I.2 Gruppen

In diesem Kapitel werden verschiedene Aspekte von Gruppen untersucht. Wir beginnen mit einigen einfachen Beispielen, in denen die Gruppenaxiome zu überprüfen sind und gegebenenfalls festgestellt werden soll, ob die Gruppe abelsch ist oder nicht. Manche der Beispiele behandeln endliche und manche unendliche Gruppen. Außerdem werden wir einfache Rechenregeln, welche in beliebigen Gruppen gelten, nachprüfen. In den folgenden Beispielen wird insbesondere die symmetrische Gruppe $\mathscr{S}_n$ und deren Teilmengen eine wichtige Rolle spielen.

Aufgabe 6. Überprüfe, ob durch die folgenden Vorschriften (abelsche) Gruppen $(G, *)$ festgelegt werden.

a) $G = \mathbb{N}$ mit der Verknüpfung $a * b := \max\{a, b\}$,

b) $G = \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$ mit der Verknüpfung $a * b := a^b$,

c) $G = \mathbb{N}\backslash\{0\}, a * b = \mathrm{kgV}(a, b)$ (kleinstes gemeinsames Vielfaches von a, b),

d) $G = \{$ TRUE, FALSE $\}, a * b := (a \Leftrightarrow b)$ (also a ist TRUE dann und nur dann, wenn b TRUE ist).

Gib dabei in jedem Fall an, ob eine kommutative Verknüpfung vorliegt, welche Gruppenaxiome gelten und welche nicht gelten.

Aufgabe 7. Sei n eine positive ganze Zahl. Zeige, dass dann $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ und $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, \cdot)$ Gruppen sind.

Aufgabe 8. Stelle die Verknüpfungstafeln der additiven und multiplikativen Gruppe von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ auf und löse jeweils durch Einsetzen der Elemente die quadratische Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$. Läßt sich eine aus der Schule geläufige Formel anwenden?

Aufgabe 9. Zeige, dass die Diedergruppe $\mathbb{D}_3 = \{T_1, T_2, T_3, T, T^2, T^3\}$ bereits durch die Forderungen $T_1^2 = T^3 = e$ und $T_1 T = T^2 T_1$ eindeutig festgelegt wird.

Aufgabe 10. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Erkläre auf der Menge $G \times G$ eine neue Operation $\odot$ durch

$$(a, b) \odot (a', b') := (a \cdot a', b \cdot b').$$

Ist dadurch wieder eine Gruppe definiert? Überprüfe alle Gruppenaxiome inklusive des Kommutativgesetzes und begründe, welche weiterhin gelten und welche nicht.

Aufgabe 11. Es sei G eine Gruppe und $g, h \in G$. Beweise:

C. Fuchs, G. Wüstholz, *Übungen zur Algebra*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-8679-8_2, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

i) Die Gleichungen $gx = h$ und $yg = h$ besitzen jeweils genau eine Lösung.

ii) Aus $gx = gx'$ (oder alternativ aus $xg = x'g$) folgt $x = x'$, d.h. die Kürzungsregel gilt.

iii) $(g^{-1})^{-1} = g$

iv) $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$

v) $g^r \circ g^s = g^{r+s}$, $(g^r)^s = g^{rs}$ für alle $r, s \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 12. Sei G eine endliche abelsche Gruppe mit neutralem Element e. Zeige: Es gilt $g^m = g^n$ genau dann, wenn $m \equiv n$ modulo $\operatorname{ord}(g)$. Weiter gilt $g^{|G|} = e$ und

$$\operatorname{ord}(g^k) = \frac{\operatorname{ord}(g)}{\operatorname{ggT}(k, \operatorname{ord}(g))}$$

für alle $g \in G, m, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 13. Berechne $3^{10^{500}}$ modulo 167.

Aufgabe 14. Sei M eine Menge. Zeige, dass die Menge $G = \mathscr{S}(M)$ der bijektiven Abbildungen von M nach M zusammen mit der Komposition $\circ$ von Abbildungen eine Gruppe bildet. Führe dazu das folgende Programm aus:

a) $\circ$ ist assoziativ,

b) id_M ist ein Einselement bezüglich $\circ$,

c) $f \in G$ besitzt ein Linksinverses genau dann, wenn f injektiv ist,

d) $f \in G$ besitzt ein Rechtsinverses genau dann, wenn f surjektiv ist,

e) jedes $f \in G$ ist invertierbar (d.h. es gibt ein $g \in G$ mit $g \circ f = f \circ g = \mathrm{id}_M$).

Aufgabe 15. Zeige, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation bildet. Bestimme die Elemente der Ordnung 2.

Aufgabe 16. Zeige, dass eine Gruppe G, in der alle Elemente die Ordnung höchstens 2 besitzen, abelsch ist. Kann man daraus schließen, dass die Elemente der Ordnung 2 in einer Gruppe kommutieren? Beweise dies oder gib ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 17. Wie viele Elemente der Ordnung 2 gibt es in $\mathscr{S}_n$?

