Zusammenfassung

Es wird die Herleitung des maßgebenden Anfangs-Randwert-Problems für kleine Schwingungen eines isotrop elastischen, homogenen Festkörpers weitgehend beliebiger Geometrie, Lagerung und Belastung behandelt. Nach Bereitstellung der kinematischen Grundlagen werden eine synthetische Darstellung auf der Basis von Bilanzgleichungen und eine analytische Darstellung mit Hilfe des Prinzips von Hamilton vorgestellt. Während im Rahmen synthetischer Methoden die so genannten dynamischen Randbedingungen entsprechend formuliert werden müssen, sind diese beim Prinzip von Hamilton automatisch miteingefasst. Damit das beschreibende Anfangs-Randwert-Problem vollständig in Verschiebungen angegeben werden kann, sind die konstitutiven Gleichungen, die einen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen herstellen, und die geltenden Verzerrungs-Verschiebungs-Zusammenhänge einzuarbeiten.

Die Problemstellung, die hier behandelt werden soll, betrifft schwingende, isotrop elastische, homogene Festkörper beliebiger Geometrie, Lagerung und Belastung. Ziel ist die Formulierung der zugehörigen Anfangs-Randwert-Aufgabe im Rahmen einer linearen Theorie und zwar sowohl in synthetischer als auch analytischer Darstellung.

Den Ursprung für eine korrekte Beschreibung bilden Überlegungen von Navier aus dem Jahre 1821 mit der Angabe von Bewegungsgleichungen (in Verschiebungsgrößen) eines schwingenden dreidimensionalen Festkörpers¹ und die ersten Lösungen konkreter, mehrdimensionaler Wellenausbreitungs- und Schwingungsprobleme durch Cauchy, Poisson und Lamé, wobei die beiden erstgenannten bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen ebenfalls Pionierarbeit leisteten. Ein wichtiger Meilenstein auf dem Wege zur Formulierung der Grundgleichungen der Elastokinetik war das Werk von Hooke mit der experimentellen Verifizierung der Proportionalität zwischen Spannung und Verzerrung an Drähten

¹ Für den Sonderfall zusammenfallender Laméscher Konstanten (siehe Abschn. 2.4).

aus dem Jahre 1660², das durch spätere Betrachtungen über die Natur der Elastizität insbesondere von Young aus dem Jahre 1806 ergänzt wurde.

2.1 Kinematische Grundlagen

Zur Vorbereitung der Herleitung der eigentlichen Bewegungsgleichungen werden hier allgemeine Bewegungen eines Körpers in materieller und räumlicher Beschreibung betrachtet und die dabei auftretenden Verformungen bei Festkörpern spezifiziert [8]. Es werden geeignete Verzerrungsmaße und zeitliche Änderungsraten der Bewegung, nämlich Geschwindigkeit und Beschleunigung, eingeführt. Ausgehend von einer beliebigen Bewegung in nichtlinearer Formulierung interessieren dann insbesondere kleine Schwingungen im Rahmen einer linearen Theorie.

Die Beschreibung der Verformung ist ein rein geometrisches Problem und vom Materialverhalten völlig unabhängig.

2.1.1 Koordinaten und Bewegung

Die zusammenhängenden materiellen Punkte eines Körpers mit dem materiellen Volumen und der begrenzenden materiellen Oberfläche füllen im Euklidischen, d. h. nichtgekrümmten Anschauungsraum \mathbb{R}^3 , einen Bereich bestimmter Größe und Gestalt.

In einer willkürlich gewählten *Referenzplatzierung* zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ sei V der Volumenwert und S die Größe der berandenden Oberfläche. Ein herausgegriffener *materieller Punkt* des Körpers nimmt dabei im \mathbb{R}^3 eine Position P ein, die durch der Kontur des Körpers im Ausgangszustand angepasste Koordinaten $X_K \in \{X_1, X_2, X_3\}$ charakterisiert wird. Alternativ wird der Ortsvektor \vec{R} von einem gewählten Ursprungspunkt O zum Punkt P benutzt, siehe Abb. 2.1a. Im Allgemeinen sind krummlinige Koordinaten zweckmäßig; die verwendete Indexschreibweise mit ausschließlich tiefgestellten Indizes ist allerdings nur für orthogonale, insbesondere kartesische Koordinaten uneingeschränkt richtig, wenn ko- und kontravariante Koordinaten in ihren Richtungen oder sogar insgesamt ununterscheidbar zusammenfallen³. Diese für alle Zeiten t einen materiellen Punkt identifizierenden, zeitunabhängigen Koordinaten $X_K \in \{X_1, X_2, X_3\}$ heißen *materielle Koordinaten* oder *Lagrange-Koordinaten* des materiellen Punktes. Die in Abb. 2.1a ebenfalls angedeuteten Lagrangeschen Koordinatenlinien in P als Schnittkurven der (paarweise geschnittenen) „Koordinatenflächen“ $X_1 = \text{const}$, $X_2 = \text{const}$ und $X_3 = \text{const}$ sind demzufolge materielle, dem Kontinuum aufgeprägte Koordinatenlinien, die jede Verformung des Körpers für $t > 0$ mitmachen. Die natürliche, an die Koordinatenlinien X_K in P tangente

² Bekannt gegeben 1676.

³ Im Zweifelsfall kann sich der Leser bei Formulierungen in Indexschreibweise immer die Wahl von kartesischen Koordinaten vorstellen, wofür die benutzte Darstellung ausnahmslos korrekt ist.

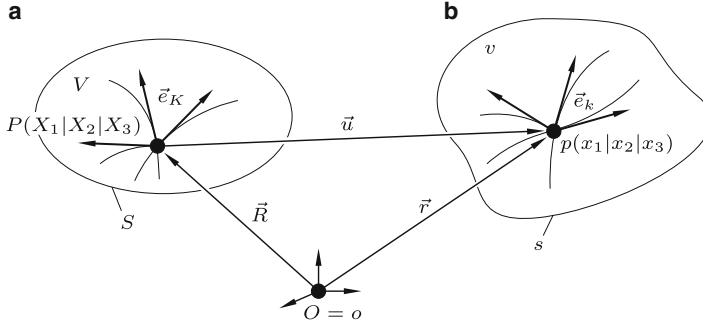


Abb. 2.1 Koordinatensystem für unverformten und verformten Körper. **a** Referenzplatzierung, **b** Momentanplatzierung

Basis $\vec{e}_K(X_L, t)$ berechnet sich über die partielle Ableitung des Ortsvektors \vec{R} nach X_K :

$$\vec{e}_K = \vec{R}_{,K} \quad \text{mit} \quad (\cdot)_{,K} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_K}. \quad (2.1)$$

Unter der Einwirkung äußerer Kräfte deformiert sich ein materieller Körper⁴. Die mit der Deformation einhergehende Bewegung bringt ihn mit allen materiellen Punkten im Innern aus der ursprünglichen Konfiguration zum Zeitpunkt $t = 0$ in eine neue räumliche Lage zur Zeit $t > 0$, die so genannte *aktuelle* oder *Momentan*-Platzierung. Sein materielles Volumen füllt jetzt einen räumlichen Bereich mit dem Volumen v und der Oberfläche s . Dabei sei $p(x_1|x_2|x_3)$ ein Punkt der Bahnkurve von $P(X_1|X_2|X_3)$, genauer: ein materieller Punkt, ursprünglich für $t = 0$ in der Position P , befindet sich *zur Zeit* $t > 0$ an der Stelle p , der man die Koordinaten $x_k \in \{x_1, x_2, x_3\}$ erteilt. Diese Koordinaten $x_k \in \{x_1, x_2, x_3\}$ nennt man *räumliche* Koordinaten oder Euler-Koordinaten. Anstelle der Koordinaten $x_k \in \{x_1, x_2, x_3\}$ kann auch dieses Mal ein entsprechender Ortsvektor \vec{r} von einem Ursprung $o (\equiv O, \text{hier})$ zum Punkt p verwendet werden, siehe Abb. 2.1b. Ebenso lässt sich eine natürliche, an die Koordinatenlinien x_k tangential Basis $\vec{e}_k(x_l, t)$ in p über die partielle Ableitung des Ortsvektors \vec{r} nach x_k berechnen:

$$\vec{e}_k = \vec{r}_{,k}, \quad \text{mit} \quad (\cdot)_{,k} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_k}. \quad (2.2)$$

Die eingeführten Koordinatensysteme wählt man oft zusammenfallend, im Allgemeinen werden sie jedoch verschieden sein. Verformt sich ein Quader beispielsweise in einen Kreiszylinder, so ist (insbesondere bei der Formulierung von Randbedingungen) die Benutzung kartesischer Koordinaten für den unverformten Körper zweckmäßig, während sich für das verformte Kontinuum Zylinderkoordinaten anbieten.

⁴ Bei Flüssigkeiten und Gasen werden Strömungen verursacht.

Wählt man als metrische Parameter, d. h. unabhängige Variable des Problems, Lagrange-Koordinaten, spricht man von einer *materiellen* Beschreibung; nimmt man Euler-Koordinaten, liegt eine so genannte *räumliche* oder *Feld*-Beschreibung vor. Die Beschreibung des Kontinuums in Lagrange-Koordinaten bedeutet nach allem Gesagten die Betrachtung eines definierten materiellen Teilchens durch einen materiefesten oder materiellen Beobachter, der in gleicher Weise, wie sich das Kontinuum verformt, ständig seinen Maßstab verzerrt. In Euler-Koordinaten dagegen handelt es sich um die Betrachtung eines Ereignisses, d. h. die Beobachtung vorbei ziehender, aufeinander folgender Teilchen an einer festen Stelle im Raum durch einen ortsfesten oder lokalen Beobachter, der für alle Zeiten t seinen Standort \vec{r} und Maßstab beibehält.

Formelmäßig lässt sich der beschriebene Sachverhalt einer Bewegung durch die Abbildung

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t) \leftrightarrow x_k = x_k(X_K, t) \quad (2.3)$$

bzw. alternativ

$$\vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, t) \leftrightarrow X_K = X_K(x_k, t) \quad (2.4)$$

ausdrücken. Es gilt die Übereinkunft, dass das Symbol \vec{x} (bzw. x_k) oder \vec{X} (bzw. X_K) auf der rechten Seite der jeweiligen Gleichung die *Funktion* repräsentiert, deren Argumente \vec{X} (bzw. X_K) oder \vec{x} (bzw. x_k) und t sind, während dasselbe Symbol auf der linken Seite den Funktionswert kennzeichnet⁵. Gleichung (2.3), die eine materielle Beschreibung der Bewegung widerspiegelt, kann man interpretieren, dass ein materieller Punkt mit der Referenzposition $P(X_1|X_2|X_3)$ aktuell für $t > 0$ die räumliche Lage $p(x_1|x_2|x_3)$ einnimmt, während die inverse Darstellung (2.4) als räumliche Beschreibung der Bewegung den umgekehrten Sachverhalt erläutert, dass nämlich zur Zeit t der materielle Punkt, der dann die Position $p(x_1|x_2|x_3)$ besitzt, sich auf seine Originallage $P(X_1|X_2|X_3)$ zurückverfolgen lässt. Die zwei möglichen Beschreibungen (2.3) bzw. (2.4) müssen natürlich konsistent miteinander sein, d. h. (2.4) kann durch Lösen von (2.3) erhalten werden und umgekehrt. Die üblichen Stetigkeits- und Eindeutigkeitsanforderungen an die Bewegung (2.3) bzw. (2.4) schließen Knicke, Klaffungen oder Materialdurchdringungen aus. Nachbarschaften bleiben erhalten und kein endlicher Volumenbereich des Kontinuums kann in das Volumen null oder unendlich verformt werden.

Für einen elastischen Körper ist eine materielle Beschreibung natürlicher: Weil es immer einen unverformten Referenzzustand gibt, in den der Körper nach Entlastung zurückgeht, sind die Formulierung sowohl von Stoffgleichungen als auch von Randbedingungen wesentlich einfacher⁶.

⁵ Andere Autoren unterscheiden diese Begriffe durch Wahl verschiedener Symbole.

⁶ Für fluiddynamische Problemstellungen dagegen ist eine Feldbeschreibung sinnvoller, weil beispielsweise das betrachtete Gebiet i. d. R. räumlich abzugrenzen ist. Fluide besitzen keine natürliche geometrische Gestalt; die Geschwindigkeit spielt die Schlüsselrolle innerhalb deren Kinematik.

