

## 2.1 Faltung und Korrelation

Die Operationen Faltung und Korrelation sind in vielen Wissenschaften bekannte und weit verbreitete Operationen. Die Korrelation ist in der Stochastik, Physik, Bildverarbeitung, Signaltheorie usw. eine weit verbreitete Operation, während die Faltung typischerweise in der Signaltheorie angesiedelt ist. Die Korrelation ist auf die Faltung zurückführbar, sodass vom mathematischen Standpunkt aus die Faltung als Operation ausreichen würde. Während die Faltung alle „schönen“ algebraischen Eigenschaften besitzt, hat die Korrelation kaum „vernünftige“ algebraische Eigenschaften, sie ist nicht einmal assoziativ. Da sie aber große Bedeutung in Anwendungen hat, ist es besser sie direkt zu benutzen als sie auf die Faltung zurückzuführen. In der Bildverarbeitung wird die Faltung häufig mit linearen Filtern identifiziert. Dies ist natürlich nicht ausreichend. Zusätzlich werden in diesem Zusammenhang oft nicht ganz korrekte Formulierungen verwendet. So ist die Aussage: „Lineare Filter werden durch eine Faltung beschrieben“ falsch. Die Faltung ist eine lineare Operation, aber zusätzlich noch verschiebungsinvariant. Daher ist richtig: die Faltung beschreibt ein lineares Filter, aber nicht jedes lineare Filter wird durch eine Faltung beschrieben.

### 2.1.1 Faltung

Die Faltung ist eine der wichtigsten Operationen in der Signalverarbeitung (lineare Systemtheorie) und der Bildverarbeitung, sie ist eine spezielle lineare Operation. In der englischsprachigen Literatur heißt diese **convolution**, manchmal auch **folding**. Für eindimensionale und zweidimensionale, diskrete Funktionen ist die Operation Faltung  $*$  definiert zu:

$$(f * g)_n = \sum_i f_i g_{n-i}, \quad (f * g)_{m,n} = \sum_i \sum_j f_{i,j} g_{m-i, n-j}. \quad (2.1)$$

Für analoge Funktionen gilt entsprechend:

$$(f * g)(t) = \int_B f(\xi)g(t - \xi)d\xi, (f * g)(t_1, t_2) = \int_{B_1} \int_{B_2} f(\xi, \eta)g(t_1 - \xi, t_2 - \eta)d\xi d\eta. \quad (2.2)$$

Die Summationsgrenzen oder die Integrationsbereiche sind entsprechend dem Bildmodell zu wählen. Das Ergebnis der Faltung zweier Funktionen ist also wieder eine Funktion, zwei Bilder gefaltet ergibt wieder ein Bild. Häufig findet man in vielen Büchern die nicht ganz korrekte Bezeichnung:

$$f(t) * g(t) = \int_B f(\xi)g(t - \xi)d\xi. \quad (2.3)$$

Es werden nicht zwei Funktionswerte  $f(t)$  und  $g(t)$  gefaltet, sondern zwei Funktionen  $f$  und  $g$  und anschließend wird das Ergebnis an der Stelle  $t$  betrachtet. Wir werden diese Schreibweise aus praktischen Gründen zum Teil auch benutzen, sind uns aber bewusst, was eigentlich gemeint ist.

Stellvertretend für alle Definitionen werden wir oft die eindimensionale, diskrete Version bevorzugen. Manchmal im Zusammenhang mit der Interpolation wird eine „gemischte“ Faltungsoperation bezüglich der äquidistanten Stützstellen  $t_k$

$$(f * g)(t) = \sum_k f(t_k)g(t - t_k) \quad (2.4)$$

angegeben. Dies ist weder die diskrete noch die analoge Faltung, also keine „echte“ Faltung. Wir werden später zeigen, wie wir diese auf die analoge Faltung zurückführen. Dagegen fasst man die folgende „gemischte“ Faltung

$$h(t_k) = (f * g)(t_k) = \int_B f(\tau)g(t_k - \tau)d\tau \quad (2.5)$$

einfach als Hintereinanderausführung der analogen Faltung

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_B f(\xi)g(t - \xi)d\xi \quad (2.6)$$

und der anschließenden Abtastung dieser Funktion  $h(t)$  an den diskreten Stellen  $t_k$  auf. Die Operation Faltung besitzt alle „schönen“ algebraischen Eigenschaften, sie ist linear, kommutativ, assoziativ, distributiv und vieles mehr. Wir wollen einmal als einfache Übung die Kommutativität zeigen:

$$(f * g)_n = \sum_i f_i g_{n-i} = \sum_{n-l} f_{n-l} g_l = \sum_l g_l f_{n-l} = (g * f)_n. \quad (2.7)$$