Aufgabe 18. Was ist die kleinste Ordnung einer nicht abelschen Gruppe? Gib ein Beispiel an.

Aufgabe 19. Bestimme die Ordnung der Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ für Primzahlen p.

Aufgabe 20. Stelle die Gruppentafel für $\mathbb{D}_3$ auf. Gilt $\mathbb{D}_3 \cong \mathscr{S}_3$?

Aufgabe 21. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit Einselement e. Zeige, dass G genau dann abelsch ist, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

i) $(a \circ b)^2 = a^2 \circ b^2$ für alle $a, b \in G$,

ii) $b^{-1} \circ a^{-1} \circ b \circ a = e$ für alle $a, b \in G$.

In den folgenden Aufgaben beschäftigen wir uns zusätzlich mit grundlegenden algebraischen Konstruktionen wie Untergruppen, Homomorphismen, Automorphismen und Isomorphismen von Gruppen, Normalteilern, Faktorgruppen sowie Aktionen von Gruppen.

Aufgabe 22. Beweise, dass der Durchschnitt $\bigcap_{\iota \in I} H_\iota$ einer Familie von Untergruppen $H_\iota \subseteq G, \iota \in I$ einer Gruppe G, wieder eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 23. Zeige, dass die Matrizen

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

mit Einträgen aus $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ eine Untergruppe U von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ bilden. Gilt $U \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

Aufgabe 24. Gibt es eine Gruppe, die Vereinigung zweier echter Untergruppen ist?

Aufgabe 25. Es seien H_i für $i \in I$ Untergruppen von G mit der Eigenschaft, dass für alle $i, j \in I$ ein $k \in I$ existiert mit $H_i \cup H_j \subseteq H_k$. Zeige, dass dann $H := \bigcup_{i \in I} H_i$ eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 26. Liste alle Elemente der symmetrischen Gruppe $\mathscr{S}_4$ explizit auf und gibt die jeweilige Ordnung jedes Elementes an.

Aufgabe 27. Bestimme sämtliche Untergruppen der symmetrischen Gruppe $\mathscr{S}_3$ durch Auflistung der Elemente.

Aufgabe 28. Sei G eine Gruppe, H eine Untergruppe von G und $g \in G$. Zeige, dass $N_G(\{g\}) := \{x \in G;\, xg = gx\}$ eine Untergruppe von G ist (genannt der Normalisator von g). Zeige weiter, dass die zu H konjugierte Untergruppe $\mathrm{ad}(g)(H) = \{gxg^{-1};\, x \in H\}$ eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 29. Zeige, dass durch $(\sigma P)(X_1, \ldots, X_n) = P(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$ eine Aktion der symmetrischen Gruppe $\mathscr{S}_n$ auf der Menge der Polynome $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ in n Variablen $X_1, \ldots, X_n$ gegeben ist. Bezeichne für $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ mit $\mathscr{S}_n(P) = \{\sigma \in \mathscr{S}_n;\, \sigma P = P\}$ den Stabilisator von P unter dieser Aktion. Zeige nun weiter, dass für jede Untergruppe H von $\mathscr{S}_n$ ein Polynom $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ mit $\mathscr{S}_n(P) = H$ existiert.

Aufgabe 30. Zeige, dass die oberen Dreiecksmatrizen über einem Körper K eine Untergruppe von $\mathscr{M}_{n\times n}(K)$ bezüglich der Matrizenaddition sind. Zeige außerdem, dass die Menge der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen $\mathcal{B}$ sowie die Menge der Permutationsmatrizen $\mathcal{W}$ eine Untergruppe der invertierbaren Matrizen $\mathrm{GL}_n(K)$ bezüglich der Matrizenmultiplikation bilden.

Aufgabe 31. Beweisen Sie das Fünfer-Lemma: Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V_5 \arrow[r, "\varphi_5"] \arrow[d, "f_5"] & V_4 \arrow[r, "\varphi_4"] \arrow[d, "f_4"] & V_3 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "f_3"] & V_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "f_2"] & V_1 \arrow[d, "f_1"] \\
W_5 \arrow[r, "\psi_5"] & W_4 \arrow[r, "\psi_4"] & W_3 \arrow[r, "\psi_3"] & W_2 \arrow[r, "\psi_2"] & W_1
\end{tikzcd}$$

von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen sei kommutativ (d.h. es gelte $f_{n-1} \circ \varphi_n = \psi_n \circ f_n$ für $n = 2, \ldots, 5$). Die beiden Zeilen seien exakt, d.h. es sei $\ker\varphi_{n-1} = \mathrm{im}\varphi_n$, $\ker\psi_{n-1} = \mathrm{im}\psi_n$ für $n = 2, \ldots, 5$. Dann gilt:

i) Sind f_2 und f_4 injektiv und ist f_5 surjektiv, so ist f_3 injektiv.

ii) Sind f_2 und f_4 surjektiv und ist f_1 injektiv, so ist f_3 surjektiv.

iii) Sind f_1, f_2, f_4, f_5 bijektiv, so ist f_3 bijektiv.