2.1.2 Deformationsgradient und Verzerrungstensor

Zur Charakterisierung der lokalen Eigenschaften der mit der Bewegung einhergehenden Deformationen besitzen die so genannten *Deformationsgradienten* grundlegende Bedeutung. Sie folgen aus (2.3) bzw. (2.4) in der Form

$$\vec{\tilde{x}} = \text{Grad}(x_k \vec{e}_k) \leftrightarrow x_{k,K} \iff \vec{\tilde{X}} = \text{grad}(X_K \vec{e}_K) \leftrightarrow X_{K,k}. \quad (2.5)$$

Unter Verwendung der üblichen Summationskonvention, dass über wiederholt auftretende Indizes summiert wird⁷, geht ein *Linielement* $d\vec{R}$ in der Referenzplatzierung

$$d\vec{R} = \vec{R}_{,K} dX_K \equiv dX_K \vec{e}_K \equiv d\vec{X}$$

in ein Linielement $d\vec{r}$ in der Momentanplatzierung

$$d\vec{r} = \vec{r}_{,k} dx_k \equiv dx_k \vec{e}_k \equiv d\vec{x}$$

über⁸. Mit

$$d\vec{r} = \vec{\tilde{x}} d\vec{R} = x_{k,L} dX_L \vec{e}_k \leftrightarrow d\vec{x} = \vec{\tilde{x}} d\vec{X} \iff d\vec{X} = \vec{\tilde{X}} d\vec{x}$$

folgt dann für die *Koordinatendifferenziale*

$$dx_k = x_{k,L} dX_L \iff dX_K = X_{K,l} dx_l. \quad (2.6)$$

Auch die *Volumenelemente* dV und dv sowie die *Flächenelemente* $d\vec{A}$ und $d\vec{a}$ in der Referenz- und Momentanplatzierung können auf Wunsch angegeben werden.

Da der Deformationsgradient $\vec{\tilde{x}}$ isometrische Bewegungen enthalten kann, ist er als Verzerrungs- oder Verformungsmaß ungeeignet. Mittels *polarer* Zerlegung (siehe z. B. [8]) lassen sich diese deformationsfreien Anteile reiner Starrkörpertranslation und -rotation jedoch abspalten. Die verbleibende Dilatation, d. h. reine Dehnung des mit $d\vec{R}$ verbundenen Körpers in Richtung seiner Verzerrungshauptachsen (Volumendehnung), lässt sich über das Quadrat⁹ der Linielemente

$$dS^2 = d\vec{R} \cdot d\vec{R} = \delta_{KL} dX_K dX_L \iff ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \delta_{kl} dx_k dx_l \quad (2.7)$$

⁷ Der ausführlichen Darstellung eines Vektors $\vec{X} = X_1 \vec{e}_1 + X_2 \vec{e}_2 + X_3 \vec{e}_3$ ist danach die abkürzende Schreibweise $\vec{X} = X_K \vec{e}_K$ äquivalent.

⁸ Als Linielement bezeichnet man demnach den Abstand zweier infinitesimal benachbarter Punkte, eine Größe, die im Wesentlichen die so genannte *Metrik* eines Raumes bestimmt.

⁹ Es ist mathematisch bequem, beim Vergleich der Metrik des verformten mit der des unverformten Körpers mit den Linielementquadraten zu operieren.

darstellen. Dabei sind die so genannten Kronecker-Symbole

$$\delta_{KL} = \vec{e}_K \cdot \vec{e}_L \quad \Longleftrightarrow \quad \delta_{kl} = \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l$$

verwendet worden, die für übereinstimmende Indizes den Wert eins und sonst den Wert null annehmen. Einsetzen von (2.6) in (2.7) liefert dann

$$ds^2 = c_{kl} dx_k dx_l \quad \Longleftrightarrow \quad ds^2 = C_{KL} dX_K dX_L$$

mit dem *Cauchyschen* ($\vec{\tilde{c}}$) und dem *Greenschen Deformationstensor* $\vec{\tilde{C}}$:

$$c_{kl} = \delta_{KL} X_{K,k} X_{L,l} \quad \Longleftrightarrow \quad C_{KL} = \delta_{kl} x_{k,K} x_{l,L}. \quad (2.8)$$

Der Euler-Almansische ($\vec{\tilde{e}}$) und der am häufigsten verwendete Lagrange-Greensche Verzerrungstensor $\vec{\tilde{E}}$ hängen damit eng zusammen:

$$e_{kl} = \frac{1}{2} (\delta_{kl} - c_{kl}) \quad \Longleftrightarrow \quad E_{KL} = \frac{1}{2} (\delta_{KL} - C_{KL}). \quad (2.9)$$

Sie beschreiben die Änderung des Abstandes zweier infinitesimal benachbarter Punkte, einmal auf die Momentan-, einmal auf die Referenzplatzierung bezogen¹⁰. Aus (2.7) folgt nämlich nach Einsetzen von (2.9)

$$ds^2 - dS^2 = 2e_{kl} dx_k dx_l = 2E_{KL} dX_K dX_L. \quad (2.10)$$

Führt der Körper eine *reine* Starrkörperbewegung aus, ergibt sich keine Änderung differenzieller Längen, sodass die Differenz $ds^2 - dS^2$ verschwindet. Gilt dies für jede Richtung dx_k und dX_K , verschwinden auch die Tensoren $\vec{\tilde{e}}$ und $\vec{\tilde{E}}$. Deshalb sind diese in der Tat geeignete Verzerrungsmaße.

Es ist zweckmäßig, die Verzerrungstensoren in Anteilen des *Verschiebungsvektors* \vec{u} auszudrücken. Dieser kennzeichnet die Ortsänderung eines materiellen Punktes P des unverformten Körpers in der Referenzplatzierung in seine räumliche Position p in der Momentanplatzierung, in der der Körper verformt ist, siehe nochmal Abb. 2.1. In der Form

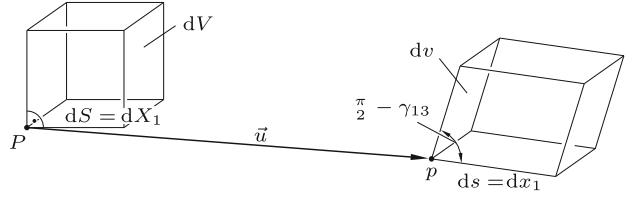
$$\vec{u} = \vec{r} - \vec{R} = x_k \vec{e}_k - X_K \vec{e}_K \quad (2.11)$$

kann er aus den Ortsvektoren \vec{r} zu p und \vec{R} zu P einfach angegeben werden¹¹. Über

$$\vec{u} = u_K \vec{e}_K = u_k \vec{e}_k \quad (2.12)$$

¹⁰ Der Faktor 1/2 ist eine historisch bedingte Konvention, die gewisse Rechenannehmlichkeiten mit sich bringt.

¹¹ Anders als in kartesischen Koordinaten, wo stets die Punktkoordinaten $X_K \in \{X_1, X_2, X_3\}$ bzw. $x_k \in \{x_1, x_2, x_3\}$ mit den Koordinaten R_K bzw. r_k der korrespondierenden Ortsvektoren \vec{R} bzw. \vec{r} übereinstimmen, gilt in krummlinigen Koordinatensystemen im Allgemeinen $X_K \neq R_K$ bzw. $x_k \neq r_k$!

Abb. 2.2 Dehnung und Winkeländerung

wird seine Koordinatendarstellung eingeführt, worin u_K und u_k die Lagrangeschen und Eulerschen Koordinaten desselben Vektors \vec{u} sind. Durch Ausführen des inneren Produkts auf beiden Seiten von (2.11) mit \vec{e}_K und \vec{e}_k erhält man explizite Bestimmungsgleichungen

$$u_K = \delta_{KI} x_I - X_K \quad \Longleftrightarrow \quad u_k = x_k - \delta_{kL} X_L$$

für diese Koordinaten.

Durch Gradientenbildung

$$\begin{aligned} \text{Grad } \vec{u} &= \text{Grad } \vec{r} - \text{Grad } \vec{R} \leftrightarrow u_{k,K} = r_{k,K} - \delta_{kK} = x_{k,K} - \delta_{kK}, \\ \text{grad } \vec{u} &= \text{grad } \vec{r} - \text{grad } \vec{R} \leftrightarrow u_{K,k} = \delta_{Kk} - R_{K,k} = \delta_{Kk} - X_{K,k} \end{aligned}$$

kann ein Zusammenhang zwischen den Verschiebungsgradienten und den Deformationsgradienten (2.5) hergestellt werden. Verwendet man diese Relation innerhalb (2.8) zur Berechnung der Deformationstensoren $\vec{\bar{c}}$ und $\vec{\bar{C}}$, lassen sich diese und damit – unter Verwendung von (2.9) – insbesondere auch die Verzerrungstensoren \vec{e} und \vec{E} auch über Verschiebungsableitungen darstellen:

$$e_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k} - u_{m,k} u_{m,l}) \Longleftrightarrow E_{KL} = \frac{1}{2} (u_{K,L} + u_{L,K} + u_{M,K} u_{M,L}). \quad (2.13)$$

Sowohl die Deformations- als auch die Verzerrungstensoren sind symmetrisch, d. h. es gilt

$$\begin{aligned} c_{kl} &= c_{lk} \Longleftrightarrow C_{KL} = C_{LK}, \\ e_{kl} &= e_{lk} \Longleftrightarrow E_{KL} = E_{LK}. \end{aligned}$$

Vorteilhaft lassen sie sich alle in Matrixform anordnen: Die drei Verzerrungsmaße e_{11} , e_{22} , e_{33} bzw. E_{11} , E_{22} , E_{33} (z. B.), die in der Hauptdiagonalen erscheinen, nennt man Normalverzerrungen, die restlichen außerhalb der Hauptdiagonalen heißen üblicherweise Scherungen oder Gleitungen.

Eine anschauliche geometrische Interpretation der nichtlinearen Verzerrungskordinaten (2.13) ist kaum möglich. Es kann jedoch ein Zusammenhang mit messbaren Dehnungen und Winkeländerungen hergestellt werden, siehe Abb. 2.2. Es wird hier allein eine

materielle Darstellung betrachtet. Als Dehnungen werden die bezogenen Längenänderungen

$$E_K = \frac{ds - dS|_{X_{L \neq K}=0}}{dS|_{X_{L \neq K}=0}} \quad (2.14)$$

definiert. Der Vergleich mit (2.10) führt auf den Zusammenhang

$$(1 + E_K)^2 = 2E_{KK}(dX_K)^2$$

oder

$$E_K = \sqrt{1 + 2E_{KK}} - 1. \quad (2.15)$$

Nach ähnlicher Rechnung erhält man für die Winkeländerungen γ_{KL} der ursprünglich orthogonalen Linienelemente $dS|_{X_{L \neq K}=0}$ und $dS^*|_{X_{K \neq L}=0}$ die Ergebnisse

$$\sin \gamma_{KL} = \frac{2E_{KL}}{\sqrt{(1 + 2E_{KK})(1 + 2E_{LL})}}. \quad (2.16)$$

Innerhalb einer *geometrisch linearen* Theorie werden infinitesimale Verschiebungsgradienten vorausgesetzt. Damit ergeben sich auch infinitesimale Verzerrungen (aber nicht umgekehrt). Der Eulersche (\vec{e}) und der Lagrangesche (\vec{E}) Verzerrungstensor reduzieren sich damit auf ihre infinitesimalen Anteile

$$\bar{e}_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \iff \bar{E}_{KL} = \frac{1}{2}(u_{K,L} + u_{L,K}).$$

In gleicher Ordnung der Approximation gilt für

$$u_{k,L} = u_{k,l}x_{l,L} = u_{k,l}(u_{l,L} + \delta_{lL}) \approx u_{k,l}\delta_{lL}$$

und analog $u_{K,L} \approx u_{K,l}\delta_{Ll}$, sodass es also unwichtig ist, ob nach Lagrangeschen oder nach Eulerschen Koordinaten differenziert wird. Offensichtlich wird innerhalb einer infinitesimalen Deformationstheorie der Bezug auf die Referenz- und auf die Momentanplatzierung identisch. Die beiden Konfigurationen sind deshalb, was die Beschreibung der Deformation angeht, nicht mehr unterscheidbar; Lagrangescher und Eulerscher Verzerrungstensor fallen als so genannter infinitesimaler Greenscher Verzerrungstensor (ε_{kl} bezeichnet) zusammen:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}). \quad (2.17)$$

Wie man (2.15) und (2.16) entnehmen kann, stimmen dann die Normalverzerrungen näherungsweise mit den physikalischen Dehnungen überein, während die Scherungen den

Wert der halben Winkeländerung zwischen den materiellen Koordinatenlinien vor und nach der Verformung approximieren.