Die anderen Eigenschaften lassen sich ebenso einfach zeigen. Eine 2D-Faltung kann manchmal auf die Anwendung von zwei 1D-Faltungen zurückgeführt werden, dann lässt sich die 2D-Faltung effektiv implementieren, siehe Abschn. 8.1.2. Man spricht dann von der Separierbarkeit der Faltung. Wann ist diese nun gegeben? Unter der Separierbarkeit der 2D-Faltung wollen wir verstehen, dass sich ein Operand  $h$  der Faltung  $g = h * f$  als Produkt  $h_{m,n} = c_m \cdot d_n \forall m, n$  schreiben lässt und damit  $h = x * y$  ist. Die 2D-Funktionen  $x$  und  $y$  lassen sich dann durch 1D-Funktionen  $x_{i,j} = c_i \delta_j$ ,  $y_{i,j} = d_j \delta_i$  darstellen. Die 1D-Funktion  $c$  ist in  $x$  als Zeile bzw.  $d$  als Spalte in  $y$  eingebettet. Dann gilt

$$(x * y)_{m,n} = \sum_{i,j} x_{i,j} y_{m-i,n-j} = \sum_{i,j} c_i \delta_j d_{n-j} \delta_{m-i} = c_m \cdot d_n. \quad (2.8)$$

Nun erkennen wir leicht die Hintereinanderausführung zweier 1D-Faltungen

$$g = h * f = x * y * f = x * (y * f). \quad (2.9)$$

Die Faltung hat viele interessante Anwendungen in der Bildverarbeitung, wird aber auch in anderen Gebieten benutzt. Zum besseren Verständnis zeigen wir zunächst eine einfache Anwendung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

**Beispiel 1** Gegeben seien zwei diskrete Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ , die der Einfachheit halber nur ganze Zahlen annehmen sollen, ein typisches Beispiel ist das Würfeln. Die Wahrscheinlichkeiten  $P(X = i) = p_i$  und  $P(Y = j) = q_j$  seien gegeben. Die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  seien unabhängig. Gesucht ist nun die Verteilung der Summe der Zufallsvariablen, also  $Z = X + Y$ . Beim Würfeln würde das bedeuten, wir würfeln zweimal unabhängig voneinander und suchen die Wahrscheinlichkeiten für die Summe der gewürfelten Augen. Da die Zufallsvariablen unabhängig sind, brauchen wir nur die Wahrscheinlichkeiten aller Kombinationen von Augen zu addieren, die die Gesamtsumme der Augen ergeben, also

$$P(Z = l) = \sum_{i,j, i+j=l} p_i \cdot q_j = \sum_i p_i q_{l-i} = (p * q)_l. \quad (2.10)$$

Wenn  $Y$  die gleiche Verteilung wie  $X$  hat, d.h.  $p \equiv q$ , dann ist  $P(Z = l) = (p * p)_l$ , d.h. die Faltung von  $p$  mit sich selbst. Dies wird in Analogie zur Autokorrelation als **Autofaltung** bezeichnet. Sind  $X$  und  $Y$  stetig verteilt und unabhängig mit den Dichten  $f(x)$  und  $g(y)$ , dann ist die Dichte für die Summe ebenfalls

$$h(z) = (f * g)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(z-x) dx \quad (2.11)$$

als Faltung beschrieben. Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist bekannt: sind  $X$  und  $Y$  zusätzlich normalverteilt, so ist auch  $Z$  normalverteilt. Da die Dichte  $h(z)$  von  $Z$  sich als Faltung der Dichten schreiben lässt, sagt man auch: „die Normalverteilung ist invariant

gegenüber der Faltung“. Immer wenn man normalverteilte Dichten faltet, ist das Ergebnis eine Dichte der Normalverteilung. Da die Gaußfunktion als Dichte der Normalverteilung in der Bildverarbeitung in verschiedenen Zusammenhängen, insbesondere bei Filtern, eine große Bedeutung besitzt, schreiben wir die Faltung noch einmal für die isotrope 2D-Gauß-Funktion  $G(x, y; 0, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x^2+y^2)/(2\sigma^2)}$  auf:

$$G(x, y; 0, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}) = G(x, y; 0, \sigma_1) * G(x, y; 0, \sigma_2). \quad (2.12)$$