Aufgabe 32. Seien G, G', G'' Gruppen. Zeige: Falls $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, G')$ und $\psi \in \mathrm{Hom}(G', G'')$, dann ist $\psi \circ \varphi \in \mathrm{Hom}(G, G'')$. Sind φ, ψ Isomorphismen, so sind $\psi \circ \varphi$ und $\varphi^{-1} : G' \to G$ ebenfalls Isomorphismen. Zeige weiter: $\mathrm{Hom}(G, G) =: \mathrm{End}(G)$ bildet bzgl. der Komposition $\circ$ von Abbildungen ein Monoid und $\mathrm{Aut}(G)$ bildet bzgl. der Komposition eine Gruppe. Bestimme diese Gruppe für $G = \mathscr{S}_3$.

Aufgabe 33. Zeige, dass $\mathbb{Q}\backslash\{-1\}$ mit der Vorschrift $a \circ b := ab + a + b$ eine abelsche Gruppe bildet, welche isomorph zur multiplikativen Gruppe der rationalen Zahlen ist.

Aufgabe 34. Bestimme einen Isomorphismus zwischen $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$, den positiven rationalen Zahlen bezüglich Multiplikation, und $(\mathbb{Z}[X], +)$, den Polynomen in einer Unbestimmten bezüglich Addition. (*Hinweis*: Verwende die eindeutige Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}$.)

Aufgabe 35. Es seien p, q Primzahlen. Bestimme alle Homomorphismen von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Gib insbesondere die Homomorphismen von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nach explizit $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ an.

Aufgabe 36. Für $1 \leq i, j \leq n$ und $i \neq j$ definieren wir die Abbildung $Q_{ij} : K \to \mathrm{GL}_n(K), \lambda \mapsto Q_{ij}(\lambda) := E + \lambda E_{ij}$, wobei E die $n \times n$-Einheitsmatrix und K einen Körper bezeichnet. Zeige, dass Q_{ij} ein Homomorphismus von der additiven Gruppe des Körpers K in die Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$ bezüglich der Matrizenmultiplikation ist. Berechne außerdem $\exp(Q_{ij}(\lambda))$, wobei die Exponentialfunktion von Matrizen über die Reihenentwicklung definiert ist.

Aufgabe 37. Sei K ein Körper. Zeige, dass eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(K)$ genau dann mit allen Matrizen $B \in \mathscr{M}_{n\times n}(K)$ kommutiert, d.h. $AB = BA$, falls $A = \lambda E$ mit $\lambda \in K$ ist. (*Hinweis*: Überlege, wie eine Matrix A aufgebaut sein muss, damit sie mit den Standardmatrizen kommutiert.)

Aufgabe 38. Man zeige, dass $\mathbb{Z}/(mn)\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, falls $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$, dass aber $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Aufgabe 39. Beweise, dass $G_1 \times G_2$ genau dann abelsch ist, wenn G_1 und G_2 es sind.

Aufgabe 40. Läßt sich $\mathscr{S}_3$ als direktes Produkt zweier Untergruppen schreiben?

Aufgabe 41. Es seien N, H Gruppen, $\mathrm{Aut}(N)$ die Gruppe der Automorphismen von N, $\rho : H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Homomorphismus, $G = N \times H$ das mengentheoretische Produkt von N und H. Zeige, dass die Verknüpfung $(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1\rho(h_1)(n_2), h_1h_2)$ eine Gruppenoperation liefert. Die Gruppe, die man auf diese Weise erhält, heißt das *semidirekte Produkt* $N \rtimes H$ von N und H bezüglich ρ.

Aufgabe 42. Zeige, dass ein inneres semidirektes Produkt $N \rtimes H$ zweier Untergruppen N, H eine Darstellung $\rho : H \to \mathrm{Aut}(N)$ definiert.

Aufgabe 43. Bestimme alle möglichen semidirekten Produkte der Gruppen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, in denen $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ normal ist. Wie sehen diejenigen aus, in denen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der

Normalteiler ist? Was passiert, wenn man $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ durch $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ ersetzt mit p, q prim?

Aufgabe 44. Seien N, H Untergruppen einer Gruppe G mit $N \subseteq N_G(H)$. Zeige, dass NH dann auch eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 45. Beweise das Lemma von Burnside: Die Gruppe G operiere auf der Menge X. Dann gilt:

$$|G| \cdot |X/G| = \sum_{a \in G} |\{x \in X; ax = x\}|.$$

(*Hinweis*: Sei $Y := \{(a, x) \in G \times X; ax = x\}$. Man betrachte die Fasern der Abbildungen $(a, x) \mapsto a$ bzw. $(a, x) \mapsto x$ von Y in G bzw. X.)