Damit bei einer konkreten Problemstellung aus den sechs Verzerrungskordinaten die drei Verschiebungskordinaten *eindeutig* bestimmt werden können, müssen die Verzerrungskordinaten den so genannten *Kompatibilitätsbedingungen* genügen. Mit den kinematischen Gleichungen (2.13) bzw. (2.14) liegt nämlich eine Überbestimmtheit vor.

Die Herleitung dieser Verträglichkeitsbedingungen ist auf verschiedenen Wegen möglich. Wohl am einfachsten ist es, sie als Integrabilitätsbedingungen von (2.13) bzw. (2.14) aufzufassen, hier explizit vorgerechnet für den geometrisch linearen Fall (2.17). Zweimaliges Ableiten dieser Relationen ergibt zunächst

$$\varepsilon_{kl,mn} = \frac{1}{2} (u_{k,lmn} + u_{l,kmn}).$$

Vertauschen der Indizes liefert dann drei weitere analoge Gleichungen. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Verschiebungen sowie ihrer Ableitungen und der daraus resultierenden Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Ableitungen findet man durch Addition der erhaltenen vier Gleichungen

$$\varepsilon_{kl,mn} + \varepsilon_{mn,kl} - \varepsilon_{kn,lm} - \varepsilon_{lm,kn} = 0. \quad (2.18)$$

Dieser Ausdruck repräsentiert insgesamt $3^4 = 81$ Gleichungen, in denen die maßgebenden sechs Kompatibilitätsbedingungen enthalten sind. Die übrigen Gleichungen in (2.18) sind teils identisch erfüllt, teils handelt es sich wegen der Symmetrie des Verzerrungstensors und der Vertauschbarkeit der Differenzierungsreihenfolge um Wiederholungen. Schließlich gilt nach Beltrami, dass nur *drei* unabhängige Verträglichkeitsbedingungen existieren.

2.1.3 Geschwindigkeit und Beschleunigung

In der Kinetik schwingender Kontinua interessieren Zeitableitungen von so genannten *Vektorfeldern*, für die die auftretenden Ortskoordinaten über eine bestimmte räumliche Ausdehnung und die Zeit über eine endliche Spanne reichen. Formal kann man zeitliche Änderungsraten bei festgehaltener Lagrange-Koordinate X_K , $\frac{d_X(\cdot)}{dt}$, oder bei festgehaltener Euler-Koordinate x_k , $\frac{d_x(\cdot)}{dt}$, angeben. In der Kontinuumsmechanik bezeichnet man diese als *materielle* (*substanzielle*) oder als *lokale* Zeitableitungen.

Von besonderem Interesse ist die *materielle* Zeitableitung von Vektoren, z. B. \vec{b} , die nach den bisherigen Erläuterungen als

$$\frac{d_X \vec{b}}{dt} \equiv \frac{D \vec{b}}{Dt}$$

erklärt ist. Ist \vec{b} eine explizite Funktion der materiellen Koordinaten, d. h.

$$\vec{b} = \vec{b}(\vec{X}, t) = b_K(X_L, t)\vec{e}_K,$$

dann gilt für eine zeitinvariante, kartesische Basis \vec{e}_k offensichtlich

$$\frac{d_X \vec{b}}{dt} \equiv \frac{D\vec{b}}{Dt} = \frac{\partial b_K}{\partial t} \vec{e}_K \equiv b_{K,t} \vec{e}_K.$$

Ist \vec{b} dagegen eine explizite Funktion räumlicher Koordinaten, d. h.

$$\vec{b} = \vec{b}(\vec{x}, t) = b_k(x_l, t)\vec{e}_k(x_l, t),$$

dann ergibt sich nach der Kettenregel¹²

$$\frac{d_X \vec{b}}{dt} \equiv \frac{D\vec{b}}{Dt} = \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{b}}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t} \equiv \vec{b}_{,t} + \vec{b}_{,k} x_{k,t}.$$

Die materielle Zeitableitung setzt sich demnach bei Wahl Eulerscher Koordinaten als metrische Parameter aus einer *lokalen* oder *nichtstationären* und einer *konvektiven* Rate additiv zusammen. Für zeitinvariante, kartesische Basissysteme \vec{e}_k folgt das vereinfachte Ergebnis

$$\frac{D\vec{b}}{Dt} = (b_{k,t} + b_{k,l} x_{l,t}) \vec{e}_k.$$

In der klassischen Dynamik stellt die *Absolutgeschwindigkeit* \vec{v} eines materiellen Teilchens des betrachteten Kontinuums die entscheidende kinematische Größe dar. Sie berechnet sich als materielle Zeitableitung des Ortsvektors \vec{r} eines allgemeinen materiellen Punktes P , der momentan in verformtem Zustand mit dem Raumpunkt p zusammenfällt:

$$\vec{v} \equiv v_k \vec{e}_k = \vec{r}_{,t} + \vec{r}_{,k} x_{k,t}. \quad (2.19)$$

Mit (2.2) findet man endgültig

$$\vec{v} = \vec{r}_{,t} + x_{k,t} \vec{e}_k. \quad (2.20)$$

Liegt eine zeitinvariante, kartesische Basis \vec{e}_k vor, folgt

$$\vec{v} = (r_{k,t} + x_{k,t}) \vec{e}_k. \quad (2.21)$$

¹² Anstelle von $\frac{\partial x_k}{\partial t}$ steht eigentlich $\frac{d_X x_k}{dt}$. Weil diese Differenziation jedoch bei festgehaltenen Lagrange-Koordinaten X_K erfolgt, ist sie mit der partiellen Zeitableitung identisch.

Tritt als häufiger Fall keine reine Starrkörpertranslation auf, wofür $\vec{r} = \vec{r}(t)$ wäre, vereinfacht sich das Ergebnis (2.20) auf

$$\vec{v} = x_{k,t} \vec{e}_k. \quad (2.22)$$

Für den allgemeineren Fall $\vec{r} = x_k \vec{e}_k(x_l, t)$ verbleibt wegen $\vec{r}_{,t} = x_k \vec{e}_{k,t}$ nur noch die zeitliche Änderung von \vec{r} aufgrund der Drehung des Koordinatensystems um o als der rotatorische Anteil einer so genannten *Führungsbewegung*. Den in (2.20) zusätzlich auftretenden zweiten Term hätte man dann als *Relativgeschwindigkeit* zu interpretieren.

Mittels (2.11) kann die Geschwindigkeit \vec{v} auch über zeitliche Änderungsraten der Verschiebung \vec{u} ausgedrückt werden. Wegen $\vec{R} = \vec{X} = X_K \vec{e}_K(X_K) \neq \vec{R}(t)$ bleibt insbesondere (2.19), aber auch (2.20), (2.21) und (2.22), formal ungeändert; man hat nur $\vec{r}_{,t}$ und $x_{k,t}$ durch $\vec{u}_{,t}$ und $u_{k,t}$ zu ersetzen, sodass beispielsweise

$$\vec{v} \equiv v_k \vec{e}_k = \vec{u}_{,t} + u_{k,t} \vec{e}_k \quad (2.23)$$

folgt. In materieller Beschreibung, worin die Verschiebung \vec{u} ja als $\vec{u} = u_K \vec{e}_K$ angegeben wird, erhält man dann einfach

$$\vec{v} \equiv v_K \vec{e}_K = u_{K,t} \vec{e}_K. \quad (2.24)$$

Neben der Absolutgeschwindigkeit \vec{v} ist noch die *Absolutbeschleunigung* \vec{a} wesentlich. Sie wird als materielle zeitliche Änderungsrate der Geschwindigkeit \vec{v} definiert, d. h.

$$\vec{a} \equiv a_k \vec{e}_k = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{v}_{,t} + \vec{v}_{,k} x_{k,t} \equiv \vec{v}_{,t} + \vec{v}_{,k} v_k \quad (2.25)$$

oder für zeitinvariante, kartesische Basen $\vec{e}_k \neq \vec{e}_k(t)$ (vergl. (2.21))

$$\vec{a} = (v_{k,t} + v_{k,l} x_{l,t}) \vec{e}_k. \quad (2.26)$$

Als Lagrangescher Beobachter kennt man den materiellen Punkt mit seinen Koordinaten $X_K \in \{X_1, X_2, X_3\}$, sodass sich in diesem Fall

$$\vec{a} \equiv a_K \vec{e}_K = v_{K,t} \vec{e}_K = u_{K,tt} \vec{e}_K \quad (2.27)$$

ergibt.

Im Rahmen einer *kinematisch linearen* Theorie, wenn infinitesimale Geschwindigkeiten auftreten, erhält man

$$\begin{aligned} v_k &= u_{k,t} \iff v_K = u_{K,t}, \\ a_k &= u_{k,tt} \iff a_K = u_{K,tt} \end{aligned}$$

mit ununterscheidbaren Verschiebungskordinaten u_k und u_K , d. h. Absolutgeschwindigkeit und -beschleunigung in Lagrangescher und Eulerscher Beschreibung fallen zusammen.

2.2 Synthetische Kontinuumsmechanik

Als *synthetische Mechanik* bezeichnet man den Bereich der Mechanik, der die vektoriellen Impuls- und Drehimpulsbilanzen (in der Statik Kräfte- und Momentengleichgewichte) als grundlegende Postulate (so genannte „Axiome“) an den Anfang stellt. Bevor diese konkret formuliert werden können, ist eine Analyse des Spannungszustandes und der Wechselwirkungen der inneren Kräfte mit den Belastungen notwendig.

2.2.1 Spannungen

Der aus der Punktmechanik bzw. der Mechanik starrer Körper geläufige Kraftbegriff wird in geeigneter Weise in die Kontinuumsmechanik übertragen.

Lokal konzentrierte Einzelkräfte gibt es in Strenge nicht. In der Natur treten entweder räumlich verteilte Körperkräfte als so genannte *Massen- bzw. Volumenkräfte* \vec{f} oder flächenhaft verteilte, auf der Berandung eines Volumens angreifende, so genannte *Oberflächenkräfte* \vec{s} auf. Die äußeren eingepprägten Kräfte auf einen Körper lassen sich immer einer dieser beiden Kategorien zuordnen. Das Eigengewicht eines Tragwerks beispielsweise ist offensichtlich eine Massenkraft, während eine einwirkende Windbeanspruchung zu den Oberflächenkräften zählt.

Eine wichtige Hypothese zur kontinuumsmechanischen Erfassung der inneren Kraftwirkungen in verformbaren Körpern ist das so genannte Euler-Cauchy-*Spannungsprinzip*. An der gedachten Schnittfläche im Innern eines Körpers, die den Körper in zwei Hälften zerteilt, finden Wechselwirkungen statt. Die verursachten flächenhaft verteilten inneren Kräfte sind von gleicher Art wie die Oberflächenlasten und werden *Spannungen* genannt¹³. Bildet diese Fläche (mit dem Flächennormalen-Einheitsvektor \vec{n}) die materielle äußere Berandung s des Volumens v , so sind die dort herrschenden Spannungsvektoren $\vec{t}_{(\vec{n})}$ identisch mit dem Vektorfeld der dort vorgegebenen Oberflächenkräfte¹⁴ $\vec{s}_{(\vec{n})}$, d. h. es gilt

$$\oint_s \vec{t}_{(\vec{n})} da = \oint_s \vec{s}_{(\vec{n})} da. \quad (2.28)$$

Das Spannungsprinzip spezifiziert so die Natur der inneren Kräfte¹⁵.

Man erkennt – durch den tief gestellten Index angedeutet –, dass die Spannungsvektoren $\vec{t}_{(\vec{n})}$ im Innern eines verformbaren Körpers kein Vektorfeld im üblichen Sinne bilden, vielmehr hängt die Spannung auch noch von der Orientierung des Flächenelements da ab, an dem sie wirkt. Sie ändert sich, wenn die Normalenrichtung von da geändert wird.

¹³ Definiert man Spannungen aus konzentrierten Einzelkräften, so kann man sie über den Begriff der *Kraftintensität* erklären.

¹⁴ Dabei ist festzuhalten, dass die Richtung der Vektorfelder $\vec{t}_{(\vec{n})}$ und $\vec{s}_{(\vec{n})}$ im Allgemeinen nicht mit der Richtung \vec{n} zusammenfällt.

