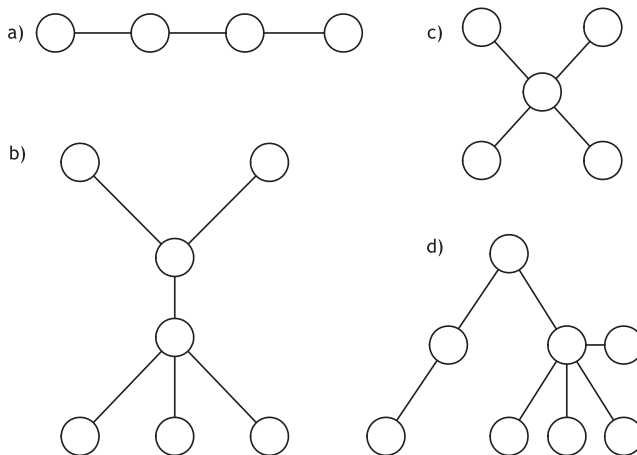


2 Bäume und Baumalgorithmen

Unter der Vielzahl möglicher Netzwerkkonfigurationen soll hier die spezielle Netzwerkstruktur des Baums diskutiert werden. Diese Struktur zeichnet sich dadurch aus, mit minimaler Anzahl von Kanten gerade noch einen **Zusammenhang** unter den Knoten zu garantieren. Zur kostenminimalen Auslegung einer Infrastruktur (Straßen, Internet-Backbones, Telefonnetze, Versorgungsleitungen) spielen Bäume daher eine besondere Rolle. Ein Baum enthält wegen seines Zusammenhangs insbesondere keinen isolierten Knoten und auch keinen Zyklus, da in einem Zyklus stets eine Kante entfernt werden kann, ohne den Zusammenhang zu unterbrechen. Besitzt ein Netzwerk $N=(V,E)$ mehrere Zusammenhangskomponenten und ist jede Zusammenhangskomponente ein Baum, so heißt das Netzwerk ein **Wald**. In einem Baum werden Knoten mit Grad eins als **Blätter** bezeichnet. Beispiele für ungerichtete Bäume enthält Abbildung 2-1.

Abbildung 2-1: Beispiele für ungerichtete Bäume



2.1 Eigenschaften von Bäumen

Unter den Bäumen sind verschiedene Anordnungen der Blätter möglich. Wir betrachten hier zwei extreme Ausprägungen: die lineare Kette und die Zentralstruktur. In einer linearen Kette befindet sich an den beiden Enden jeweils ein Blatt, so dass nur 2 Blätter insgesamt vorliegen, siehe Abbildung 2-1, a).

In einer Zentralstruktur sind alle Blätter mit einem Zentralknoten verbunden, so dass bei n Knoten insgesamt $n-1$ Blätter vorliegen, siehe Abbildung 2-1, c). Eine solche Zentralstruktur wird in der Logistik als **Hub** bezeichnet und ist insbesondere im Luftverkehr anzutreffen. Mit Regionalverbindungen werden die Passagiere aus einer größeren Region in einem Zentralknoten konzentriert und von dort aus mit Fernverbindungen zu anderen Kontinenten verbracht (Kapitel 7). Hubs findet man ebenfalls in Netzwerken für die Paketlogistik, wobei dort neben Flugzeugen (wie beim Unternehmen Federal Express) für kleinere Sammel- und Verteilgebiete (wie etwa die Bundesrepublik Deutschland) auch LKW-Verkehre eingesetzt werden.