Aufgabe 46. Unter Verwendung der letzten Aufgaben zeige man: Die endliche Gruppe G operiere transitiv auf der Menge X (d.h. X/G enthalte genau eine Bahn) mit $|X| \geq 2$. Dann gibt es ein $a \in G$ mit $\{x \in X; ax = x\} = \emptyset$.

Aufgabe 47. Auf wie viele Arten können die Seitenflächen eines Würfels mit den Farben rot, weiß und blau gefärbt werden, sodass jede Seite eine Farbe hat und die Färbung nicht durch Rotation des Würfels aus einer bereits berücksichtigten Färbung gewonnen werden kann?

Aufgabe 48. Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $\mathrm{AGL}(V)$ die Gruppe der affinen Transformationen auf V. Berechne den Normalisator und den Zentralisator der Bilder von $\mathrm{GL}(V)$ und V in $\mathrm{AGL}(V)$.

Aufgabe 49. Bestimme das Zentrum der symmetrischen Gruppe $\mathscr{S}_5$.

Aufgabe 50. Bestimme das Zentrum der Gruppen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, das von $\mathscr{S}_4$ sowie den Zentralisator von $\sigma = (234)$ in $\mathscr{S}_5$.

Aufgabe 51. Beschreibe die Zerlegung in Bahnen von $X = \mathbb{R}^3$ bezüglich der Aktion $(A, x) \mapsto Ax$ von $G = \mathrm{SO}(3)$ auf X. Wie sieht der Stabilisator des ersten kanonischen Basisvektors e_1 aus?

Aufgabe 52. Die multiplikative Gruppe $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ operiere auf $\mathbb{R}^2$ vermöge $(t, (x, y)) \mapsto (tx, y/t)$. Beschreibe die Bahnen dieser Aktion sowie die zugehörigen Stabilisatoren.

Aufgabe 53. Sei Ω der Raum der überall beliebig oft partiell differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Sei G die euklidische Gruppe auf $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $T_{U,b} : a \mapsto aU + b$ für $a \in \mathbb{R}^3$ und gegebenen $U \in \mathrm{O}(3), b \in \mathbb{R}^3$. Für $g \in G$ und $f \in \Omega$ definieren wir f^g durch $f^g(x,y,z) := f((x,y,z)g^{-1})$. Zeige:

a) Die Abbildung $(f,g) \mapsto f^g$ definiert eine Anti-Aktion der Gruppe G auf Ω.

b) Sei ∇ der Laplace Operator auf Ω,

$$\nabla f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Zeige, dass $\nabla(f^g) = (\nabla f)^g$ für alle $f \in \Omega$ und $g \in G$ gilt.

c) Folgere, dass euklidische Abbildungen $f \mapsto f^g$ harmonische Funktionen in harmonische Funktionen überführen.

Aufgabe 54. In einer endlichen Gruppe G sei k die Anzahl der Konjugierten von $g \in G$ und m diejenige der Konjugierten von g^n. Zeige, dass m ein Teiler von k sein muss.

Aufgabe 55. Man zeige, dass jede Gruppe G isomorph zu einer Untergruppe einer Permutationsgruppe ist (Darstellungssatz von Cayley) und folgere daraus, dass jede endliche Gruppe der Ordnung n in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ eingebettet werden kann.

Aufgabe 56. Es sei $H \subset G$ eine Untergruppe vom Index 2. Zeige, dass es einen surjektiven Homomorphismus von G nach $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gibt. (*Hinweis*: H operiert auf G durch Linksmultiplikation. Stelle eine Gruppentafel für die Bahnen auf; zeige dazu, dass $B^{-1} = B$ für jede Bahn gilt.)

Aufgabe 57. Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Zeige, dass durch $gH \mapsto Hg^{-1}$ eine bijektive Abbildung von der Links- in die Rechtsnebenklassenzerlegung von G modulo H gegeben ist.

Aufgabe 58. Weise nach, dass die inneren Automorphismen $\mathrm{int}(G)$ von G einen Normalteiler in $\mathrm{Aut}(G)$ bilden.

Aufgabe 59. Zeige, dass $Z(G)$ ein Normalteiler von G ist und $G/Z(G) \cong \mathrm{int}(G)$ gilt.

Aufgabe 60. Sei G eine Gruppe mit $\mathrm{Aut}(G) = \langle \varphi \rangle$ für ein $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Zeige, dass G abelsch ist.

Aufgabe 61. Es sei H die von

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ erzeugte Untergruppe. Gib eine explizite Beschreibung von H an und bestimme alle Normalteiler $N \lhd H$ sowie die zugehörigen Faktorgruppen.