¹⁵ Spannungsfrei ist ein Körper, wenn ausschließlich die atomaren Bindungskräfte wirken.

Insbesondere gilt an einem gegebenen Raumpunkt p das so genannte *Lemma von Cauchy*

$$\vec{t}_{(-\vec{n})} = -\vec{t}_{(\vec{n})},$$

das unmittelbar als Aussage des dritten Newtonschen Axioms (Wechselwirkungsprinzip) angesehen werden kann. Zum anderen bestimmt nach dem so genannten *Fundamentaltheorem von Cauchy*

$$\vec{t}_{(\vec{n})} da = \vec{\vec{t}} \vec{n} da = \vec{\vec{t}} d\vec{a} \quad \leftrightarrow \quad t_{l(\vec{n})} da = t_{kl} n_k da = t_{kl} da_k \quad (2.29)$$

die Gesamtheit aller Spannungsvektoren $\vec{t}_{(\vec{n})}(p)$ an einem Punkt p für alle Richtungen \vec{n} (es gibt unendlich viele solcher Spannungsvektoren!) den Spannungszustand in p . Beschrieben wird er durch einen von \vec{n} *unabhängigen Tensor*, den so genannten *Cauchy-Spannungstensor* $\vec{\vec{t}}$. Dabei kennzeichnet in t_{kl} der erste Index (hier k) die zugehörige Flächennormale, der zweite Index (hier l) die jeweilige Spannungsrichtung. Für übereinstimmende Indizes stimmen demnach Flächennormalenrichtung und Spannungsrichtung überein; man bezeichnet diese Spannungen als *Normalspannungen*. Für verschiedene Indizes stehen die genannten Richtungen aufeinander senkrecht; die Spannungen liegen in der Tangentialebene des p zugeordneten Flächenelements da und werden Tangential- oder *Schubspannungen* genannt.

Im Rahmen einer für Festkörper angebrachten Lagrangeschen Betrachtungsweise, die mit Größen der Referenzplatzierung arbeitet, definiert man den Spannungsvektor $\vec{\sigma}_{(\vec{N})}$ am Raumpunkt p zur Zeit t , der gerade durch das Materieteilchen P (auf dem undeformierten Flächenelement dA mit der Flächennormalen \vec{N}) besetzt ist:

$$\vec{t}_{(\vec{n})} da = \vec{\sigma}_{(\vec{N})} dA \quad \leftrightarrow \quad t_{k(\vec{n})} da_k = \sigma_{K(\vec{N})} dA_K.$$

An die Stelle von (2.28) tritt dann die Aussage

$$\oint_S \vec{\sigma}_{(\vec{N})} dA = \oint_S \vec{s}_{(\vec{N})} dA \quad (2.30)$$

mit dem Vektorfeld der gegebenen Oberflächenkräfte $\vec{s}_{(\vec{N})}$. In völliger Analogie zu (2.29) können im Rahmen einer materiellen Beschreibung anstelle einer Feldbeschreibung über

$$\vec{\sigma}_{(\vec{N})} dA = \vec{\vec{\sigma}} \vec{N} dA = \vec{\vec{\sigma}} d\vec{A} \quad \leftrightarrow \quad \sigma_{l(\vec{N})} dA = \sigma_{KL} N_K dA = \sigma_{KL} dA_K \quad (2.31)$$

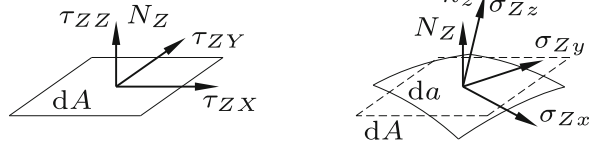
der so genannte *Piola-Kirchhoff-Spannungstensor 1. Art* $\vec{\vec{\sigma}}$ oder alternativ

$$\vec{\tau}_{(\vec{N})} dA = \vec{\vec{\tau}} \vec{N} dA = \vec{\vec{\tau}} d\vec{A} \quad \leftrightarrow \quad \tau_{L(\vec{N})} dA = \tau_{KL} N_K dA = \tau_{KL} dA_K \quad (2.32)$$

der so genannte *Piola-Kirchhoff-Spannungstensor 2. Art* $\vec{\vec{\tau}}$ eingeführt werden. Beide hängen über die Abbildung

$$\vec{\vec{\tau}} = \vec{\vec{X}} \vec{\vec{\sigma}} \quad \leftrightarrow \quad \tau_{KL} = \sigma_{KI} X_{L,I}$$

Abb. 2.3 Unterschiedliche Spannungstensoren



miteinander zusammen. Ersichtlich ist σ_{KI} die Spannung in p bezogen auf das unverformte Flächenelement dA in $P(p)$, siehe Abb. 2.3.

Neben den inneren Kräften benötigt man noch die auf den betreffenden Körper wirkende *resultierende äußere Kraft* $\vec{F}(t)$ und das *resultierende äußere Moment* $\vec{M}(t)$ bezüglich des Koordinatenursprungs $O = o$. Beide lassen sich mit dem Spannungsprinzip¹⁶ aus den äußeren Massenkraften \vec{f} und Oberflächenkräften $\vec{s}_{(\vec{N})}$ über¹⁷

$$\begin{aligned}\vec{F}(t) &= \int_V \vec{f} \rho_0 dV + \oint_S \vec{s}_{(\vec{N})} dA, \\ \vec{M}(t) &= \int_V (\vec{r} \times \vec{f}) \rho_0 dV + \oint_S (\vec{r} \times \vec{s}_{(\vec{N})}) dA\end{aligned}\quad (2.33)$$

zusammensetzen, wobei hier nur noch eine Darstellung in der Referenzplatzierung angegeben wird.

2.2.2 Bilanzgleichungen

Der Begriff „Körper“ steht in der Kontinuumsmechanik für eine Menge von Materie innerhalb eines endlichen, nicht verschwindenden Volumens, die durch seine *Masse* M (in der Referenzplatzierung) bzw. m (in der Momentanplatzierung) gemessen wird.

Ein fundamentales Axiom der klassischen Mechanik ist die Erhaltung der Masse. Es wird nämlich Masse weder erzeugt noch vernichtet, d. h. die totale Masse ist bei einer Bewegung ohne Massenzu- bzw. -abfuhr unveränderlich. Postuliert man eine *Referenzdichte* $\rho_0(X_K)$ in der Referenzplatzierung und eine *räumliche Dichte* $\rho(x_k, t)$ in der Momentanplatzierung, so impliziert die Massenerhaltung

$$\int_v \rho(x_k, t) dv = m \equiv M = \int_V \rho_0(X_K) dV. \quad (2.34)$$

Die Integration erfolgt über das materielle Volumen V oder v . Man kann dann aus (2.34) die Kontinuitätsgleichung in materieller oder räumlicher Formulierung herleiten, worauf

¹⁶ Hier nur für so genannte *Punktkontinua*: Jeder materielle Punkt hat dann nur *drei* Verschiebungs-, aber *keine* Rotationsfreiheitsgrade, wie im Falle *polarer* Kontinua, wofür neben Spannungen auch so genannte Momentenspannungen auftreten.

¹⁷ ρ_0 ist die Referenzdichte (siehe Abschn. 2.2.2).

jedoch hier nicht näher eingegangen werden soll. Für Festkörper ist diese nämlich in aller Regel nicht wesentlich.

Neben der Massenbilanz (2.34) sind für die Kontinuumsmechanik die Bilanzgleichungen für Impuls und für Drehimpuls grundlegend. Sie bilden die eigentlichen Grundgleichungen der synthetischen Mechanik und sind insbesondere unabhängig von den in Abschn. 2.4 zu spezifizierenden Materialeigenschaften, die in den so genannten konstitutiven Gleichungen festgelegt werden.

Anders als die *skalaren* Prinzipie der analytischen Mechanik (siehe Abschn. 2.3) bieten die vektoriellen Bilanzgleichungen der synthetischen Mechanik einen direkten Zugang zu den Feldgleichungen des Kontinuums.

Die Axiome der Impuls- und der Drehimpulsbilanz, ausgedrückt in globaler, extensiver Formulierung, besagen, dass für jeden Körper die Behauptungen

$$\vec{F}(t) = \frac{D\vec{P}}{Dt}, \quad \vec{M}(t) = \frac{D\vec{L}}{Dt}$$

gültig sind. Darin stehen der im Inertialsystem gemessene *Impuls* \vec{P} bzw. der *Drehimpuls* \vec{L} ,

$$\vec{P} = \int_V \vec{v} \rho_0 dV, \quad \vec{L} = \int_V (\vec{r} \times \vec{v}) \rho_0 dV,$$

und der Vektor (2.33)₁ der *äußeren Kräfte* $\vec{F}(t)$ neben dem axialen Vektor (2.33)₂ der *äußeren Momente* $\vec{M}(t)$. Ausschließlich eine Darstellung in materieller Beschreibung wird angegeben.

Die Impulsbilanz und die Drehimpulsbilanz können als formale Entsprechung zum Newtonschen und dem Eulerschen Gesetz der *Massenpunktmechanik* angesehen werden. Ausführlich ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \int_V \vec{f} \rho_0 dV + \oint_S \vec{s}_{(\vec{N})} dA &= \frac{D}{Dt} \int_V \vec{v} \rho_0 dV, \\ \int_V (\vec{r} \times \vec{f}) \rho_0 dV + \oint_S (\vec{r} \times \vec{s}_{(\vec{N})}) dA &= \frac{D}{Dt} \int_V (\vec{r} \times \vec{v}) \rho_0 dV. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Die lokale, intensive Formulierung dieser Bilanzgleichungen stellt die zur Erfüllung derselben notwendigen und hinreichenden Bedingungen dar. Mit der Vertauschbarkeit von materieller Zeitableitung und Integration auf der rechten Seite sowie nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf das Oberflächenintegral innerhalb der linken Seite folgt unter Beachtung von (2.30) und (2.31) zunächst

$$\oint_S \vec{\sigma} \vec{N} dA = \int_V \text{Div } \vec{\sigma} dV \quad \leftrightarrow \quad \oint_S \sigma_{KI} N_K dA = \int_V \sigma_{KI,K} dV. \quad (2.36)$$

Damit lässt sich die Impulsbilanz (2.35)₁ in

$$\int_V (\text{Div } \vec{\sigma} + \rho_0 \vec{f}) dV = \int_V \rho_0 \vec{a} dV \quad (2.37)$$

umschreiben. Weil die Integranden als stetig angenommen werden, kann dann (2.37) nur erfüllt sein, wenn die *Feldgleichung*

$$\text{Div } \vec{\sigma} + \rho_0 \vec{f} = \rho_0 \vec{a} \quad \leftrightarrow \quad \sigma_{KI,K} + \rho_0 f_I = \rho_0 a_I \quad \text{in } V \quad (2.38)$$

als *erstes Bewegungsgesetz von Cauchy* gilt. Hinzu kommt die bereits bei der Umformung von (2.35) in (2.37) verwendete Randbedingung (2.30)

$$\vec{\sigma} \vec{N} = \vec{s}_{(\vec{N})} \quad \leftrightarrow \quad \sigma_{KI} N_K = s_I \quad \text{auf } S. \quad (2.39)$$

Statt der auf S vorliegenden Spannungsrandbedingungen (2.39) können dort auch Verschiebungen \vec{g} vorgeschrieben werden:

$$\vec{u} = \vec{g} \quad \leftrightarrow \quad u_k = g_k \quad \text{auf } S. \quad (2.40)$$

In praktischen Fällen werden meistens auf einem Teil S_σ der berandenden Oberfläche S in der Form (2.39) Spannungen und auf dem restlichen Rand S_u in der Form (2.40) Verschiebungen vorgeschrieben sein. Daneben gibt es in manchen Fällen auch noch allgemeinere Kombinationen (siehe Abschn. 2.5 und 3.2.4).