Mit der Aussage 2-1 wird gezeigt, wie Bäume auf verschiedene Weise beschrieben werden können:

Aussage 2-1: Folgende Charakterisierungen sind gleichbedeutend für einen Baum $N=(V,E)$ mit $n \geq 3$ Knoten:

- 1. N ist zusammenhängend und zyklensfrei.*
- 2. Je zwei Knoten in V sind über genau einen Weg verbunden.*
- 3. N ist zusammenhängend und besitzt bei n Knoten genau $n - 1$ Kanten.*
- 4. N ist zyklensfrei und besitzt bei n Knoten genau $n - 1$ Kanten.*

Wir zeigen die Äquivalenz der Charakterisierungen 1. bis 4. von Aussage 2-1:

Herleitung von 1. $\Rightarrow$ 2.:

Da N zusammenhängend ist, existiert zwischen je zwei Knoten ein Weg, der beide verbindet. Da N zyklensfrei ist, ist der Weg eindeutig. Denn gäbe es zwei verschiedene Wege, würden diese zusammen einen Zyklus bilden.

Herleitung von 2. $\Rightarrow$ 1.:

Da je zwei Knoten über einen Weg verbunden sind, ist N zusammenhängend. Da der Weg eindeutig ist, ist N zyklensfrei.

Herleitung von 4. $\Rightarrow$ 3.:

Vollständige Induktion nach der Knotenzahl n : (1) $n=3$. Die Implikation 4. $\Rightarrow$ 3. trifft zu. (2) Es gelte die Aussage für $n \geq 3$. (3) Induktionsschluss für $n+1$: Sei N ein zyklusfreies Netzwerk mit $n+1$ Knoten und n Kanten. Da N zyklusfrei ist, kann nicht jeder Knoten einen Grad ≥ 2 besitzen, da ansonsten ein Zyklus vorläge. Also existiert ein

Knoten k mit $\text{grad}(k) \leq 1$. Gezeigt wird, dass $\text{grad}(k)=1$. Denn wäre $\text{grad}(k)=0$, also der Knoten k isoliert, dann könnte in N der Knoten k gestrichen werden. Es entstünde ein Netzwerk N' mit n Knoten und n Kanten. Wir streichen in N' eine Kante (s,t) und erhalten ein Netzwerk N'' mit n Knoten und $n-1$ Kanten. Nach Induktionsannahme ist N'' zusammenhängend, und es existiert ein Weg in N'' von s nach t . Wird in das zusammenhängende Netzwerk N'' die Kante (s,t) wieder eingefügt, dann entsteht ein Zyklus. Also besitzt N' einen Zyklus, und damit auch N , im Widerspruch zu Merkmal 4. Damit ist $\text{grad}(k) = 1$ gezeigt. Das Netzwerk N^* gehe aus N hervor, indem Knoten k und die Kante, die von k ausgeht, gestrichen werden. Dann besitzt N^* n Knoten und $n-1$ Kanten und ist nach Induktionsannahme zusammenhängend. Dann gilt diese Aussage auch für N .

Herleitung von $1. \Rightarrow 4.$:

Vollständige Induktion nach der Knotenzahl n : (1) $n=3$. Die Implikation $1. \Rightarrow 4.$ trifft zu. (2) Es gelte die Aussage für $n \geq 3$. (3) Induktionsschluss für $n+1$: Sei N ein zusammenhängendes und zyklensches Netzwerk. Wie in Herleitung von $4. \Rightarrow 3.$ gezeigt, existiert in N ein Knoten k mit $\text{grad}(k)=1$. Das Netzwerk N^* gehe aus N hervor, indem Knoten k und die Kante, die von k ausgeht, gestrichen werden. Dann besitzt N^* n Knoten und $n-1$ Kanten und ist nach Induktionsannahme zyklensches. Damit ist auch N zyklensches und besitzt n Kanten.

Herleitung von $4. \Rightarrow 1.$:

Wie in Herleitung von $4. \Rightarrow 3.$ gezeigt, ist N zusammenhängend. Damit ist N zyklensches und zusammenhängend.

Herleitung von $3. \Rightarrow 4.$:

N ist zyklensches, da genau $n-1$ Kanten vorliegen.