Aufgabe 62. Sei G eine Gruppe, H ein Normalteiler in G und K ein Normalteiler von H. Ist dann auch K ein Normalteiler in G? Mit anderen Worten: Ist die Relation "$\lhd$" transitiv?

Aufgabe 63. Betrachte in der multiplikativen Gruppe $\mathbb{C}^\times$ der von Null verschiedenen komplexen Zahlen die Gruppe μ_n der n-ten Einheitswurzeln. Zeige, dass $\mathbb{C}^\times/\mu_n \cong \mathbb{C}^\times$.

Aufgabe 64. Sei G eine endliche Gruppe mit der Eigenschaft, dass jede Untergruppe von G normal ist. Folgere daraus, dass je zwei Elemente teilerfremder Ordnung miteinander kommutieren.

Aufgabe 65. Für die endliche Gruppe G existiere ein $n > 1$, sodass für alle $x, y \in G$ die Gleichung $(xy)^n = x^n y^n$ erfüllt ist. Zeige, dass $G_n := \{z \in G; z^n = 1\}$ und $G^n := \{x^n; x \in G\}$ normal in G sind und dass $|G^n| = (G : G_n)$ gilt.

Aufgabe 66. Seien H und K Untergruppen von G. Wir setzen $X = \{hk; h \in H, k \in K\}$ und betrachten die davon erzeugte Untergruppe $\langle X \rangle$ von G. Beweise, dass $X = \langle X \rangle$, falls H oder K ein Normalteiler von G ist. Gilt die Umkehrung, wenn man $\langle X \rangle = G$ voraussetzt?

Aufgabe 67. Zeige, dass $\mathrm{SL}_n(K) := \{A \in M_n(K); \det(A) = 1\}$ ein Normalteiler von $\mathrm{GL}_n(K)$ (bzgl. der Matrizenmultiplikation) und die resultierende Faktorgruppe isomorph zur multiplikativen Gruppe $K^\times$ des Körpers K ist. Zeige, dass $\mathrm{GL}_n(K)$ das direkte Produkt dieser beiden Gruppen ist.

Aufgabe 68. Bestimme alle Normalteiler der symmetrischen Gruppe $\mathscr{S}_4$.

Aufgabe 69. Seien H, N Normalteiler der Gruppe G mit $HN = G$ und $H \cap N = \{e\}$, wobei e das neutrale Element von G ist. Zeige, dass die Abbildungen $H \times N \to G$ mit $(x, y) \mapsto xy$, sowie $G \to (G/H) \times (G/N)$ mit $z \mapsto (zH, zN)$ Gruppenisomorphismen sind.

Aufgabe 70. Seien $G, G_1, \ldots, G_n$ Gruppen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) G ist isomorph zum direkten Produkt der Gruppen $G_1, \ldots, G_n$.

b) Es gibt Untergruppen $U_1, \ldots, U_n$ von G mit $U_i \cong G_i$ für $i = 1, \ldots, n$, sodass $\varphi : U_1 \times \cdots \times U_n \to G, (u_1, \ldots, u_n) \mapsto u_1 \cdots u_n$ ein Isomorphismus ist. (Man sagt, dass G das innere direkte Produkt der $U_1, \ldots, U_n$ ist.)

c) Es gibt Untergruppen $U_1, \ldots, U_n$ mit $U_i \cong G_i$ für $i = 1, \ldots, n$, sodass die Abbildung $\varphi : U_1 \times \cdots \times U_n \to G, (u_1, \ldots, u_n) \mapsto u_1 \cdots u_n$ bijektiv ist und $xy = yx$ für alle $x \in U_i, y \in U_j$ und $1 \leq i < j \leq n$ gilt.

d) Es gibt Normalteiler $N_1, \ldots, N_n$ von G mit $N_i \cong G_i$ für $i = 1, \ldots, n$, sodass $G = N_1 \cdots N_n$ und $(N_1 \cdots N_i) \cap N_{i+1} = \{e\}$ für $i = 1, \ldots, n-1$.

Aufgabe 71. Man zeige, dass die Faktorgruppe der symmetrischen Gruppe $\mathscr{S}_4$ nach der Klein'schen Vierergruppe $V_4 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ isomorph zur symmetrischen Gruppe $\mathscr{S}_3$ ist.

Aufgabe 72. Der Quotient einer Gruppe G nach ihrem Zentrum sei zyklisch. Zeige, dass G abelsch ist.

Aufgabe 73. Sei G eine Gruppe mit der Eigenschaft, dass der Durchschnitt aller nicht-trivialen Untergruppen von G verschieden von $\{e\}$ ist. Schließe, dass jedes Element von G endliche Ordnung hat.