Über ähnliche Umformungen, siehe [8], kann man die Bedingung zur Erfüllung der Drehimpulsbilanz auf die Feldgleichung

$$\vec{r} \times (\text{Div } \vec{\sigma} + \rho_0 \vec{f} - \rho_0 \vec{a}) + \vec{I} \times \vec{\tau} = \vec{0} \quad \text{in } V \quad (2.41)$$

und die Spannungsrandbedingung

$$\vec{r} \times \vec{\sigma} \vec{N} = \vec{r} \times \vec{s}_{(\vec{N})} \quad \text{auf } S \quad (2.42)$$

zurückführen. Bei strenger Erfüllung des ersten Bewegungsgesetzes (2.38), die bei approximativen Lösungen im Allgemeinen nicht möglich ist, lässt sich (2.41) auf das *zweite Bewegungsgesetz von Cauchy*

$$\vec{I} \times \vec{\sigma} \vec{x}^\top = \vec{0} \quad \text{bzw.} \quad \vec{I} \times \vec{\tau} = \vec{0} \quad \leftrightarrow \quad \sigma_{Kk} x_{I,K} = \sigma_{KI} x_{k,K} \quad \text{bzw.} \quad \tau_{KL} = \tau_{LK} \quad (2.43)$$

reduzieren¹⁸, d. h. der *Piola-Kirchhoff-Spannungstensor 2. Art* $\vec{\tau}$ ist *symmetrisch*.

Im Rahmen einer linearen Theorie macht es dann wieder keinen Unterschied, ob man von der Symmetrie des Piola-Kirchhoffschen (2. Art) oder des Cauchyschen Spannungstensors spricht.

Neben den bisher diskutierten Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Drehimpuls sind im Rahmen einer vollständigen Theorie zusätzlich die Energiebilanz und die Tatsache, dass die totale Entropie nicht abnehmen kann, hinzuzufügen. Für schwingende Festkörper sind diese Beziehungen i. d. R. jedoch nicht wesentlich und werden deshalb an dieser Stelle nicht im Einzelnen formuliert. Bei der Behandlung entsprechender Mehrfeldsysteme (siehe Kap. 9) wird darauf allerdings detaillierter Bezug zu nehmen sein.

¹⁸ \vec{I} ist der so genannte *Identitätstensor* mit der Eigenschaft $I_{KI} = I_{KL} = \delta_{KI} = \delta_{KL}$.

2.3 Analytische Kontinuumsmechanik

Als *analytische Mechanik* bezeichnet man meist jenen Bereich der Mechanik, der *skalare Variationsprinzipie* auf der Basis gewisser Funktionale als fundamentale Axiome an den Beginn der Überlegungen stellt. Zur Erzeugung dieser Funktionale spielen *virtuelle Änderungen* von Systemzuständen, insbesondere der Begriff der *virtuellen Verrückung* eines Systems, eine wichtige Rolle. Man gelangt so zu einer Fassung der Grundaxiome der Mechanik, in der nicht mehr vektoriell Kräfte, Momente oder Impulsgrößen bilanziert werden, sondern Skalare wie etwa Energien, Arbeiten oder Leistungen. Die eigentlichen Bewegungsgleichungen gewinnt man daraus durch eine Auswertung nach den bekannten Regeln der Variationsrechnung. Dabei wird nur in Sonderfällen einem Funktional tatsächlich ein stationärer Wert erteilt. Meist existiert nicht einmal ein derartiges Funktional, da das Variationsprinzip *direkt* beispielsweise in virtuellen Verschiebungen formuliert ist. Ein Beispiel ist die im folgenden Abschn. 2.3.1 beschriebene allgemeine Fassung des *Lagrange-d'Alembert-Prinzips*, besser bekannt aus der Statik als *Prinzip der virtuellen Arbeit* oder aus der Starrkörperkinetik als *Prinzip von d'Alembert in Lagrangescher Fassung*.

Ausgehend vom Standpunkt der klassischen Feld- und Kontinuumstheorie sind die in Abschn. 2.2 aufgestellten Bilanzgleichungen hinreichender und direkter Zugang zum Bewegungsverhalten allgemeiner verteilter Systeme. Zu ergänzen sind diese durch die *konstitutiven* Gleichungen, die den Spannungstensor für ein gegebenes Material spezifizieren, siehe Abschn. 2.4. Zunächst besteht damit kein Bedarf an einem indirekten Zugang zum Bewegungsverhalten von Kontinua, wie er im Rahmen *analytischer* Prinzipie nach einer zudem mathematisch nicht immer einfachen Auswertung vorliegt.

Im Lichte strukturmechanischer Anwendungen ist dieser Standpunkt jedoch nicht haltbar, da die dort zu beschreibenden Modelle, wie Stäbe, Platten oder Schalen, *niemals alle* kontinuumsmechanischen Bilanzgleichungen streng erfüllen. Sie stellen vielmehr nur *schwache* Lösungen dieser Bilanzgleichungen dar, d. h. sie erfüllen bestimmte, durch Mittelungsprozesse aus diesen Grundgleichungen entstandene Funktionale, siehe dazu insbesondere Kap. 3. Genau solche Funktionale werden aber in Form der *Prinzipie der analytischen Kontinuumsmechanik* in *natürlicher* Weise bereitgestellt. Bei der Gewinnung strukturmechanischer Modellgleichungen stellen diese Funktionale somit einen direkteren Zugang als die vektoriellen Bilanzgleichungen der synthetischen Kontinuumsmechanik dar.

2.3.1 Lagrange-d'Alembert-Prinzip

Das zum *Prinzip der virtuellen Arbeit* in der Statik deformierbarer Körper analoge mechanische Prinzip heißt für schwingende Kontinua *Lagrange-d'Alembert-Prinzip*. Im Unterschied zum klassischen Prinzip der virtuellen Arbeit enthält das Lagrange-d'Alembert-Prinzip zusätzlich die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte. In der Kinetik starrer Körper spricht man vom *Prinzip von d'Alembert in Lagrangescher Fassung*.

So stellen also genau genommen sowohl das Prinzip von d'Alembert in Lagrangescher Fassung als auch das Prinzip der virtuellen Arbeit Sonderfälle des allgemein in der Dynamik deformierbarer Körper geltenden Lagrange-d'Alembert-Prinzips dar.

Da die Spezialisierung auf die Statik oder die Starrkörperdynamik im Lagrange-d'Alembert-Prinzip einfach durchzuführen ist (durch Streichen entweder der Trägheitsterme oder der Formänderungsarbeit) ist es zweckmäßig, das Lagrange-d'Alembert-Prinzip als grundlegendes Axiom der analytischen Mechanik anzusehen. In der analytischen Kontinuumsmechanik ersetzt es die Impulsbilanz der synthetischen Kontinuumsmechanik sowie die bereits vorgestellte erste Cauchy-Gleichung (2.38) einschließlich der Randbedingung (2.39). Die zweite Cauchy-Gleichung – der Drehimpulssatz für ein Kontinuum – reduziert sich ja in der Mechanik der Punktkontinua (siehe (2.43)) auf die Forderung nach einem *symmetrischen* Spannungstensor. Diese Forderung ist in der Elastomechanik durch das verallgemeinerte Hookesche Gesetz als Stoffgesetz (siehe Abschn. 2.4) stets identisch erfüllt. Auf die *explizite* Einbeziehung der allgemeinen Drehimpulsbilanz in das Lagrange-d'Alembert-Prinzip wird in diesem Abschnitt noch verzichtet; sie wird in Abschn. 2.3.3 vorgenommen.

Zur axiomatischen Formulierung des Lagrange-d'Alembert-Prinzips ist noch der Begriff der virtuellen Verrückung zu konkretisieren. Eine *virtuelle Verrückung* ist eine gedachte, bei festgehaltener Zeit derart vorzunehmende, infinitesimale Änderung eines Systems, dass dieses hinterher eine „Nachbarlage“ einnimmt. Während des Übergangs in diesen „virtuell verschobenen“ Zustand sind alle kinematischen Bindungen, denen das System unterliegt, zu erfüllen. Virtuelle Verrückungen können im Allgemeinen sowohl infinitesimal kleine Verschiebungen als auch infinitesimal kleine Drehungen sein. Für die in aller Regel diskutierten nichtpolaren Punktkontinua ist durch eine virtuelle Verschiebung die Verrückung in eine scheinbare Nachbarlage vollständig bestimmt.

Außerdem ist festzuhalten, dass es im Rahmen der hier behandelten mechanischen Systeme und Prinzipie nicht erforderlich ist, zwischen virtuellen Verschiebungen \vec{r}_δ und der materiellen Variation $\delta\vec{r}$ der realen Lage \vec{r} zu unterscheiden. Es gilt also stets

$$\vec{r}_\delta = \delta\vec{r}.$$

Analog zur differenziellen Arbeit $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ einer Kraft \vec{F} aufgrund einer differenziellen, aber realen Verschiebung $d\vec{r}$ wird

$$W_\delta = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}$$

als *virtuelle Arbeit* einer Kraft \vec{F} bei einer virtuellen Verschiebung $\delta\vec{r}$ definiert.

Als Lagrange-d'Alembert-Prinzip bezeichnet man das Postulat

$$\int_V \rho_0 \vec{a} \cdot \delta\vec{r} dV = W_\delta \quad (2.44)$$

mit der virtuellen Arbeit W_δ sowohl aller am Körper angreifenden äußeren Kräfte als auch der virtuellen Formänderungsarbeit aufgrund der Deformation des Körpers. Auf der linken Seite im Lagrange-d'Alembert-Prinzip (2.44) steht die virtuelle Arbeit der differentiellen Trägheitswirkung $\rho_0 \vec{a} dV$ summiert über das gesamte materielle Volumen V des Körpers. Die Beschleunigung \vec{a} berechnet sich darin aus dem Ortsvektor \vec{r} eines materiellen Punktes in allgemeiner verformter Lage wie in Abschn. 2.2.1 dargelegt.

In der Statik (d. h. bei Vernachlässigung der Trägheitswirkungen: $\vec{a} \approx \vec{0}$) wird das Lagrange-d'Alembert-Prinzip (2.44) zum *Prinzip der virtuellen Arbeit*

$$W_\delta = 0.$$

Die virtuelle Arbeit W_δ hat darin die gleiche Bedeutung wie in (2.44).

Das in der Form (2.44) nur für *einen* Körper mit dem Volumen V ausgesprochene Lagrange-d'Alembert-Prinzip kann ohne weitere Annahmen für ein System endlich vieler, verschiedener Körper angeschrieben werden. Beispielsweise ergibt sich für n untereinander beliebig gekoppelte Körper mit dem jeweiligen Volumen V_k (bei übereinstimmender Dichte ρ_0)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{V_k} \rho_0 \vec{a} \cdot \delta \vec{r} dV = W_\delta. \quad (2.45)$$

Die virtuelle Arbeit aller an den Verbindungsstellen zwischen den Körpern auftretenden Kräfte (z. B. aufgrund von Reibung) muss jetzt natürlich in W_δ berücksichtigt werden – nur die so genannten *Zwangskräfte* \vec{Z} leisten *in der Summe* keinen Beitrag.

Die behauptete Äquivalenz zwischen dem Lagrange-d'Alembert-Prinzip der analytischen Kontinuumsmechanik und den Bilanzgleichungen innerhalb einer synthetischen Vorgehensweise lässt sich ganz allgemein zeigen. Dazu betrachtet man einen einzelnen Körper mit dem Volumen V und der Dichte ρ_0 . Die virtuelle Arbeit W_δ auf der rechten Seite des Lagrange-d'Alembert-Prinzips (2.44) setzt sich aus insgesamt mehreren Anteilen zusammen: der bei der *Deformation* des Körpers geleisteten virtuellen Arbeit und der auf der Oberfläche bzw. im Innern des Körpers angreifenden *äußeren Kräfte*. Die an einem Körper mit dem Volumen V geleistete innere Formänderungsarbeit ist das Integral

$$W_{\delta i} = - \int_V \vec{\sigma} \cdot \text{Grad } \delta \vec{r} dV \quad (2.46)$$

mit dem Skalarprodukt des Piola-Kirchhoff-Spannungstensors 1. Art $\vec{\sigma}$ und dem materiellen Gradienten des virtuellen Verschiebungsvektors $\delta \vec{r}$. Eine räumlich verteilte *äußere Kraft* \vec{f} leistet die virtuelle Arbeit

$$W_{\delta f} = \int_V \vec{f} \cdot \delta \vec{r} \rho_0 dV, \quad (2.47)$$

eine auf der Oberfläche S des Körpers angreifende *äußere Flächenlast* $\vec{s}_{(\vec{N})}$

$$W_{\delta s} = \oint_S \vec{s}_{(\vec{N})} \cdot \delta \vec{r} dA. \quad (2.48)$$

Einzelkräfte können bei Bedarf hinzugenommen werden.