Man kann aus der Aussage 2-1 auch folgern, dass zwei der folgenden drei Eigenschaften für einen Baum zutreffen müssen:

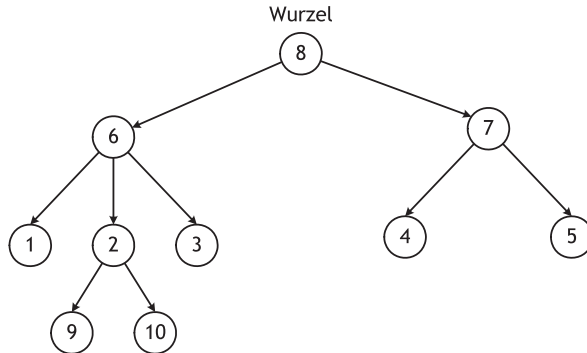
- Das Netzwerk ist zyklensches.
- Das Netzwerk ist zusammenhängend.
- Das Netzwerk besitzt bei n Knoten $n-1$ Kanten.

2.1.1 Der Wurzelknoten

Wegen der Eindeutigkeit von Wegen in Bäumen kann man einen Baum durch Angabe eines (beliebigen) Referenzknotens beschreiben. Dieser Knoten wird **Wurzel** r genannt. Man betrachtet dann für jeden Knoten $i \in V = \{1, \dots, n\}$, $i \neq r$, den Weg von r nach i . Als

Beispiel ist in Abbildung 2-2 ein Baum mit 10 Knoten und der Wurzel $r=8$ gewählt. Um die Wege von der Wurzel hervorzuheben, sind die Kanten gerichtet.

Abbildung 2-2: Beispiel eines Baums mit 10 Knoten und Wurzel im Knoten 8



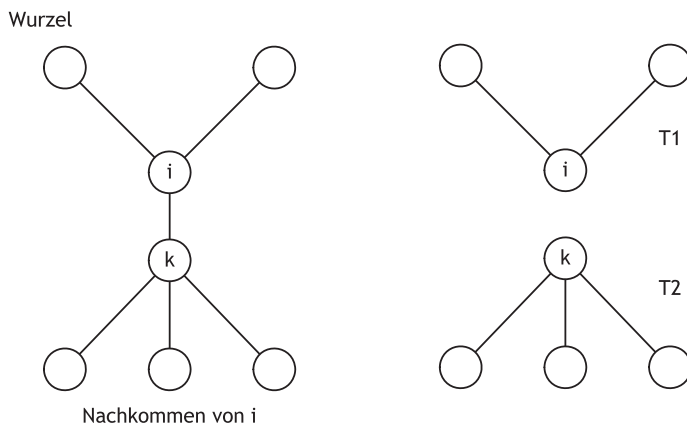
Zur Visualisierung eines Baums verfährt man, wie in Abbildung 2-2 gezeigt: Wenn man die Wurzel auf der obersten Ebene ansiedelt, dann werden die Nachfolger der Wurzel jeweils eine Ebene tiefer angesiedelt und die Nachfolger der Nachfolger wieder eine Ebene tiefer usw. Mit einer Baumstruktur lassen sich auf diese Weise auch hierarchische Zusammenhänge, wie etwa Organigramme von Unternehmen, abbilden. Man erkennt an dieser Visualisierung ferner, wie die anschauliche Form eines Baums von der Wahl der Wurzel r abhängt.

Bei gerichteten Bäumen $B = (V, E)$ kann man die Richtung des Pfeils auf einem Weg im Vorgängerfeld mit dem Vorzeichen angeben: Ist j Vorgänger von i und $[j, i] \in E$, dann wird j positiv gespeichert. Wenn $[i, j] \in E$, dann wird j negativ gespeichert.

Als **Nachkommen** eines Knotens i wird die Menge aller Knoten j verstanden, bei denen die Wege von der Wurzel zu j über den Knoten i laufen. Anschaulich handelt es sich um die Nachfolger von Knoten i , um die Nachfolger der Nachfolger usw. Im Beispiel aus Abbildung 2-2 stellt die Knotenmenge $\{1, 2, 3, 9, 10\}$ die Nachkommen von Knoten 6 dar.