Aufgabe 74. Sei G eine endliche abelsche Gruppe und H eine Untergruppe von G. Zeige, dass $\exp(H)$ den Exponenten von G teilt und dass $\exp(G) \,|\, \exp(H) \exp(G/H)$ gilt.

Aufgabe 75. Zeige, dass durch $\varepsilon(\sigma) = (-1)^r$, falls sich $\sigma \in \mathscr{S}_n$ als Produkt $\tau_1 \cdots \tau_r$ von Transpositionen darstellen lässt, ein wohldefinierter Homomorphismus von $\mathscr{S}_n$ nach μ_2 gegeben ist (also insbesondere ist die Anzahl der Transpositionen modulo 2 in einer Darstellung von σ als Produkt von Transpositionen eindeutig).

Aufgabe 76. Stelle die Permutation $\sigma : 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 1$ als Produkt von Transpositionen dar und berechne $\varepsilon(\sigma)$.

Aufgabe 77. Berechne von allen Elementen in $\mathscr{S}_3$ das Signum.

Aufgabe 78. Finde einen injektiven Homomorphismus von $\mathscr{S}_n$ nach $\mathscr{A}_{2n}$.

Aufgabe 79. Man zeige, dass jede der Mengen $\{(12),(13),\ldots,(1n)\}$, $\{(12),(23),\ldots,(n-1n)\}$ und $\{(12),(12\ldots n)\}$ die symmetrische Gruppe $\mathscr{S}_n$, $n\geq 2$ erzeugt. Zeige außerdem, dass für $n\geq 3$ die alternierende Gruppe $\mathscr{A}_n$ von den 3-Zyklen erzeugt wird.

Aufgabe 80. Bestimme $[\mathscr{S}_3,\mathscr{S}_3],[\mathscr{S}_4,\mathscr{S}_4]$ und allgemein $[\mathscr{S}_n,\mathscr{S}_n]$. Zeige, dass $\mathscr{A}_n$ die einzige Untergruppe vom Index 2 in $\mathscr{S}_n$ ist.

Aufgabe 81. Zeige, dass das Zentrum von $\mathscr{S}_n$ für $n\geq 3$ nur aus $\{\mathrm{id}\}$ besteht.

Aufgabe 82. Beweise, dass für $n\geq 5$ je zwei Dreierzyklen in $\mathscr{A}_n$ konjugiert sind.

Die nächsten Aufgaben verwenden die berühmten Sätze von Sylow. Sei G eine endliche Gruppe. Dann gibt es zu jedem Primteiler p der Gruppenordnung $|G|$ eine Untergruppe deren Ordnung die größte Potenz von p ist, die $|G|$ teilt. Diese Untergruppen heißen p-Sylow-Untergruppen. Die Sylow-Sätze besagen nun, dass jede p-Untergruppe in einer p-Sylow-Untergruppe enthalten ist, je zwei p-Sylow-Untergruppen zueinander konjugiert sind und die Ordnung von G durch die Anzahl der p-Sylow-Untergruppe geteilt wird, welche außerdem kongruent 1 modulo p *ist. Siehe* [7, Kapitel 2].

Aufgabe 83. Sei p eine Primzahl und $H:=\langle\{(123\ldots p)\}\rangle$, die von dem Zykel $(123\ldots p)$ erzeugte Untergruppe in $\mathscr{S}_p$. Sei N eine endliche Menge mit n Elementen und eine Aktion von H auf N^p definiert durch $\sigma((x_1,\ldots,x_p))=(x_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,x_{\sigma^{-1}(p)})$ für $\sigma\in H,(x_1,\ldots,x_p)\in N^p$. Man zeige

$$n^p=|N^p|\equiv|\{(x,\ldots,x)\in N^p;\,x\in N\}|=n \pmod p.$$

Aufgabe 84. Bestimme alle p-Sylow-Untergruppen von $\mathbb{Z}/221100\mathbb{Z}=\mathbb{Z}/(10\cdot 11\cdot 2010)\mathbb{Z}$.

Aufgabe 85. Bestimme für jeden Primteiler p von $|\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})|$ eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Aufgabe 86. Man zeige, dass jede normale p-Untergruppe einer Gruppe G in jeder p-Sylow-Untergruppe von G enthalten ist. Verwende diese Aussage, um alle Sylow-Untergruppen von $\mathscr{S}_4$ zu berechnen.

Aufgabe 87. Seien G eine endliche Gruppe und S eine p-Sylow-Untergruppe von G. Zeige:

a) Ist S' eine p-Sylow-Untergruppe einer Untergruppe H von G, so gibt es eine zu S konjugierte Untergruppe T von G mit $T \cap H = S'$.

b) Ist N ein Normalteiler von G und $\pi : G \to G/N$ die kanonische Projektion, so sind $S \cap N$ und $\pi(S)$ p-Sylow-Untergruppen von N bzw. G/N.