Das Lagrange-d'Alembert-Prinzip (2.44) für einen allgemeinen deformierbaren Körper lautet mit den Anteilen (2.46), (2.47) und (2.48)

$$\int_V \rho_0 \vec{a} \cdot \delta \vec{r} dV = \oint_S \vec{s}_{(\vec{N})} \cdot \delta \vec{r} dA + \int_V \rho_0 \vec{f} \cdot \delta \vec{r} dV - \int_V \vec{\sigma} \cdot \text{Grad} \delta \vec{r} dV. \quad (2.49)$$

Zur weiteren Auswertung müssen die virtuellen Größen $\delta \vec{r}$ und $\text{Grad} \delta \vec{r}$ zusammengefasst werden. Nach einer Umformung des Integranden in (2.49)

$$\int_V \vec{\sigma} \cdot \text{Grad} \delta \vec{r} dV = \int_V \text{Grad}(\vec{\sigma} \delta \vec{r}) dV - \int_V \text{Grad} \vec{\sigma} \delta \vec{r} dV \quad (2.50)$$

mit der Produktregel und Anwenden des Gaußschen Integralsatzes (2.36) erhält man für die virtuelle Formänderungsarbeit

$$W_{\delta i} = - \oint_S \vec{\sigma} \vec{N} \cdot \delta \vec{r} dA + \int_V \text{Div} \vec{\sigma} \cdot \delta \vec{r} dV. \quad (2.51)$$

Einsetzen von $W_{\delta i}$ in der Darstellung (2.51) anstelle des letzten Terms in (2.49) bringt das Lagrange-d'Alembert-Prinzip in die Form

$$0 = \int_V (\rho_0 \vec{f} + \text{Div} \vec{\sigma} - \rho_0 \vec{a}) \cdot \delta \vec{r} dV + \oint_S (\vec{s}_{(\vec{N})} - \vec{\sigma} \vec{N}) \cdot \delta \vec{r} dA. \quad (2.52)$$

Die räumliche Unabhängigkeit der Integrationsgebiete verlangt, dass jedes der beiden Integrale für sich genommen zu null wird. Für alle möglichen Variationen (virtuellen Verschiebungen) δr_K können nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung Integrale der Gestalt (2.52) aber nur verschwinden, wenn die jeweilige Integrandfunktion (...) identisch null ist. Das Lagrange-d'Alembert-Prinzip (2.52) ist deshalb den *Bilanzgleichungen für den Impuls* (2.38) im Feld V und (2.39) auf dem Rand S äquivalent.

Außerdem ist die Drehimpulsbilanz („Symmetriebedingung für den Spannungstensor“) (2.41) zu erfüllen. Das Lagrange-d'Alembert-Prinzip (2.52) stellt also immer dann eine vollständige Beschreibung eines Kontinuums dar, wenn die Erfüllung der Symmetrie des Spannungstensors – z. B. durch ein geeignetes Stoffgesetz – gesichert ist¹⁹.

¹⁹ Beispiele, in denen unsymmetrische Spannungstensoren auftreten, sind nichtpolare Kontinua mit Momentenspannungen [3], aber auch allgemeine Dielektrika [4].

2.3.2 Prinzip von Hamilton

Das Prinzip von Hamilton in seiner allgemeinsten Form geht aus dem Lagrange-d'Alembert-Prinzip hervor, allerdings nur unter Zusatzannahmen. Diese stellen aber für die praktische Anwendung des Prinzips von Hamilton keine Einschränkung gegenüber dem Lagrange-d'Alembert-Prinzip dar. Beide sind also gleichwertig. In der Kontinuumsmechanik heißt das Prinzip von Hamilton oft auch Prinzip von Kirchhoff-Hamilton.

Einer der wesentlichen Unterschiede zum Lagrange-d'Alembert-Prinzip besteht beim Übergang zum Prinzip von Hamilton in der Einschränkung der virtuellen Verschiebungen:

$$\vec{r}_\delta = \delta \vec{r} \Big|_{X_K = \text{const}}. \quad (2.53)$$

Das virtuelle Verschiebungsfeld \vec{r}_δ geht jetzt – im Gegensatz zum Lagrange-d'Alembert-Prinzip – „zwingend“ aus dem realen Vektorfeld \vec{r} der Lagen durch *Variation* δ hervor; dabei sind zwar die Lagen \vec{r} , *nicht aber die materiellen Punkte selbst* veränderlich. Die Lagrange-Koordinaten der materiellen Punkte dürfen also nicht variiert werden. Außerdem ist die Variation so durchzuführen, dass sich die Zeit bei der Variation nicht ändert. Zusammen bedeutet dies, dass die Variation in (2.53) bei festgehaltener Zeit und mit denselben materiellen Punkten stattfindet, d. h. es gilt

$$\delta t \equiv 0, \quad \delta X_K \equiv 0. \quad (2.54)$$

Der Operator δ im Prinzip von Hamilton hat folglich die Bedeutung einer *materiellen*, d. h. teilchenfesten Variation. Im übrigen erfolgt sie nach den Regeln der klassischen Variationsrechnung (siehe z. B. [9]).

Das Lagrange-d'Alembert-Prinzip (2.44) kann nun unter Berücksichtigung von (2.53) und (2.54) umgeformt werden. Mit \vec{a} gemäß (2.27) lautet es (zunächst noch ungeändert)

$$\int_V \rho_0 \vec{u}_{,tt} \cdot \delta \vec{r} \, dV = W_\delta. \quad (2.55)$$

Anstelle der in (2.53) eingeführten korrekten, aber umständlichen Schreibweise wird im Folgenden die übliche Schreibweise $\delta \vec{r}$ beibehalten. Die Variationen in (2.55) sind also im Sinne der Vereinbarung (2.53) zu verstehen.

Der eigentliche Übergang zum Prinzip von Hamilton ist aber erst dann vollzogen, wenn anstelle der virtuellen Arbeit der Trägheitskräfte in (2.55) die Variation der kinetischen Energie T eingeführt ist. Dazu benutzt man die Identität²⁰

$$\int_V \rho_0 \vec{u}_{,tt} \cdot \delta \vec{r} \, dV \equiv \frac{d}{dt} \int_V \rho_0 \vec{u}_{,t} \cdot \delta \vec{r} \, dV - \delta T,$$

²⁰ Ihr Beweis ist beispielsweise in [9] skizziert.

die Lagrangesche Zentralgleichung genannt wird. Sie erlaubt es, anstelle der virtuellen Arbeit der Trägheitskräfte die (materielle) Variation der kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho_0 \vec{u}_{,t} \cdot \vec{u}_{,t} dV$$

in das Lagrange-d'Alembert-Prinzip (2.44) einzuführen:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_0 \vec{v} \cdot \delta \vec{r} dV = \delta T + W_\delta,$$

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho_0 \vec{v} \cdot \vec{v} dV, \quad (2.56)$$

$$W_\delta = \oint_S \vec{s}_{(\vec{N})} \cdot \delta \vec{r} dA + \int_V \rho_0 \vec{f} \cdot \delta \vec{r} dV - \int_V \vec{\sigma} \cdot \text{Grad} \delta \vec{r} dV. \quad (2.57)$$

Durch Integration über ein beliebiges aber festes Zeitintervall (t_1, t_2) findet man schließlich die zugehörige integrale Darstellung des Lagrange-d'Alembert-Prinzips

$$\int_V \rho_0 \vec{v} \cdot \delta \vec{r} dV \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T + W_\delta) dt \quad (2.58)$$

in materieller Formulierung. Fordert man für das variierte Vektorfeld $\delta \vec{r}$ in der üblichen Weise, dass an den Zeitgrenzen t_1 und t_2 nicht variiert wird, d. h.

$$\delta \vec{r}(x_K, t_1) = \delta \vec{r}(x_K, t_2) = \vec{0}$$

gilt, dann reduziert sich die integrale Darstellung (2.58) auf die meistens verwendete Formulierung des Prinzips von Hamilton

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt + \int_{t_1}^{t_2} W_\delta dt = 0 \quad (2.59)$$

mit der kinetischen Energie (2.56) und der virtuellen Arbeit (2.57). Es ist unabhängig von Potenzialdarstellungen, sodass damit auch die Dynamik nicht-elastischer Kontinua untersucht werden kann; für diese kann ja im Allgemeinen kein Potenzial angegeben werden.

In der *Elastodynamik* lässt sich die virtuelle Formänderungsarbeit aber stets über die Variation eines inneren Potenzials U_i gewinnen. Schreibt man die virtuelle Arbeit aller äußeren konservativen Kräfte als $-\delta U_a$ und fasst die inneren und äußeren Potenziale zusammen, $U_i + U_a = U$, so wird aus dem Prinzip von Hamilton (2.59)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} W_\delta dt = 0. \quad (2.60)$$

Bei ausschließlich konservativer Belastung wird das Prinzip von Hamilton (2.60) dann zu einem echten Extremalprinzip

$$\mathcal{H} = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt \Rightarrow \text{Extr.} \rightarrow \delta \mathcal{H} = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (2.61)$$

für das so genannte Lagrange-Funktional \mathcal{H} . Im Sinne der Variationsrechnung ist die Lösung des Variationsproblems (2.61) dann gerade die so genannte Euler-Lagrangesche Gleichung [9, 7] mit entsprechenden Randbedingungen als notwendige Bedingungen dieser Stationarität.

Es soll an dieser Stelle erwähnt werden, dass neben dem Prinzip von Hamilton, das ausschließlich bezüglich Verschiebungsgrößen variiert, in der Elastodynamik auch andere Variationsprinzipie etabliert sind, die z. B. in Form des so genannten Prinzips von Hellinger-Reissner eine Zweifeldformulierung verwenden, die Variationen nach Verschiebungs- und Spannungsgrößen vornimmt [2, 7].

Auch hier ist die Drehimpulsbilanz zusätzlich zu erfüllen. Das Prinzip von Hamilton (2.60) oder (2.61) stellt also wie bereits das Prinzip von Lagrange-d'Alembert immer dann eine vollständige Beschreibung eines Kontinuums dar, wenn die Erfüllung der Symmetrie des Spannungstensors gesichert ist.

2.3.3 Einarbeitung der Drehimpulsbilanz

Die Drehimpulsbilanz geht in die in Abschn. 2.3.1 und 2.3.2 aufgeführten Prinzipie der analytischen Mechanik nicht explizite ein. Sie wird durch das zweite Bewegungsgesetz von Cauchy (2.43) vielmehr a priori erfüllt, d. h. für den jeweiligen Spannungstensor werden gewisse Symmetrieeigenschaften vorausgesetzt. Da sich die Drehimpulsbilanz (2.41), (2.42) aber nur bei *strenger* Erfüllung²¹ der Impulsgleichungen auf das zweite Bewegungsgesetz von Cauchy reduziert, muss zunächst davon ausgegangen werden, dass bei Näherungsverfahren im Zusammenhang mit analytischen Prinzipien der Drehimpulssatz verletzt wird²².

Die bei der Formulierung des Lagrange-d'Alembert-Prinzips angestellten Überlegungen, die explizite nur die Erfüllung der Impulsbilanz nach sich ziehen, führen in analoger Weise für den Drehimpulssatz (2.41), (2.42) zur Funktionaldarstellung

$$\begin{aligned} 0 = & \int_V \left[\vec{r} \times (\rho_0 \vec{f} + \text{Div } \vec{\sigma} - \rho_0 \vec{a}) \right] \cdot \delta \vec{\phi} dV + \int_V \left[\vec{I} \times \vec{\dot{r}} \right] \cdot \delta \vec{\phi} dV \\ & + \oint_S \left[\vec{r} \times (\vec{s}_{(\vec{N})} - \vec{\sigma} \vec{N}) \right] \cdot \delta \vec{\phi} dA. \end{aligned} \quad (2.62)$$

²¹ Die Impulsbilanz muss dazu *lokal*, d. h. für *jeden* materiellen Punkt erfüllt sein. Bei der Kondensation strukturdynamischer Modelle aus dem allgemeinen Kontinuum mittels Approximationsverfahren, z. B. über Ritz- oder Galerkin-Methoden, ist die Impulsbilanz aber nur noch *global*, d. h. in einem gewichteten Mittel erfüllt.

²² Die Symmetrie des maßgebenden Spannungstensors ist dann nämlich nicht mehr hinreichend zur *lokalen* Erfüllung der Drehimpulsbilanz (2.41).