Betrachten wir nochmals zweimal Würfeln mit einem klassischen Würfel, dann gilt  $p_i = q_j = \frac{1}{6}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ,  $p_i = q_j = 0 \forall i, j < 1, i, j > 6$ , welche zweifelsfrei Rechteckfunktionen darstellen. Dies können wir auffassen als ein eindimensionales Bild mit unendlicher Ausdehnung, ein endlich ausgedehntes Bild mit periodischer Fortsetzung ist logischer Weise hier verboten. Nach der Faltung mit sich selbst „dehnt“ sich das Bild weiter aus, es gibt also mehr als sechs Funktionswerte ungleich Null, es entsteht eine Dreiecksfunktion als Verteilungsfunktion. Dabei ist  $P(Z = 7) = \sum_l p_l \cdot p_{7-l} = \frac{1}{6}$  der größte Wert der Faltung.

**Beispiel 2** Ein fast identisches Beispiel ist die Multiplikation zweier Polynome. Gegeben seien zwei „gewöhnliche“ Polynome

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, p_2(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k. \quad (2.13)$$

Die Koeffizienten fassen wir als zwei diskrete Funktionen  $a$  und  $b$  auf, wobei  $a_i = 0$ ,  $i < 0, i > n$  und  $b_k = 0$ ,  $k < 0, k > m$  ist. Wir betrachten nun das Produktpolynom  $p(x)$  und erhalten

$$p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) = \sum_{l=0}^{m+n} (a * b)_l \cdot x^l. \quad (2.14)$$

Die Koeffizienten des Produktpolynomes ergeben sich als Faltung der beiden diskreten Funktionen, gebildet aus den Koeffizienten der einzelnen Polynome. Dieses Beispiel hat darüberhinaus eine praktische Bedeutung. Wenn wir  $x = 10$  setzen, dann würden wir zwei ganze dezimale Zahlen multiplizieren. Das Ergebnispolynom ist das Resultat der Multiplikation, allerdings ohne Übertrag. Wenn wir folglich auf einem Rechner die Multiplikation zweier großer ganzer Zahlen effizient implementieren sollen, dann relaisieren wir dies über die diskrete Faltung, die sich „schnell“ implementieren lässt. Anschließend reichen wir die Überträge von „Ziffer“ zu „Ziffer“ durch und sind fertig.

**Beispiel 3** Nun noch ein Beispiel aus der Physik. Wir betrachten einen homogenen, isotropen Diffusionsprozess, der durch folgende partielle Differentialgleichung beschrieben wird:

$$u_t = \operatorname{div}(\nabla u) = \nabla^2 u = \Delta u = u_{xx} + u_{yy}, u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (2.15)$$

wobei  $u(x, y, t)$  die zeitabhängige Konzentration beschreibt und  $f(x, y)$  die Anfangskonzentration festlegt. Diese Gleichung entspricht auch der sogenannten Wärmeleitungsgleichung. Wenn man diese Differentialgleichung löst, erhält man die erstaunliche Lösung

$$u(x, y, t) = f(x, y) * G(x, y; 0, \sqrt{2t}) \quad \text{mit } t > 0. \quad (2.16)$$

Dabei ist  $G(x, y; 0, \sigma)$  die isotrope Gauß-Funktion

$$G(x, y; 0, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} \quad (2.17)$$

mit dem Erwartungswert 0 und der zeitabhängigen Varianz  $\sigma^2 = 2t$ . Die Anfangskonzentration  $f(x, y)$  wird also mit einer sich ausbreitenden Gaußfunktion gefaltet. Wenn wir die Substitution  $2t = \sigma^2$  betrachten und  $u$  nach  $\sigma$  ableiten anstatt nach  $t$ , dann geht diese Differentialgleichung über in

$$u_\sigma = \sigma \nabla^2 u = \sigma \Delta u. \quad (2.18)$$

Wie oben schon erwähnt ist die Gauß-Funktion selbst Lösung dieser partiellen Differentialgleichung (dies kann man leicht nachrechnen), d. h. es gilt

$$\frac{\partial G(x, y; 0, \sigma)}{\partial \sigma} = \sigma \nabla^2 G(x, y; 0, \sigma) = \sigma \Delta G(x, y; 0, \sigma). \quad (2.19)$$