Aufgabe 88. Es sei G ein endliche Gruppe, $N \subseteq G$ eine normale Untergruppe und $P \subseteq N$ eine Sylow-Untergruppe von G. Zeige, dass $G = N_G(P)N$.

Aufgabe 89. Zeige, dass alle endlichen p-Gruppen ein nicht-triviales Zentrum besitzen.

Aufgabe 90. Beweise, dass alle p-Gruppen der Ordnung p^2 abelsch sind.

Aufgabe 91. Bestimme alle Normalteiler einer Gruppe G der Ordnung 15 und folgere daraus, dass G zyklisch sein muss.

Aufgabe 92. Das vorige Beispiel lässt sich auf Gruppen G der Ordnung pq mit p, q prim verallgemeinern:

a) Ist $p < q$, so hat G eine normale q-Sylow-Untergruppe.

b) Ist $p < q$ und $p \nmid q - 1$, so ist G zyklisch.

Aufgabe 93. Es sei G eine endliche abelsche Gruppe und p^n die höchste Potenz von p, die in $|G|$ aufgeht. Zeige, dass die p-Sylow-Untergruppe $G(p)$ von G für $m \geq n+1$ isomorph zu G/G^{p^m} ist, wobei G^{p^m} das Bild von G unter der Abbildung $g \mapsto g^{p^m}$ ist.

Die folgenden Aufgaben behandeln den Satz von Jordan-Hölder. Dieser besagt, dass je zwei Kompositionsreihen einer Gruppe G isomorph sind. Dieser Satz spielt eine wichtige Rolle bei der Untersuchung von einfachen und auflösbaren Gruppen und dann in der Galois-Theorie. Für die zugrunde liegende Theorie siehe [7, Kapitel 3].

Aufgabe 94. Man finde alle Kompositionsreihen einer zyklischen Gruppe der Ordnung 20.

Aufgabe 95. Sei G eine Gruppe. Für $a, b \in G$ definiert $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ den Kommutator von a und b. Sind U, V Untergruppen von G, so sei $[U, V]$ die von den Kommutatoren $[u, v], u \in U, v \in V$, erzeugte Untergruppe. Zeige:

a) Eine Untergruppe N von G ist genau dann normal, wenn $[G, N] \subseteq N$.

b) Die Kommutator-Untergruppe $[G, G]$ ist stets ein Normalteiler von G.

c) Für einen Normalteiler N von G gilt: G/N ist abelsch genau dann, wenn $N \supseteq [G, G]$.

d) Setzt man $G_0 := G$ und definiert rekursiv $G_i := [G_{i-1}, G]$, so heißt G nilpotent, falls ein $k \in \mathbb{N}$ mit $G_k = \{1\}$ existiert. Zeige, dass $G_i \supseteq G_{i+1}$ für alle i. Was folgt daraus für nilpotenten Gruppen?

Aufgabe 96. Zeige: Die alternierenden Gruppe $\mathscr{A}_5$ ist einfach und nicht-abelsch und folgere daraus, dass die symmetrische Gruppe $\mathscr{S}_5$ nicht auflösbar ist.

Aufgabe 97. Zeige, dass die symmetrische Gruppe $\mathscr{S}_n$ genau für $n \leq 4$ auflösbar ist.

Aufgabe 98. Zeige, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 120 gibt.

Aufgabe 99. Zeige, dass Untergruppen auflösbarer Gruppen auflösbar sind.

Aufgabe 100. Es sei H ein Normalteiler einer Gruppe G. Zeige, dass G auflösbar ist, falls H und G/H es sind.

Aufgabe 101. Kann eine unendliche zyklische Gruppe (z.B. $\mathbb{Z}$) eine Kompositionsreihe besitzen?

Aufgabe 102. Beweise, dass alle endlichen p-Gruppen G auflösbar sind. Wie sehen die Faktoren einer Kompositionsreihe von G aus?

Aufgabe 103. Zeige, dass die Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ eine Gruppe G bilden, in der jedes Element die Ordnung 3 besitzt. Bestimme $Z(G)$ und gib eine Kompositionsreihe für G an.

Das letzte wichtige Thema aus der Gruppentheorie, welches wir nun behandeln, ist die Klassifikation von endlich-erzeugten abelschen Gruppen. Nach dem Hauptsatz bestehen solche Gruppen aus einem freien und unendlichen Teil sowie aus einem endlichen Torsionsanteil, der weiter in zyklische Gruppe (die Elementarteiler) zerlegt werden kann. Den theoretischen

Unterbau für dieses zentrale Ergebnis in der Gruppentheorie findet man in [7, Kapitel 7].

Aufgabe 104. Zeigen, dass die Automorphismengruppe einer freien abelschen Gruppe mit Rang n isomorph zur multiplikativen Gruppe aller $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Z}$ und Determinante ± 1 ist.