Das Vektorfeld $\delta\vec{\phi}(X_K, t)$ ist als Vektorfeld *virtueller Drehungen* zu interpretieren, um virtuelle Skalare mit dem Charakter einer *virtuellen Arbeit* zu erzeugen.

Mit der bekannten Vertauschungsregel

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

für das Spatprodukt kann (2.62) in

$$\begin{aligned} 0 = & \int_V (\rho_0 \vec{f} + \text{Div } \vec{\sigma} - \rho_0 \vec{a}) \cdot (\delta\vec{\phi} \times \vec{r}) dV + \int_V \left[\vec{I} \times \vec{\tau} \right] \cdot \delta\vec{\phi} dV \\ & + \oint_S (\vec{s}_{(\vec{N})} - \vec{\sigma} \vec{N}) (\delta\vec{\phi} \times \vec{r}) dA \end{aligned} \quad (2.63)$$

umgeschrieben werden. Für symmetrische Spannungstensoren, d. h. das zweite Cauchy'sche Gesetz ist identisch erfüllt, $\vec{I} \times \vec{\tau} \equiv \vec{0}$, können in (2.63) die virtuellen Drehungen $\delta\vec{\phi}$ vollständig durch die virtuellen Verschiebungen $\delta\vec{r} = \delta\vec{\phi} \times \vec{r}$ ersetzt werden. Die Funktionaldarstellung (2.63) des Drehimpulssatzes ist dann *identisch* mit dem Lagrange-d'Alembert-Prinzip (2.52). Dies entspricht den bereits in der synthetischen Mechanik aufgeführten Zusammenhängen zwischen dem ersten und dem zweiten Cauchyschen Gesetz in Abschn. 2.2.2. Da die Drehimpulsbilanz eine im Allgemeinen von der Impulsbilanz *unabhängige* mechanische Forderung darstellt, muss (2.63) ebenfalls unabhängig vom Lagrange-d'Alembert-Prinzip (2.52) gelten, und dies impliziert die Forderung, dass das eingeführte Vektorfeld $\delta\vec{\phi}$ von den virtuellen Verschiebungen $\delta\vec{r}$ *linear unabhängig* sein muss.

Abschließend lässt sich das Lagrange-d'Alembert-Prinzip (2.52) mit der Funktionaldarstellung der Drehimpulsbilanz (2.63) zu einer verallgemeinerten Form des Lagrange-d'Alembert-Prinzips

$$\begin{aligned} 0 = & \int_V (\rho_0 \vec{f} + \text{Div } \vec{\sigma} - \rho_0 \vec{a}) \cdot (\delta\vec{r} + \delta\vec{\phi} \times \vec{r}) dV + \int_V \left[\vec{I} \times \vec{\tau} \right] \cdot \delta\vec{\phi} dV \\ & + \oint_S (\vec{s}_{(\vec{N})} - \vec{\sigma} \vec{N}) (\delta\vec{r} + \delta\vec{\phi} \times \vec{r}) dA \end{aligned} \quad (2.64)$$

zusammenfassen. Für voneinander *linear unabhängig* virtuelle Vektorfelder $\delta\vec{r}$ und $\delta\vec{\phi}$ geht (2.64) voraussetzungsgemäß in die intensive Formulierung der Bilanzgleichungen für den Impuls und den Drehimpuls über, da sich (2.64) dann in die beiden Funktionalgleichungen (2.52) und (2.62) zerlegen lässt. Dabei spielt das verwendete Vorzeichen (hier: +) bei der Überlagerung $\delta\vec{r} + \delta\vec{\phi} \times \vec{r}$ für die *exakte* Lösung keine Rolle, genauso wie auch das Vektorfeld $\delta\vec{\phi}$ bezüglich des Vorzeichens *nicht* festgelegt ist. Bei der Generierung schwacher Lösungen, z. B. im Sinne strukturmechanischer Modelle, liefert die hier gewählte Überlagerung allerdings die höchste Approximationsgüte, siehe [8].

Wie ein Vergleich mit Abschn. 2.3.1 (siehe die Beziehungen (2.49) und (2.52)) zeigt, ist bei der Einarbeitung der Drehimpulsbilanz in das Lagrange-d'Alembert-Prinzip nur noch

auf dessen so genannte *derivierte Form* Bezug genommen worden, die ohne eine Gradientenbildung der virtuellen Verrückungen auskommt. Da diese Form bei der Generierung strukturmechanischer Modelle den geringsten Aufwand bedeutet, erscheint dies gerechtfertigt.

Die Einarbeitung der Drehimpulsbilanz in das Prinzip von Hamilton kann ganz entsprechend geleistet werden. Da in Abschn. 3.2 bei der konkreten Generierung eines adäquaten Stabmodells allerdings nur der Weg über das Lagrange-d'Alembert-Prinzip verfolgt wird, soll an dieser Stelle darauf verzichtet werden.

2.4 Konstitutive Gleichungen

Setzt man – wie in der Strukturdynamik üblich – konstante Dichte und isotherme Vorgänge mit verschwindenden Temperaturänderungen voraus, ergänzen die konstitutiven Gleichungen in Form mechanischer Materialgesetze die *sechs* mechanischen Bilanzgleichungen nichtpolarer Kontinua für Impuls und Drehimpuls zur insgesamt erforderlichen Zahl von Bestimmungsgleichungen für die verbleibenden unbekannten *sechs* Spannungen und *drei* Verschiebungen.

Vom Standpunkt technischer Kontinuumsschwingungen im Rahmen eines Lehrbuches ist es allein zielführend, die Beschreibung und die Lösung des Systemverhaltens so weit es geht mit *idealisierten* Materialgesetzen zu leisten. Jede Hinwendung zu realeren Stoffgleichungen führt bei technischen Schwingungssystemen zu kaum überwindbaren Schwierigkeiten. Deshalb sind die wesentlichen Materialgleichungen in der *Strukturdynamik* noch immer diejenigen des *elastischen Festkörpers*.

Insbesondere um Materialdämpfung zu modellieren, ist die Betrachtung *viskolelastischer* Festkörper allerdings unumgänglich, für dreidimensionale Festkörper steigt jedoch bereits bei dieser vergleichsweise geringfügigen Erweiterung des Materialverhaltens der Aufwand deutlich an. Erst recht sind bei der Untersuchung dynamischer Mehrfeldprobleme verallgemeinerte Materialgleichungen zu diskutieren, wie sie z. B. bei dynamischer Fluid-Festkörper-Wechselwirkung (mit den hinzutretenden Stoffgleichungen Newtonscher oder auch nicht-Newtonscher Fluide) oder Koppelschwingungen piezoelektrischer Körper (mit Materialgesetzen zur Beschreibung des direkten und inversen Piezoeffekts bei u. U. großen elektrischen Feldstärken) in Erscheinung treten. Im Rahmen einer 3-dimensionalen Kontinuumstheorie würde die Formulierung der zugehörigen Materialtheorie die eigentlich interessierenden dynamischen Effekte und die dafür erforderlichen Lösungsmethoden völlig überdecken.

Der Autor hat sich deshalb entschlossen, an dieser Stelle im Rahmen einer 3-dimensionalen Kontinuumstheorie nur *homogene elastische* Festkörper zu behandeln und die Materialgleichungen letztendlich nur noch im Rahmen einer gleichzeitig *physikalisch und geometrisch linearen* Elastizitätstheorie für isotrope Körper zu formulieren. Modifizierte Materialgleichungen werden dann für einfache Strukturmodelle in den entsprechenden späteren Kapiteln problemangepasst erklärt. Weiterführende Darstellungen einer allgemei-

nen Materialtheorie und ihrer Grundlage, der rationalen Thermodynamik, können z. B. [1, 6, 10, 11, 12, 13] entnommen werden.

Von folgender verbaler Definition (siehe [9]) eines elastischen (Hookeschen) Körpers wird ausgegangen: Für den betrachteten Körper existiert ein natürlicher, verzerrungsfreier Zustand. Wird er dann durch äußere Kräfte in einen benachbarten Zustand deformiert und anschließend wieder von allen äußeren Kräften befreit, so heißt er *vollkommen elastisch*, wenn er vollständig in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehrt, *unabhängig* davon, wie die Kräfte – allerdings ohne Trägheitswirkungen zu verursachen – aufgebracht und zurückgenommen werden. Vom energetischen Standpunkt folgt daraus, dass die für die Deformation benötigte Energie im Körper im *deformierten Zustand* gespeichert sein muss und bei der Wiederherstellung des ursprünglichen Zustandes an die Umgebung zurückgegeben wird. Die Deformation eines elastischen Körpers ist also reversibel und damit thermodynamisch ideal: Im zweiten Hauptsatz der Thermodynamik gilt dann nicht wie für reale Prozesse das Ungleichheits- sondern das Gleichheitszeichen.

Unter den getroffenen Voraussetzungen kann die Beziehung (siehe [14])

$$\tau_{KM} = \frac{\partial U_i^*}{\partial E_{KM}}$$

mit der inneren Formänderungsenergiedichte²³ U_i^* als allgemeinste Form einer konstitutiven Beziehung für reversibles, nichtlineares, anisotropes, isothermes Verhalten homogener Festkörper zur Verknüpfung des symmetrischen Piola-Kirchhoff-Spannungstensors 2. Art $\vec{\vec{\tau}}$ und des Lagrangeschen Verzerrungstensors $\vec{\vec{E}}$ angesehen werden. Dabei sind an die innere Formänderungsenergie die Forderungen zu stellen, dass sie symmetrisch in den Verzerrungen ist, um die Symmetrie des Spannungstensors $\vec{\vec{\tau}}$ zu gewährleisten, und dass sie sinnvollerweise (siehe nochmals [14]) als positiv definite Funktion der Verzerrungen angenommen wird. Betrachtet man für die Formänderungsenergiedichte U_i^* eine Reihenentwicklung in den Verzerrungen, dann bleibt wegen der beliebigen Wahl des Nullniveaus und unter der üblichen Voraussetzung einer eigenspannungsfreien Referenzplatzierung (mit stets $E_{KM} \equiv 0$) die Darstellung

$$U_i^* = \frac{1}{2} \vec{\vec{E}} \cdot \vec{\vec{\vec{C}}} \vec{\vec{E}} + \dots$$

Wird diese Reihenentwicklung tatsächlich nach dem quadratischen Glied abgebrochen, dann ist eine *lineare* Konstitutivgleichung

$$\vec{\vec{\tau}} = \vec{\vec{\vec{C}}} \vec{\vec{E}}$$

mit konstanten Koordinaten C_{IJKL} des vierstufigen Materialtensors $\vec{\vec{\vec{C}}}$ zwingend. Die Beschränkung auf eine in den Verzerrungen quadratische Formänderungsenergiedichte be-

²³ Die innere Formänderungsenergiedichte wurde erstmals von G. Green im Jahre 1839 eingeführt.

zeichnet man deshalb als (physikalische) Linearisierung, das betreffende Material heißt *linear-elastisch*.

Der Elastizitätstensor $\overset{\text{III}}{\mathbb{C}}$ hat als vierstufiger Tensor zunächst $3^4 = 81$ Koordinaten

$$C_{IJKL} = \frac{\partial^2 U_i^*}{\partial E_{IJ} \partial E_{KL}}. \quad (2.65)$$

Bei *homogenen* Medien sind die Tensorkoordinaten C_{IJKL} von der Lage des Bezugspunktes unabhängig und daher „elastische“ Konstanten. Aufgrund der Symmetrie des Spannungstensors $\overset{\text{II}}{\mathbb{T}}$ ist der Elastizitätstensor symmetrisch bezüglich der ersten beiden Indizes (Reduktion um 27 auf 54 Koordinaten) und wegen der Symmetrie des Verzerrungstensors symmetrisch bezüglich der beiden letzten Indizes (Reduktion um weitere 18 auf 36 Koordinaten). Da eine innere Formänderungsenergiedichte U_i^* existiert, gilt wegen der Vertauschbarkeit der Ableitungen in (2.65) zusätzlich $C_{KLIJ} = C_{IJKL}$. Damit verringert sich die Zahl der unabhängigen Tensorkoordinaten im Falle allgemeiner Anisotropie auf 21. Für ein *isotropes* Medium sind darüber hinaus die *Koordinaten* des Elastizitätstensors gegen alle Drehungen des Koordinatensystems invariant. Mit diesen Eigenschaften kann man nach längerer Rechnung zeigen, dass für ein homogenes, isotropes Kontinuum der Elastizitätstensor in der Gestalt

$$C_{IJKL} = \lambda g_{IJ} g_{KL} + \mu (g_{IK} g_{JL} + g_{IL} g_{JK}) \quad (2.66)$$

nur noch von *zwei* elastischen Konstanten, den so genannten *Laméschen Konstanten* λ und μ abhängt, siehe [3, 9]. Die so genannten Metrikkoeffizienten g_{IJ} sind dabei über das Skalarprodukt $\vec{e}_I \cdot \vec{e}_J$ der Basisvektoren in der Referenzplatzierung erklärt.