## 2.1.2 Korrelation

Als nächste Operation führen wir die Korrelation  $\circ$  ein:

$$(f \circ g)_n = \sum_i f_{n+i} \overline{g_i}, \quad (f \circ g)_{m,n} = \sum_i \sum_j f_{m+i, n+j} \overline{g_{i,j}}. \quad (2.20)$$

Für analoge Funktionen gilt:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(t) &= \int_B f(t + \xi) \overline{g(\xi)} d\xi, \\ (f \circ g)(t_1, t_2) &= \int_{B_1} \int_{B_2} f(t_1 + \xi, t_2 + \eta) \overline{g(\xi, \eta)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Überstreichungen bedeuten immer die Operation *konjugiert komplex*, konjugiert komplex von Funktionen bedeutet im Folgenden die elementweise Operation. Bei „normalen“ (reellen) Bildern entfällt diese Operation. Verbal heißt dies: wir verschieben  $f$  um  $n$  Positionen nach „links“ und bilden das Skalarprodukt oder wir verschieben  $g$  um  $n$  Positionen nach

„rechts“ und bilden das Skalarprodukt. Die Korrelation ist nicht identisch mit der Faltung, ist dieser aber sehr ähnlich. Leider hat sie keinerlei „vernünftige“ algebraische Eigenschaften, weder Kommutativität noch Assoziativität. Anstatt der Kommutativität gilt z. B.:

$$(f \circ g)_m = \overline{(g \circ f)_{-m}}. \quad (2.22)$$

Sie hat aber auch in der Bildverarbeitung große Bedeutung. Weiterhin können wir ablesen:

$$(f \circ g)_n = \sum_i f_{n+i} \overline{g_i} = \sum_l f_{n-l} \overline{g_{-l}}. \quad (2.23)$$

Das ist aber die Faltung von  $f$  mit der konjugiert komplexen, am Koordinatenursprung gespiegelten Funktion  $g$ . Daher führen wir den Spiegelungsoperator  $R$  (*Reflection*)  $g_n^R = (Rg)_n := g_{-n}$  ein. Eine erste Rechenregel für die Spiegelung bezüglich der Faltung ist  $(f * g)^R = f^R * g^R$ . Damit können wir nun die Korrelation auf die Faltung zurückführen:

$$f \circ g = f * \overline{g^R} = f * (\overline{Rg}). \quad (2.24)$$

Dies hat nun den Vorteil, dass wir mit der Faltung rechnen können, bei der ja viele Rechenregeln gelten. Zum Beispiel gilt für rellwertige Funktionen:

$$f \circ g = f * g^R = (g * f^R)^R = (g \circ f)^R. \quad (2.25)$$

Für reelle, gerade Funktionen  $g$  gilt  $g = g^R$ . Ist zusätzlich auch  $f$  reell und gerade, so ist

$$f \circ g = f * g^R = f * g = g * f^R = g \circ f. \quad (2.26)$$

Nur in diesem Spezialfall ist die Korrelation kommutativ. Wir sehen, dass durch die Zurückführung der Korrelation auf die Faltung, Ausübung einiger Rechenregeln bezüglich der Faltung und dann wieder Rückübersetzung in die Korrelation, wir Rechenregeln für die Korrelation ableiten können.

Als nächstes führen wir den allgemein bekannten Begriff eines linearen und verschiebungsinvarianten Filters in der Bildverarbeitung ein.

**Lineares und verschiebungsinvariantes Filter (LSI-Filter)** Gegeben sei ein Bild  $f$  und eine Filtermaske  $g$  einer ungeraden Dimension mit fest vorgegebenen Zahlenwerten. Die Filtermaske erweitern wir nun gedanklich auf die Bildgröße von  $f$  indem wir Nullen auffüllen. Die Filterung bedeutet nun, wir setzen das Filter  $g$  mit seinem Mittelpunkt gedanklich über ein Pixel in  $f$ . Nun multiplizieren wir alle Grauwerte mit den darüberliegenden Zahlen des Filters und addieren alle diese Produkte. Diese Summe weisen wir dem entsprechenden Pixel in einem dritten Bild  $h$  zu. Dies tun wir für alle Pixel des Bildes  $f$ . Am Rande setzen wir periodisch fort. Diesen Prozeß wollen wir im Folgenden immer als LSI-Filter bezeichnen.