Da ein Baum B eine Zusammenhangsstruktur mit minimaler Kantenzahl darstellt, zerfällt ein Baum in zwei Teilbäume T_1 und T_2 , sobald eine Kante aus B entfernt wird. Der eine Teilbaum besteht dann aus den Nachkommen von Knoten i , wenn die Kante (i, k) entfernt wird und i Vorgänger von k ist. Die Abbildung 2-3 zeigt dieses auf.

Abbildung 2-3: Zerlegung eines Baums in zwei Teilbäume T_1 und T_2 durch Entfernen einer Kante



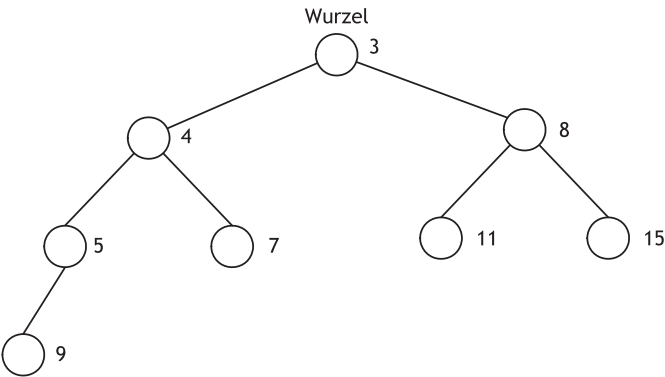
2.1.2 Bäume mit besonderen Eigenschaften

Mit einem **Entscheidungsbaum** lassen sich auch sukzessive Entscheidungssituationen abbilden, indem jedem Knoten eine zeitlich auseinander fallende Entscheidung zugeordnet wird, siehe z. B. das in Abschnitt 9.4 beschriebene Branch and Bound Verfahren. Hat man in jedem Knoten höchstens zwei Verzweigungen in die nächst tiefere Stufe, so spricht man auch von einem **Binärbaum**. Hier ist der Knotengrad ≤ 3 . In der Informatik spielen **balancierte Bäume** für schnelle Suchverfahren eine große Rolle, bei denen die Wurzel so gewählt wird, dass sich die Verzweigungen möglichst gleichgewichtig auf die Äste verteilen. Die Suchbäume bei der Internetsuchmaschine Google, die den Inhalt von Milliarden von Internetseiten indizieren, sind so aufgebaut. Eine andere Klasse besonderer Bäume sind **Heaps**, die eine Teilsortierung von Knotenbewertungen vornehmen und mit denen das Auffinden des Minimumwertes besonders effizient gestaltet werden kann.

Ein **d-Heap** ist ein Baum, dessen Knoten höchstens d Nachfolger aufweisen und dessen längster Pfad von der Wurzel bis zu einem der Blätter höchstens $\log_d n$ Kanten besitzt. Meistens werden für den Fall $d=2$ die Heaps als Binäräume aufgestellt. Zur Teilsortierung der Zahlenwerte wird jedem Knoten des Heaps ein Zahlenwert als so genannter Schlüssel zugeordnet. Der Aufbau des Heaps geht dann so vonstatten, dass der Schlüssel jedes Nachfolgers größer als oder gleich dem Schlüssel von dessen Vorgänger ist. Damit ist der minimale Wert als Schlüssel auf der Wurzel angesiedelt. Interessant ist die Heapstruktur insofern, als Änderungen in dieser Struktur, wie das Hinzufügen oder Streichen von Knoten oder das Ändern von Schlüsseln, besonders effi-

zient vor sich geht (vgl. Ahuja et al. S. 773). Die Abbildung 2-4 gibt ein Beispiel für einen Binärheap, in dem die Schlüssel neben den Knoten vermerkt sind.