Setzt man im Rahmen einer geometrischen Linearisierung – siehe Abschn. 2.1.2 – infinitesimale Verschiebungsgradienten voraus, so gilt bekanntlich dasselbe für die Verzerrungen (aber nicht umgekehrt) und der Lagrangesche Verzerrungstensor $\overset{\text{II}}{\mathbb{E}}$ reduziert sich auf den infinitesimalen Greenschen Verzerrungstensor $\vec{\varepsilon}$.

Im Rahmen einer sowohl physikalisch als auch geometrisch linearen Elastizitätstheorie ergibt sich auch noch ein besonders einfacher Zusammenhang zwischen dem Cauchy-Spannungstensor $\overset{\text{II}}{\mathbb{T}}$ und dem Piola-Kirchhoff-Spannungstensor 2. Art $\overset{\text{II}}{\mathbb{T}}$, sodass sich letztendlich das Materialgesetz (2.66) formal unverändert auf den Cauchy-Spannungstensor $\overset{\text{II}}{\mathbb{T}}$ und den Greenschen Verzerrungstensor $\vec{\varepsilon}$ als das klassische Hookesche Gesetz

$$t_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \quad (2.67)$$

bzw. in der Umkehrung

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} t_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} t_{kk} \quad (2.68)$$

überträgt²⁴.

²⁴ Das Hookesche Gesetz (2.67) lässt sich zur Erfassung von Werkstoffdämpfung über $t_{ij} = 2\left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t}\right) \varepsilon_{ij} + \left(\lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t}\right) \delta_{ij} \varepsilon_{kk}$ zwanglos auf *viskoelastisches* Materialverhalten erweitern.

In der Technischen Mechanik benutzt man allerdings nicht die Laméschen Konstanten, sondern über

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad (2.69)$$

den *Elastizitätsmodul* E und die *Querkontraktionszahl* ν ; zudem wird μ als *Schubmodul* G interpretiert. Die zu (2.67) äquivalente Schreibweise des Hookeschen Gesetzes lautet dann

$$t_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right). \quad (2.70)$$

bzw. in der Umkehrung

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} t_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} t_{kk}. \quad (2.71)$$

Geht man im Rahmen dieser klassischen vollständig linearen Elastizitätstheorie abschließend wieder auf den Elastizitätstensor $\overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\mathbf{C}}}}$ zurück, der jetzt allerdings nur noch zwei nicht verschwindende unabhängige Koordinaten besitzt, kann die Formänderungsenergiedichte in den äquivalenten Formen

$$U_i^* = \frac{1}{2} \overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\mathbf{\varepsilon}}}} \cdot \overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\mathbf{C}}}} \overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\mathbf{\varepsilon}}}}, \quad U_i^* = \frac{1}{2} \overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\mathbf{t}}}} \cdot \overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\mathbf{C}}^{-1}}} \overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\mathbf{t}}}}, \quad U_i^* = \frac{1}{2} \overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\mathbf{\varepsilon}}}} \cdot \overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\overset{\text{---}}{\mathbf{t}}}}$$

entweder nur in Verzerrungen, nur in Spannungen oder gemischt als Funktion von Verzerrungen und Spannungen ausgedrückt werden. Unter Verwendung des Hookeschen Gesetzes (2.70) bzw. (2.71) mit den in der Festigkeitslehre üblichen Elastizitätskonstanten gemäß (2.69) erhält man beispielsweise

$$U_i^*(t_{ij}) = \frac{1}{2E} \left[(1+\nu) t_{ij} t_{ij} - \nu (t_{kk})^2 \right] \quad (2.72)$$

oder

$$U_i^*(\varepsilon_{ij}) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{kk})^2 \right], \quad (2.73)$$

Schreibweisen, von denen bei der Formulierung der Formänderungsenergie von Strukturmodellen noch häufiger Gebrauch gemacht werden wird. Die Formänderungsenergie eines Festkörpers erhält man dann durch Volumenintegration:

$$U_i = \int_V U_i^* dV. \quad (2.74)$$

Die Verallgemeinerung auf ein System von Körpern ist durch Summation ohne Weiteres möglich.

2.5 Vollständig lineare Theorie – Anfangs-Randwert-Problem in Verschiebungen

Aus der lokalen Impulsbilanz (2.38) für den Cauchy-Spannungstensor $\vec{\bar{t}}$ erhält man nach Einsetzen des klassischen Hookeschen Gesetzes (2.70) und Elimination der Verzerrungen mit Hilfe der linearen Verzerrungs-Verschiebungs-Relationen (2.17) problemlos die Feldgleichungen

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \left(u_{i,II} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,II} \right) + \rho_0 f_i = \rho_0 u_{i,tt} \quad (2.75)$$

als partielle Differenzialgleichungen eines schwingenden dreidimensionalen elastischen Festkörpers. In Würdigung der historischen Bedeutung der französischen Mathematiker Navier und Cauchy bei der Formulierung dieser Bewegungsgleichungen werden sie häufig als Navier-Cauchysche Differenzialgleichungen bezeichnet.

Es wird vermerkt, dass man innerhalb einer vollständig linearen Theorie ohne Führungsbewegung auf die Unterscheidung groß und klein gedruckter Indizes hätte verzichten können. Um den Übergang auf den Fall endlicher Verformungen (der nicht hier, aber später in Kap. 8 noch behandelt wird) zu erleichtern, sind die Ableitungen nach materiellen Koordinaten X_K nach wie vor durch Großbuchstaben bezeichnet.

Hinzu treten an der berandenden Oberfläche des schwingenden Festkörpers Randbedingungen, die das zu berechnende Verschiebungsfeld zu erfüllen hat. Neben den bisher kennengelernten Randbedingungen

$$u_k = g_k(t) \text{ auf } S_u, \quad \sigma_{KI} N_K = s_I(t) \text{ auf } S_\sigma \quad \forall t \geq 0, \quad (2.76)$$

die entweder Verschiebungen oder Spannungen vorschreiben und in der Mathematik Dirichletsche oder Neumannsche Randbedingungen genannt werden, gibt es noch allgemeinere Randbedingungen, die als Cauchysche Randbedingungen bezeichnet werden und Spannungen und Verschiebungen verknüpfen. Sie werden in Abschn. 3.2.4 am Beispiel von Stäben noch etwas genauer spezifiziert werden. Es bleibt festzuhalten, dass reine Verschiebungsrandbedingungen immer geometrischer Natur sind, und bei Näherungsverfahren in aller Regel erfüllt werden müssen, um Konvergenz zu erzielen. In der Mathematik heißen sie deshalb häufig auch *wesentliche* Randbedingungen, in der Physik oder den Ingenieurwissenschaften dagegen *geometrische* Randbedingungen. Die Neumannschen und die Cauchyschen Randbedingungen sind für mechanische Problemstellungen physikalisch anschaulich als Kräfte- bzw. Momentenbilanzen zu interpretieren und heißen deshalb bei Physikern und Ingenieuren *dynamische* Randbedingungen, während man in der Mathematik von *restlichen* (manchmal auch *natürlichen*) Randbedingungen spricht.

Das beschreibende Randwertproblem mit der Feldgleichung (2.75) und entsprechenden Randbedingungen, z. B. (2.76), lässt sich alternativ natürlich auch aus einem der analytischen Prinzipie, z. B. dem Prinzip von Hamilton (2.60), gewinnen. Hat man es mit einem

3-dimensionalen Kontinuum ohne innere Zwangsbedingungen zu tun, verschwinden allerdings praktisch alle Vorteile, die man zur Generierung von Strukturmodellen auf der Basis analytischer Prinzipie im folgenden Kapitel so sehr schätzen wird. Jedenfalls soll es hier allein bei der synthetischen Vorgehensweise bleiben. Abschließend wird angemerkt, dass man auch bereits an dieser Stelle für 3-dimensionale Kontinua Dämpfungseinflüsse einbeziehen könnte, worauf beispielsweise in [5] eingegangen wird. Im vorliegenden Buch werden Dämpfungseffekte nur im Zusammenhang mit reduzierten Strukturmodellen erörtert, siehe beispielsweise Abschn. 3.2.3 und 5.1, 5.2 oder 6.1, 6.2.

Zu den Differenzialgleichungen und Randbedingungen treten zur Vervollständigung immer noch Anfangsbedingungen

$$\vec{u}(X_K, t = 0) = \vec{u}_0(X_K), \quad \vec{v}(X_K, t = 0) = \vec{v}_0(X_K), \quad \forall X_K \text{ aus } V \quad (2.77)$$

für Verschiebung \vec{u} und Geschwindigkeit \vec{v} hinzu. Erst dadurch wird das mathematische Modell zu einem so genannten *Anfangs-Randwert-Problem* abgeschlossen, das in dieser Form grundsätzlich vollständig integriert werden kann. Oft werden im Folgenden die Anfangsbedingungen nicht gesondert angegeben und man beschränkt sich auf die Angabe des entsprechenden *Randwertproblems*²⁵, bestehend aus (partiellen) Differenzialgleichungen, den so genannten Feldgleichungen, und Randbedingungen. Bei angestrebter vollständiger Lösung einer vorgegebenen Aufgabenstellung ist allerdings immer auch auf die Anfangsbedingungen einzugehen.

Literatur

1. Eringen, A. C.: Mechanics of Continua, 2. Aufl. J. Wiley & Sons, New York/London/Sydney (1980)
2. Guyader, J.-L.: Vibrations des milieux continus. Hermes, Paris (2002)
3. Hahn, H. G.: Elastizitätstheorie. Teubner, Stuttgart (1985)
4. Klinkel, S.: Nichtlineare Modellierung ferroelektrischer Keramiken und piezoelektrischer Strukturen – Analyse und Finite-Element-Formulierung. Habilitationsschrift, Univ. Karlsruhe (TH), Berichte des Instituts für Baustatik (2007)
5. Maaß, M.: Dynamische Spannungskonzentrationsprobleme bei allseits berandeten, gelochten Scheiben. Diss. Univ. Karlsruhe (TH) (1986)
6. Noll, W.: On the Foundations of the Mechanics of Continua. Carnegie Inst. Tech. Rep. 17 (1957)
7. Proppe, C.: Mathematische Methoden der Dynamik. Vorlesungsmanuscript, Univ. Karlsruhe (TH) (2007)

²⁵ Ein Randwertproblem mit Spannungsrandbedingungen wird häufig auch als *erstes* Randwertproblem bezeichnet, während bei Verschiebungsrandbedingungen ein so genanntes *zweites* Randwertproblem vorliegt. Ein Randwertproblem mit Randbedingungen, in denen Verschiebungen und Verschiebungsableitungen gemischt auftreten, wird demnach auch *gemischtes* Randwertproblem genannt.

-
8. Riemer, M.: Technische Kontinuumsmechanik. BI Wiss.-Verl., Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich (1993)
 9. Riemer, M., Wauer, J., Wedig, W.: Mathematische Methoden der Technischen Mechanik, 2. Aufl. Springer (2014)
 10. Rivlin, R. S.: Nonlinear Continuum Theories in Mechanics and Physics and their Applications. In: An Introduction to Nonlinear Continuum Mechanics, S. 151–309. Rom (1970)
 11. Truesdell, C. A., Noll, W.: The Nonlinear Field Theories of Mechanics. In: S. Flügge (Hrsg.) Handbuch der Physik, Bd. III/3. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (1965)
 12. Truesdell, C. A., Toupin, R. A.: The Classical Field Theories. In: S. Flügge (Hrsg.) Handbuch der Physik, Bd. III/1. Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg (1960)
 13. Truesdell, C. A.: The Elements of Continuum Mechanics. Springer, Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo (1965)
 14. Willner, K.: Kontinuums- und Kontaktmechanik. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (2003)

Kontinuumsschwingungen

Vom einfachen Strukturmodell zum komplexen
Mehrfeldsystem

Wauer, J.

2014, XIII, 398 S. 82 Abb. Mit 42 Beispielen und 74
Aufgaben., Softcover

ISBN: 978-3-8348-1819-5