Wir erkennen nun, dieses LSI-Filter wird genau durch die Korrelation beschrieben. Da wir die Korrelation auf die Faltung zurückführen können, heißt dies, ein LSI-Filter anwenden bedeutet die Korrelation von  $f$  mit  $g$  oder die Faltung von  $f$  mit der gespiegelten Filtermaske  $g^R$ . Wenn das Filter reell und symmetrisch ist (viele Filtermasken sind symmetrisch), dann ist ein LSI-Filter identisch mit der Korrelation und der Faltung zugleich.

Will man nun ein Bild  $f$  mit zwei Filtern  $g$  und  $h$  nacheinander filtern, also exakt  $(f \circ g) \circ h$  ausführen, dann möchte man sicher aus Effektivitätsgründen die beiden Filter  $g$  und  $h$  zu einem Filter zusammenfassen. Leider gilt aber das Assoziativgesetz für die Korrelation nicht. Wie fasst man aber korrekt die Filter zusammen? Wir wenden jetzt unsere Rechenregeln an:

$$(f \circ g) \circ h = f * g^R * h^R. \quad (2.27)$$

Andererseits gilt aber für die Zusammenfassung der Filter

$$f \circ (g \circ h) = f * (g * h^R)^R = f * g^R * h. \quad (2.28)$$

Wir vergleichen und fassen zusammen

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h^R). \quad (2.29)$$

Wir müssen also das Filter  $g$  mit dem gespiegelten Filter  $h$  filtern. Die Korrelation hat nicht nur Bedeutung als lineares Filter, sondern sie ist ein Übereinstimmungsmaß (Matchingmaß) zweier Funktionen bei einer Verschiebung. Der Zahlenwert  $(f * g)_n$  gibt an, wie gut  $f$  und  $g$  miteinander korrelieren, wenn man  $g$  um  $n$  Positionen nach „rechts“ verschiebt, oder was dasselbe ist, wenn man  $f$  um  $n$  Positionen nach „links“ verschiebt. Das Matchingmaß ist das Skalarprodukt.

Im Gegensatz zur Autofaltung hat die **Autokorrelation** große Bedeutung, wir korrelieren also eine Funktion mit sich selbst. Sie ist deutbar an einer Stelle  $n$  wie gut die Funktion mit sich selbst korreliert wenn man sie um  $n$  Positionen verschiebt. Trivialerweise muss die Autokorrelation bei  $n = 0$  immer ihr Maximum haben, da  $f$  hier mit sich selbst am besten korreliert. Wir schreiben nochmals:

$$f \circ f = f * \overline{f}^R = \overline{f}^R * f. \quad (2.30)$$

Die Autokorrelation ist stets für reelle  $f$  eine **gerade** (symmetrische) Funktion, d. h. es gilt immer für reelle  $f$

$$(f \circ f)^R = f^R \circ f^R = f^R * f = f * f^R = f \circ f. \quad (2.31)$$

Da Korrelationen und Faltungen eng mit Verschiebungen verbunden sind, definieren wir nun einen Verschiebungsoperator (*shift operator*)  $S_m$  bzw.  $S_u$  mit

$$(S_m f)_n := f_{n-m}, (S_u f)(t) := f(t-u). \quad (2.32)$$

Die nächste interessante Eigenschaft lautet: Die Autokorrelation ist **verschiebungsinvariant**:

$$(S_m f \circ S_m f)_n = \sum_i f_{n+i-m} \bar{f}_{i-m} = \sum_l f_{n+l} \bar{f}_l = (f \circ f)_n. \quad (2.33)$$

