

# Vorwort

Eine reiche und interessante Aufgabensammlung ist immer ein kostbarer Schatz, der dazu dient, komplexe Sachverhalte an treffenden Beispielen zu illustrieren. Den Übungsaufgaben fällt die Rolle zu, den Stoff näher zu bringen, und die Beschäftigung mit ihnen fördert und vertieft das Verständnis des Erlernten. Eine Lösung einer Aufgabe gefunden zu haben, manchmal erst nach Stunden, vermittelt das befriedigende Gefühl, die zugrunde liegende Theorie verstanden zu haben und anwenden zu können. Oftmals ist es aber auch einfach schön, sich einer mathematischen Herausforderung zu stellen und diese zu bewältigen. Gerade in der Algebra, die auf sehr strukturellen und axiomatischen Konzepten beruht, hat man oftmals mit nicht unerheblichen Anfangsschwierigkeiten zu kämpfen. Daher sind geeignete Übungsaufgaben ein A und O, den schwierigen Beginn zu bewältigen. Seit eh und je gehörte die Algebra zu den Pflichtveranstaltungen in der Mathematik und Physik. Im Zuge der mehrfach an der ETH Zürich abgehaltenen Lehrveranstaltungen *Algebra I* und *Algebra II* haben die Autoren über Jahre hinweg eine umfangreiche Sammlung an Übungsaufgaben samt ausführlichen Lösungen zusammengetragen. Diesen Fundus wollen wir mit diesem Buch einem größeren Kreis von Interessenten zugänglich machen. Es ist uns ein Anliegen dazu beitragen zu helfen, die faszinierende Welt der Abstraktion, der man in der Algebra auf so pure Weise begegnet, durch Übungen etwas näher zu bringen.

Die Aufgaben in den einzelnen Kapiteln sind jeweils in thematische Gruppen (sic!) eingeteilt. Diesen werden schlagwortartig die wichtigsten Schwerpunkte der zugehörigen Theorie vorangestellt. Das bietet Hilfestellung einerseits zum Lösen der Aufgaben, andererseits aber auch um geeignete Aufgaben zu ausgewählten Themenbereichen zu finden. Gelegentlich wird die eine oder andere Definition ins Gedächtnis zurückgerufen. Wir richten uns dabei nach dem *Algebra*-Buch [7], das den eingangs erwähnten Vorlesungen zugrunde lag. Diese waren 4-stündig mit 2-stündigen Übungen auf Bachelorstufe und waren über einen Zeitraum von zwei Semestern angelegt, typischerweise im zweiten Studienjahr. Eine Reihe von Aufgaben im vorliegenden Buch entstammt dem *Algebra*-Buch. Viele andere kommen dort nicht vor, sodass die Aufgabensammlung auch sehr gut mit anderen Lehrbüchern verwendet werden kann. Insgesamt dient sie als Trainingsbuch für eine einführende Lehrveranstaltung in Algebra. Für die Theorie verweisen wir auch auf [1] sowie auf [2], [3] und [6]; diese Quellen dienten uns zur Inspiration für die eine oder andere Aufgabe. Den notwendigen Hintergrund aus der linearen Algebra findet man beispielsweise im Buch von G. Fischer [4] oder auch im Buch von H. Havlicek [5]; diese Texte waren unter anderem Grundlage für Vorlesungen über lineare Algebra, welche die Autoren an der

ETH Zürich abgehalten haben. Wir haben einige wenige Aufgaben aus den Übungen zu diesen Vorlesungen übernommen.

Natürlich kann es sich bei jeder Aufgabensammlung nur um eine kleine und persönlich gefärbte Auswahl handeln. Vieles wird nicht oder nur am Rande berührt. So behandeln wir beispielsweise keine Verbände oder Booleschen Algebren und auch keine Aspekte der universellen Algebra, wir gehen auch nicht auf Themen der Kommutativen Algebra oder auf Anwendungen in der (algebraischen) Zahlentheorie oder der (algebraischen) Geometrie ein; stattdessen haben wir uns ganz auf die Grundpfeiler der Algebra beschränkt, nämlich die Theorie der Gruppen, Ringe, Körper (mit Galois-Theorie), und haben uns lediglich einen kleinen Abstecher in die Darstellungstheorie von Gruppen erlaubt. Manche Aufgaben sind relativ einfach und dienen als "warming-up". Ihre Lösungen ergeben sich durch sorgfältiges Abarbeiten der zugrunde liegenden Begriffe und Definitionen. Dies bereitet erfahrungsgemäß am Anfang des Studiums schon genügend Schwierigkeiten, wird später jedoch zur Routine. Andere Aufgaben sind trickreich und verstehen sich als Herausforderung für Ambitionierte. Sie sind vor allem für Schatzsucherinnen und -sucher gedacht. Es bleibt notfalls immer noch die Möglichkeit, vom Aufgaben- in den Lösungsteil zu wechseln, um dem dort vorgeschlagenen Weg zu einer Lösung zu folgen, der nicht immer zwingend sein muss.

Dank gebührt den Übungsassistentinnen bzw. -assistenten unserer Lehrveranstaltungen sowie engagierten Studierenden, die uns auf Fehler aufmerksam gemacht haben; alle weiteren noch vorhandenen Fehler und Ungenauigkeiten gehen selbstverständlich zu Lasten der Autoren. Wir bedanken uns auch bei Patrik Hubschmid, der einige der hier aufgeführten Lösungen beigezeichnet hat. Von Ulrike Schmickler-Hirzebruch vom Springer Spektrum-Verlag erhielten wir wertvolle Unterstützung bei der redaktionellen Überarbeitung dieser Aufgabensammlung.

*Clemens Fuchs  
Gisbert Wüstholtz*

Salzburg und Zürich, 22.08.2013

Übungen zur Algebra

Aufgaben - Lösungen - Probeklausuren

Fuchs, C.; Wüstholtz, G.

2014, IX, 231 S., Softcover

ISBN: 978-3-8348-1962-8