Abbildung 2-4: Binärheap



Wenn N zusammenhängend ist, spricht man von einem Baum, der N **aufspannt**. Dieser Baum mit Knotenmenge V ermöglicht, den Zusammenhang in N mit einer minimalen Anzahl von $n-1$ Kanten unter den n Knoten von N darzustellen. Je mehr die Kantenanzahl m von N über das Minimum von $n-1$ Kanten hinausgeht, desto mehr Möglichkeiten gibt es, verschiedene aufspannende Bäume zu konstruieren.

Abbildung 2-5: Ein Netzwerk mit zwei alternativen aufspannenden Bäumen

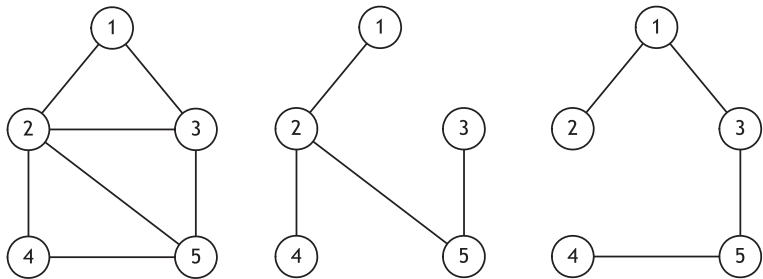


Abbildung 2-5 zeigt zwei Möglichkeiten auf, einen aufspannenden Baum in einem Netzwerk von 5 Knoten zu erzeugen. Für dieses Beispiel gibt es insgesamt 21 ver-

schiedene aufspannende Bäume. In einem vollständigen Netzwerk gibt es sogar n^{n-2} verschiedene (z. B. erhalten wir für $n=5$ $5^3 = 125$ verschiedene aufspannende Bäume).

Wir stellen in Verfahren 2-1 eine Möglichkeit vor, aus einem zusammenhängenden Netzwerk einen aufspannenden Baum herzuleiten. Ausgehend von der Wurzel 1 besuchen wir nacheinander noch nicht besuchte Knoten und nehmen dabei die auf diesem Weg durchlaufenen Kanten in den Baum auf. Die besuchten Knoten werden in einer Menge M festgehalten. Bei diesem Verfahren ist sichergestellt, dass ein Baum repräsentiert wird, da in der Verarbeitung durch die Bedingung $i \notin M$ die Zyklusfreiheit garantiert wird.

Verfahren 2-1: Bestimmung eines aufspannenden Baums P für ein zusammenhängendes Netzwerk N mit Knotenmenge $V = \{1, \dots, n\}$ und Kantenmenge E

Initialisierung

- 1 Wurzel ist Knoten 1
- 2 $M = \{1\}$

Verarbeitung

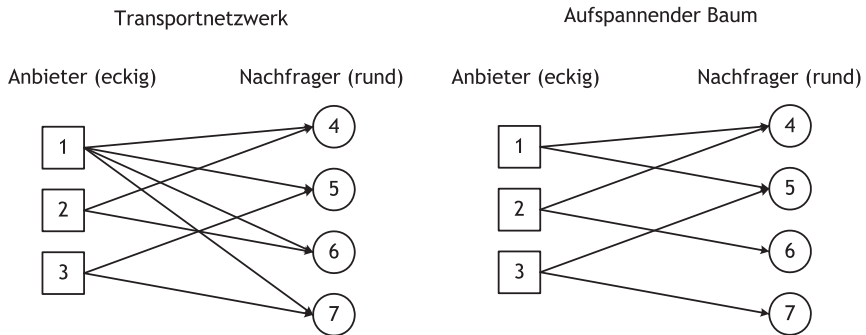
- 3 Suche einen Knoten $j \in M$, zu dem eine Kante $(i, j) \in E$ gehört mit $i \notin M$
- 4 Nehme i in M auf: $M = M \cup \{i\}$
- 5 Knoten j ist dann Vorgänger von i auf dem Weg von der Wurzel zu i