Gibt es für die Faltung oder Korrelation eigentlich ein neutrales Element *neu*, sodass  $f * \text{neu} = \text{neu} * f = f$  bzw.  $f \circ \text{neu} = \text{neu} \circ f = f$  gilt? Für die Faltung gibt es dieses Element tatsächlich, es ist der Einheitsimpuls  $\delta$ , für die Korrelation ist dies nicht der Fall. So gilt bei der Korrelation  $\delta \circ f = \delta * f^R = f^R$ . Für die Faltung gilt stets  $f * \delta = \delta * f = f$ . Wie sieht dieser Einheitsimpuls, diese Funktion nun aus? Für den diskreten Fall ist dies einfach  $\delta_0 = 1$ ,  $\delta_i = 0 \forall i \neq 0$ . Mit dem Verschiebungsoperator  $S_m$  können wir nun die „Eins“ des Einheitsimpulses an eine beliebige Stelle  $m$  platzieren  $e^{(m)} := S_m \delta$ . Wenn wir diskrete Funktionen mit  $N$  Stützstellen betrachten, so sind diese „Einheitsfunktionen“ trivialerweise Basisfunktionen aller diskreten Funktionen, diese sind vergleichbar mit den „Einheitsbasisvektoren“ im  $N$ -dimensionalen Vektorraum. Für analoge Funktionen ist dies schwieriger, hier ist  $\delta$  die Dirac-Funktion, sie ist im Ursprung nicht eins, sondern unendlich. Dies ist folglich keine „normale“ Funktion mehr, daher nennt man sie auch verallgemeinerte Funktion. Verallgemeinerte Funktionen werden in der Mathematik als **Distributionen** bezeichnet. Der Einheitsimpuls muss also im analogen Fall die Eigenschaft

$$(f * \delta)(t) = (\delta * f)(t) = \int_B f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_B \delta(\xi) f(t - \xi) d\xi = f(t) \quad (2.34)$$

erfüllen. Aus dieser Forderung für beliebige  $f$  können wir den Spezialfall  $f \equiv 1$  einsetzen und erhalten eine notwendige Bedingung für die Diracfunktion  $\int_B \delta(\xi) d\xi = 1$ . Setzen wir z. B. für  $f$  selbst  $\delta$  ein, dann folgt

$$\delta(0) = (\delta * \delta)(0) = \int_B \delta(\xi) \delta(0 - \xi) d\xi = \int_B \delta^2(\xi) d\xi = \infty. \quad (2.35)$$

Das Integral über das Quadrat des Einheitsimpulses existiert also nicht mehr. Da wir nun ein neutrales Element  $\delta$  bezüglich der Faltung gefunden haben, können wir auch inverse Elemente bezüglich der Faltung beschreiben. Falls ein inverses Element  $f^{-1}$  zur Funktion  $f$  existiert, dann muss es die Bedingung

$$f * f^{-1} = f^{-1} * f = \delta \quad (2.36)$$

erfüllen. In der Signalverarbeitung spielen Funktionen, die der Gleichung

$$f \circ f = f * f^R = \delta \quad (2.37)$$



genügen, eine bedeutende Rolle. Die Gleichung besagt: Die Autokorrelation dieser Funktion ist gleich dem Einheitsimpuls, andererseits ist gleichzeitig die gespiegelte Funktion  $f^R$  das inverse Element bezüglich der Faltung. Funktionen, die (2.37) erfüllen, nennt man „weiß gemachte“ Funktionen (*whitening*), siehe Abschn. 4.20. Wenn für  $f$  ein inverses Element  $f^{-1}$  bezüglich der Faltung existiert, dann ist  $(f^{-1})^R$  gleichzeitig rechtsinvers und linksinvers bezüglich der Korrelation, also inverses Element bezüglich der Korrelation, obwohl  $\delta$  kein neutrales Element der Korrelation ist. Denn es ist

$$\begin{aligned} f * f^{-1} = \delta &\rightarrow f * ((f^{-1})^R)^R = f \circ (f^{-1})^R = \delta = \delta^R = (f^{-1})^R * f^R \\ &= (f^{-1})^R \circ f. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Man spricht dann trotzdem von der Korrelationsinversen, obwohl ein neutrales Element bezüglich der Korrelation nicht existiert.

In speziellen Anwendungen, z. B. der *coded aperture imaging*, (siehe auch Abschn. 9.5.7) möchte man binäre Masken haben, wobei ca. 50 Prozent Nullen sein sollen und der Rest Einsen. Die Faltungsinverse dazu sollte auch binär sein, z. B. aus  $-1$  und  $+1$  bestehen. Dann kommt man beim Invertieren der Faltung ohne Multiplikationen aus. Gibt es denn solche Faltungsmasken?