Aufgabe 105. Sei $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ eine kurz exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Dann sind folgenden Aussagen äquivalent:

a) Es gibt einen Homomorphismus $h : C \to B$ mit $g \circ h = \mathrm{id}_C$.

b) Es gibt einen Homomorphismus $k : B \to A$ mit $k \circ f = \mathrm{id}_A$.

c) Es gibt einen Isomorphismus $\psi : B \to A \oplus C$, sodass $\psi \circ f = \iota$ mit $\iota(a) = (a, 0)$ und $\pi_2 \circ \psi = g$ mit $\pi_2(a, c) = c$ die natürliche Einbettung bzw. Projektion sind.

In diesem Fall sagt man, dass die kurz exakte Sequenz *zerfällt* (oder *spaltet*).

Aufgabe 106. Man beweise: Eine endlich-erzeugte abelsche Gruppe A ist frei genau dann, wenn zu jedem surjektiven Homomorphismus $g : B \to C$ zwischen abelschen Gruppen B und C und zu jedem Homomorphismus $f : A \to C$ stets ein Homomorphismus $h : A \to B$ mit $g \circ h = f$ existiert (im letzteren Fall nennt man A *projektiv*).

Aufgabe 107. Sei A eine abelsche Gruppe der Ordnung 100. Man zeige, dass A ein Element der Ordnung 10 enthält. Außerdem: Wenn A kein Element der Ordnung > 10 enthält, dann gilt $A \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Aufgabe 108. Man beweise die folgenden Aussagen:

a) Jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist zyklisch.

b) Jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist frei. Bestimmen Sie eine Untergruppe vom Rang 5 (durch Angabe einer Basis).

Aufgabe 109. Sei A eine Untergruppe der abelschen Gruppe G. Zeige, dass A genau dann ein direkter Summand von G ist, wenn es einen Homomorphismus $p : G \to A$ gibt mit $p(a) = a$ für alle $a \in A$.

Aufgabe 110. Beweise, dass $A = \prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ eine abelsche Gruppe ist, deren Torsionsuntergruppe A_t kein direkter Summand von A ist. Dazu kann man so vorgehen:

a) Zeige zunächst, dass kein $x = (x_p)$ in A existiert, das durch jede Primzahl p teilbar ist. (Dabei heißt $x \in A$ durch t teilbar, falls ein $y \in A$ existiert mit $ty = x$.)

b) Zeige, dass A/A_t ein Element ungleich 0 enthält, das durch jedes p teilbar ist, und konstruiere daraus einen Widerspruch zur Annahme, dass $A/A_t \oplus A_t$ gelte.

Aufgabe 111. Zeige, dass für Primzahlen p, q die Gruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ genau dann zyklisch ist, wenn $p \neq q$ gilt. Benutze dies, um zu zeigen, dass eine endliche abelsche Gruppe A genau dann zyklisch ist, wenn sie keine Untergruppe der Gestalt $Z/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ besitzt.

Aufgabe 112. Klassifiziere alle abelschen Gruppen der Ordnung 360. Welche sind zyklisch?

Aufgabe 113. Zeige, dass für jeden Teiler d der Ordnung einer endlichen abelschen Gruppe G eine Untergruppe der Ordnung d in G existiert.

Aufgabe 114. Finde ein Beispiel dafür, dass die Aussage der vorigen Aufgabe im Allgemeinen nicht richtig ist, wenn G nicht abelsch ist.

Aufgabe 115. Seien G und H endliche abelsche Gruppen mit den Elementarteilern $p_1, \ldots,\ p_m$ bzw. $q_1, \ldots, q_n$ (gemeint sind damit die Primzahlpotenzen, die nach den Sätzen 7.10 und 7.11 in [7] existieren). Zeige, dass die abelsche Gruppe $\mathrm{Hom}(G, H) := \{f : G \to H;\ f$ Homomorphismus von G nach $H\}$ als Elementarteiler die von 1 verschiedenen der Zahlen $\mathrm{ggT}(p_i, q_j), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ besitzt.

Wir schließen die Betrachtung von Gruppen mit einigen vermischten Fragen, welche sich leicht beantworten lassen.

Aufgabe 116. Zeige die Richtigkeit der folgenden Aussagen:

a) Sei n ein Produkt verschiedener Primzahlen, dann ist jede abelsche Gruppe der Ordnung n isomorph zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

b) Jede abelsche Gruppe der Ordnung 60 hat eine Untergruppe der Ordnung 30.

Aufgabe 117. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen falsch sind: Es gibt bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen der Ordnung 12; es gibt bis auf Isomorphie genau sechs Gruppen der Ordnung 72.

http://www.springer.com/978-3-8348-1962-8

Übungen zur Algebra
Aufgaben - Lösungen - Probeklausuren
Fuchs, C.; Wüstholz, G.
2014, IX, 231 S., Softcover
ISBN: 978-3-8348-1962-8