Terminierung

- 6 Abbruch, wenn $M = V$ erreicht. Ansonsten GOTO 3.
-

2.1.3 Das Auffinden von bipartiten Netzwerken

Wenn ein Netzwerk $N = (V, E)$ gegeben ist, so ist nicht auf den ersten Blick zu entscheiden, ob es bipartit ist. Hier soll nun mithilfe des Konzepts des aufspannenden Baums ein Verfahren dafür vorgestellt werden. Als Einführung in das Thema betrachten wir das bipartite Transport-Netzwerk von Abbildung 2-6 mit den Knotenmengen $V_1 = \{1, \dots, 3\}$ und $V_2 = \{4, \dots, 7\}$.

Abbildung 2-6: *Bipartites Transportnetzwerk*

Wenn wir die Knotenmenge V_1 eckig markieren und die Knotenmenge V_2 rund und den aufspannenden Baum mit Wurzel $r=1$ zum Transport-Netzwerk betrachten, so erkennen wir, dass im Baum jeder Weg von der Wurzel zu einem Blatt abwechselnd zwischen roten und blauen Knoten verläuft. Ferner erkennen wir, dass im Transportnetzwerk alle Kanten, die nicht im Baum sind, ebenfalls zwischen roten und blauen Knoten verlaufen. Diese Eigenschaft können wir nun zum Kriterium dafür machen, dass ein Netzwerk $N = (V, E)$ bipartit ist.

Verfahren 2-2: *Auffinden eines bipartiten Netzwerks*

- 1 Ein Netzwerk $N = (V, E)$ sei gegeben
- 2 Suche den aufspannenden Baum T mit Wurzel $r=1$. Markiere die Wurzel eckig
- 3 Für jedes Blatt B von T suche den Weg von r nach B auf und markiere die Knoten dort abwechselnd eckig und rund, so dass die Wurzel eckig markiert bleibt
- 4 Wenn alle Kanten von N , die nicht im Baum sind, zwischen eckigen und runden Knoten verlaufen, dann ist N bipartit. Die Knotenmenge V_1 ist durch alle eckigen Knoten gegeben, V_2 durch alle runden Knoten.

2.2 Spannende Bäume

2.2.1 Bewertete Bäume

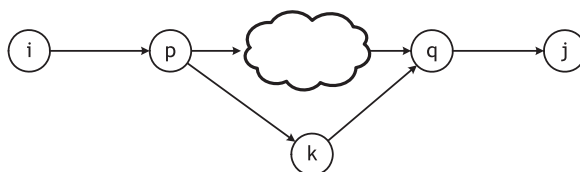
Bewertete Bäume sind Bäume, deren Kanten (i,k) Bewertungen $d_{ik} > 0$ tragen, die als Kosten, Gewichte oder Entfernungen interpretiert werden können. Bäume mit bewerteten Kanten weisen ein interessantes Analogon zur Dreiecksungleichung auf, wie wir sie zur Charakterisierung von Kantenbewertungen in Abschnitt 1.4.1 kennen gelernt haben. Um diese Eigenschaft darzustellen, bezeichnen wir mit $W(i,k)$ den Weg von Knoten i zum Knoten k in einem Baum B und mit $L(i,k)$ dessen Länge.