### Beispiel 1

- $f = (0, 1, 0, 0, 1)$ ,  $N = 5$
- $f^{-1} = (1, 1, -1, -1, 1)$
- $f * f^{-1} = (2, 0, 0, 0, 0) = 2 \cdot \delta$
- Wenn  $f$  die Dimension  $N = 5$  hat, dann muss  $f^{-1}$  auch die Dimension  $N = 5$  haben. Sollte aber  $f$  als Filtermaske in einem Großen Bild benutzt werden, dann hat  $f^{-1}$  die Dimension des grossen Bildes und sieht völlig anders aus.

Wenn man Faltungsmasken entwirft und deren Inverse aber benötigt, dann sollten sie zumindestens näherungsweise (2.37) erfüllen, da dann die inverse Faltung numerisch besonders stabil ist, siehe Abschn. 9.5.1. Die Faltungsmaske stellt dann eine „weiß“ gemachte Funktion dar. Dazu ein

### Beispiel 2

- $f = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$ ,  $N = 7$ .
- Es ist  $f \circ f = f * f^R = (3, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = 2\delta + 1$ .
- Damit muss  $f \circ (c \cdot f + d) = \delta$  gelten.
- Es ist  $f \circ (cf + d) = cf \circ f + f \circ d = c(2\delta + 1) + f \circ d = \delta$ .
- Daraus folgt  $c = \frac{1}{2}$ ,  $d = -\frac{1}{6}$ .
- Damit ist  $(f^{-1})^R = \frac{1}{2}f - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}(-\frac{1}{2}, 1, 1, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  die Korrelationsinverse und  $f^{-1}$  die Faltungsinverse.

Kommen wir noch einmal auf die „gemischte“ Faltungsoperation (2.4) zurück. Diese wird oft im Zusammenhang mit der Interpolation benutzt. Wir wollen diese nun exakt auf die analoge Faltung zurückführen. Es gilt

$$\begin{aligned}
 [(f * g)(t)]_{\text{gemischte Faltung}} &= \sum_k f(t_k)g(t - t_k) = \sum_k f(t_k)g(t - t_k) * \delta(t_k) \\
 &= \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(t - \xi)\delta(t_k - \xi)d\xi \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \xi) \left( \sum_k f(\xi)\delta(t_k - \xi) \right) d\xi \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \xi)f_a(\xi)d\xi = (f_a * g)(t). \tag{2.39}
 \end{aligned}$$

Folglich ist die „gemischte“ Faltung die analoge Faltung von  $g$  mit der Funktion  $f_a(t) = \sum_k f(t_k)\delta(t_k - t) = \sum_k f(t)\delta(t - t_k)$ . Die Summe  $\delta_a = \sum_k \delta(t - t_k)$  nennt man auch *ideale Abtastfunktion*. Wir multiplizieren somit  $f$  mit der idealen Abtastfunktion. Mit der „gemischten“ Faltung kann man eine beliebige Interpolationsfunktion erzeugen. Wir suchen eine Interpolationsfunktion, die durch die diskreten Abtastwerte  $f(t_k)$  von  $f(t)$  geht. Dann brauchen wir an die Funktion  $g(t)$  nur die Forderung stellen: An den äquidistanten Abtaststellen  $t_k$  muss  $g(t_k)$  den diskreten Einheitsimpuls darstellen. Zwischen den Abtaststellen kann  $g(t)$  ein beliebiges analoges Verhalten aufweisen.

### 2.1.3 Ableitungen der Faltung

Wir betrachten die Faltung von differenzierbaren Funktionen, also  $g(x) = h(x) * f(x)$  und wollen die Regel zur Ableitung von  $g(x)$  bestimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \left( \int_0^x h(\tau)0f(x - \tau)d\tau \right)' = \int_0^x h(\tau)f'(x - \tau)d\tau \\
 &= \int_0^x f(\tau)h'(x - \tau)d\tau. \tag{2.40}
 \end{aligned}$$

Damit gilt die Regel:

$$g'(x) = h'(x) * f(x) = h(x) * f'(x). \tag{2.41}$$

Es wird also nur ein Operand abgeleitet, egal welcher. Eine praktische Anwendung dieser Regel (2.41) wollen wir nun zeigen. Man glättet ein Bild mit der Gauß-Funktion  $G(\mathbf{x})$

Bildverarbeitung und Objekterkennung  
Computer Vision in Industrie und Medizin

Süße, H.; Rodner, E.

2014, XVIII, 666 S. 204 Abb., 8 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-8348-2605-3