Aussage 2-2: Sei B ein bewerteter, ungerichteter Baum. Dann gilt in B die Dreiecksungleichung, d. h. für drei Knoten i,j,k von B gilt: $L(i,j) \leq L(i,k) + L(k,j)$

Herleitung: Seien $W(i,j)$ bzw. $W(i,k)$ bzw. $W(k,j)$ der Weg von i nach j bzw. i nach k bzw. k nach j in B . Unterschieden werden 2 Fälle:

- 1) Der Knoten k liegt im Weg $W(i,j)$. Dann ist $k=p=q$ und $L(i,j) = L(i,k) + L(k,j)$.
- 2) Der Knoten k liegt nicht im Weg $W(i,j)$, vgl. Abbildung 2-7. Gefragt wird, wie weit der Weg $W(i,k)$ parallel zu $W(i,j)$ und der Weg $W(k,j)$ parallel zu $W(i,j)$ verläuft: Sei p der letzte Knoten auf $W(i,j)$, der mit dem Weg $W(i,k)$ gemeinsam ist. Sei q der erste Knoten auf $W(i,j)$, der mit dem Weg $W(k,j)$ gemeinsam ist. Da im Baum keine Zyklen möglich sind, muss $p = q$ sein. Dann ist $L(i,k) + L(k,j) = L(i,p) + L(p,k) + L(k,q) + L(q,j) \geq L(i,p) + L(q,j) = L(i,p) + L(p,j) = L(i,j)$.

Abbildung 2-7: Der Weg von p nach q

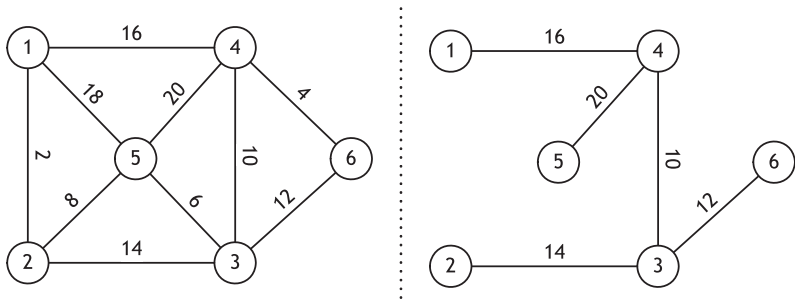


2.2.2 Kürzeste aufspannende Bäume

In bewerteten, ungerichteten Netzwerken soll hier unter der Vielzahl von möglichen aufspannenden Bäumen derjenige aufspannende Baum bestimmt werden, dessen Bewertungssumme minimal ist (Shortest-Spanning-Tree-Problem). Dieser Baum wird

als **kürzester aufspannender Baum** (KAB) bezeichnet. Der KAB ist eindeutig, wenn die Kanten von B unterschiedliche Bewertungen tragen.

Abbildung 2-8: Ein bewertetes Netzwerk und ein möglicher aufspannender Baum



Wir setzen ein zusammenhängendes, ungerichtetes Netzwerk $N = (V,E)$ mit einer Bewertung $d_{ik} > 0$ auf den Kanten voraus. Als Beispiel ziehen wir das Netzwerk aus Abbildung 2-8 heran mit der Knotenmenge $V = \{1,...,6\}$ und der Kantenmenge $E = \{(1,2), (1,4), (1,5), (2,3), (2,5), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6)\}$. Der aufspannende Baum dieses Netzwerks besitzt das Gewicht $16+20+10+14+12 = 72$, siehe Abbildung 2-8.

Tabelle 2-1: Sortierte Kantenliste zum Netzwerk aus Abbildung 2-8

Kante	Kosten	Kante	Kosten
(1,2)	2	(3,6)	12
(4,6)	4	(2,3)	14
(3,5)	6	(1,4)	16
(2,5)	8	(1,5)	18
(3,4)	10	(4,5)	20

Es wird nun nach dem aufspannenden Baum mit der kleinsten Bewertungssumme gefragt. Zur Beantwortung dieser Frage können wir die Verfahren von Prim (1957) und Kruskal (1956) heranziehen. Sie beginnen mit dem Sortieren der Kanten nach Kosten.

Logistiknetzwerke

Modelle für Standortwahl und Tourenplanung

Mattfeld, D.C.; Vahrenkamp, R.

2014, X, 337 S. 112 Abb. Mit Online-Extras., Softcover

ISBN: 978-3-8349-2269-4